Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 065 – Giugno 2004 - Anno Sesto

1. Una fionda per Davide

Tremate, tremate: sono davvero tornate.

Magicamente (perché è il nome stesso che evoca magia) arrivano volando, sostenute dall'aria, come a loro si conviene: dopo un'eterna attesa, i cieli tornano di nuovo ad essere oscurati dalle loro sagome leggere, e ognuna di esse è pronta e decisa a portare scompiglio e devastazione nelle terre degli uomini. Con i piedi ineluttabilmente ancorati al suolo, gli uomini si limitano ad alzare lo sguardo verso il cielo, verso l'orizzonte minaccioso, mentre tremano per i loro averi e per la loro coltura, e preparano le difese. Così, nelle valli che brulicano di umani preoccupati, già fiammeggiano i primi roghi: non saranno poche le sventurate che finiranno bruciate vive, dopo un atterraggio sbagliato o una manovra imprudente. E molte di loro saranno spietatamente colpite, uccise, schiacciate: alcune finiranno addirittura divorate, lacerate e macinate dai molari spietati e dalla vendetta gelida degli uomini: ma tutto questo non basta a spaventarle, a farle rinunciare al ritorno e alla nemesi. È giunto il momento, finalmente; erano anni e anni che attendevano questa primavera del 2004 e non c'è più nulla, ormai, che possa impedire il loro arrivo. E infatti arrivano: e il loro numero si conta già a miliardi.

Lo hanno raccontato anche i nostri quotidiani: la loro densità è di un milione e mezzo per acro (o, se preferite, seicento milioni per chilometro quadrato) e hanno già invaso ben quindici stati degli USA nordorientali[1]. Sono tutte figlie di quelle del 1987.

La "Magicicada Septendecim" ha un nome scientifico eloquente: è ovviamente una cicala ("cicada"), è spudoratamente magica, e il suo numero magico è il diciassette. Si tratta di una cicala periodica, che raggiunge lo stadio adulto solo ogni diciassette anni; poiché quasi tutte le cicale hanno un ciclo di vita periodico (in genere dai due agli otto anni), non è tanto la periodicità ad essere stupefacente, quanto la lunghezza dell'intervallo tra le stagioni in cui è possibile trovare esemplari adulti: la razza più numerosa delle cicale di questo gruppo (nomato "X", da leggersi "decimo", non "incognito") aveva fatto la sua comparsa nella primavera del 1987, e in questo 2004 sono tornate a cicalecciare negli Stati Uniti. La periodicità è ben nota, quindi non può certo dirsi che i contadini americani siano stati colti di sorpresa: in maniera non dissimile da quanto succede per la Cometa di Halley, il ritorno delle cicale è del tutto previsto e prevedibile[2], al punto che alcuni buongustai avevano già cominciato a pregustare i piatti di cicale fritte che vengono in qualche luogo preparati per l'occasione. Qualunque siano le domande che questi strani insetti generano nei biologi e nei cultori della nouvelle cousine, è quasi inevitabile che un matematico si chieda, un po' pigramente: "Chissà perché proprio diciassette…". Basta una piccolissima ulteriore indagine di natura biologica per far cadere definitivamente l'avverbio "pigramente" dalla frase precedente: le specie[3] delle Magicicada sono sette, ma solo tre hanno un ciclo vitale basato sul diciassette; le altre quattro specie hanno infatti un ciclo vitale basato su un numero di anni diverso: tredici. E se il diciassette preso da solo è curioso, quando viene accoppiato al tredici diventa clamoroso. Impossibile non sentire le parole "Numeri Primi!"[4] che rimbombano echeggianti tra le pareti della scatola cranica: possibile che sia solo casuale che i periodi magicicadiani siano ad un tempo insoliti, lunghi, e definiti da numeri primi? Che diavolo ne sanno le cicale del concetto di "numero primo"? Come fa la teoria dei numeri ad essere messa in relazione con lo stadio adulto di una specie di insetti?

Non sembra che sia nota con certezza la causa di questi insoliti cicli vitali: certo è che l'ipotesi più diffusa tiene accuratamente conto della primalità di tredici e diciassette. La possibile spiegazione si basa sulla constatazione che se anche gli insetti "predatori naturali" delle cicale avessero un ciclo poliennale, diverrebbe cruciale per la magicicada evitare di trovarsi nello stadio adulto proprio quando anche i suoi predatori si trovano nella loro maturità, e non nell'inoffensivo stadio larvale. È allora facile intuire che rifugiarsi in un lungo ciclo di vita basato su un numero primo è un'ottima strategia: i predatori dai cicli di vita diversi da uno e diciassette anni non incontrerebbero presto le magicicade una seconda volta: ben

[1] Delaware, Georgia, Illinois, Indiana, Kentucky, Maryland, Michigan, North Carolina, New Jersey, New York, Ohio, Pennsylvania, Tennessee, Virginia e West Virginia.

[2] Non sappiamo se i coltivatori usino algoritmi mnemonici, ma probabilmente non ne hanno bisogno. L'unico che ci viene in mente al momento potrebbe essere il banale "aggiungi 2 all'anno, e verifica se il risultato è divisibile per 17: se lo è, rinforza le zanzariere".

[3] La "specie" non va confusa con il "gruppo" citato poco sopra.

[4] Se invece il primo commento che vi è venuto in mente è: "Proprio i numeri che portano fortuna o sfortuna!" c'è rischio che abbiate sbagliato rivista. Ma è solo un rischio, non una certezza.

diversa sarebbe, ad esempio, la situazione d'una cicala con ciclo di vita di dodici anni: tra uno stadio adulto e l'altro si ritroverebbe in tragica fase con i predatori caratterizzati da cicli di vita di due, tre, quattro e sei anni.

Forse, allora, si tratta davvero di una strategia evolutiva: una ESS (Evolutionary Stable Strategy)[5], e le strategie evolutivamente stabili hanno spesso bisogno di modelli matematici (usualmente ben più complessi del mero riconoscimento di 13 e 17 come numeri primi) per essere analizzate. Basti pensare alle affascinanti analisi sulla "Geometria del branco", in cui si analizza mediante ipotesi squisitamente spaziali e geometriche il moto di un banco di pesci sotto attacco; o, ancora meglio, quale importantissimo ruolo abbia il "problema del prigioniero" nelle teorie alla base della spiegazione della collaborazione tra individui della stessa specie[6]. La biologia sta rapidamente recuperando il tempo inizialmente perduto, e si ritrova sempre più spesso a chiedere aiuto alla matematica: e questo è (a nostro modesto e poco obiettivo parere) un gran buon segno. Anche perché in tempi non troppi remoti l'unico servigio che la matematica sembrava poter dare alle scienze della vita era quello trivialmente banale della mera quantificazione: la tal bestiola pesa tanto, il cuore dell'altro animaletto ha il tal volume, e così via. Una metrica che, con buona pace di Aristotele che definiva la matematica come la "scienza delle quantità", aveva in realtà pochissimo a che vedere con la matematica vera e propria[7].

Questo limbo caratterizzato dalla mera quantificazione delle proprietà animali è servito alle scienze biologiche anche per pagare il fio del proprio peccato originale: come l'astronomia copernicana ha costretto l'uomo ad un ruolo meno centrale dell'universo, spostandolo dal centro alla periferia del creato, anche le scienze della vita hanno fatto subire all'Homo Sapiens qualche delusione: fiero del suo cervello, c'è stato un tempo in cui l'uomo riteneva che la massa della sua materia grigia fosse senza rivali, nel mondo animale: del resto, un chilo e mezzo di encefalo rispetto alla sessantina di grammi di quello dello stegosauro era un ben forte segnale caratteristico della specie Homo; ed è indubbio che, in ultima analisi, l'elementare comparazione della quantità di materia grigia abbia la sua ragionevole importanza. Ne ha un po' meno l'esasperare il confronto alla ricerca di un record assoluto: oltre al pensiero creativo, un cervello ha anche un mucchio di altre operazioni da eseguire per garantire il buon funzionamento di un corpo, e quindi i 1300 grammi del cervello umano impallidiscono rapidamente di fronte ai sei chili del cervello dell'elefante. L'uomo però non rinuncia facilmente ad un primato così ambito come quello di "miglior cervello del regno animale", e tosto alcuni naturalisti hanno cominciato a supporre che, più che il semplice peso o volume della scatola cranica, potessero essere le circonvoluzioni e lo spessore dei solchi del cervello ad essere

---

[5] Acronimo e termine sono stati introdotti da Maynard-Smith e Price in un articolo del 1973: l'idea in sé è comunque più vecchia.

[6] Il celebre problema del prigioniero prende spunto e nome dalla situazione in cui due imputati (presunti complici) vengono arrestati e interrogati: ognuno dei due può "collaborare" (nel senso che può ammettere la propria colpa) o meno. L'idea alla base del problema presuppone che esistano premi e punizioni diversi in funzione non solo della propria scelta, ma anche in funzione della scelta dell'altro interrogato. Si va così dalla scelta egoisticamente peggiore (io ammetto la colpa, l'altro no) a quella egoisticamente migliore (l'altro ammette, io no), attraverso due situazioni intermedie: quella "cattiva" (entrambi non ammettiamo) e quella "buona" (ammettiamo entrambi, e otteniamo sconto di pena). In funzione del peso relativo dei premi/punizioni e, soprattutto, della reiterazione del problema nell'ambiente (poco probabile nel caso dei prigionieri, ma naturale nel caso della collaborazione fra animali), il dilemma del prigioniero si rivela una autentica chiave di lettura di alcuni comportamenti animali "apparentemente" altruistici. Ma per parlarne con un minimo di completezza occorre almeno una mezza dozzina di pagine, e quindi evitiamo ulteriori divagazioni in merito. (Come al solito, siamo estremamente sensibili alle richieste dei lettori: se la cosa vi incuriosisce, provate a lusingare Doc in proposito, e chissà…)

[7] Volutamente qui Doc ignora i Numeri di Fibonacci, calcolo interessante ma puramente teorico ambiguamente situato a metà tra l'incesto e la partenogenesi *[RdA]*.

particolarmente significativi. Da matematici dilettanti, notiamo di straforo che in fondo si tratta soltanto di un passaggio dalle tre alle due dimensioni: non si considera più il volume d'un solido, ma la sua superficie laterale[8]. Questa è però già una variazione sul tema, con poca audience al di fuori degli specialisti: i ricercatori del primato umano hanno invece segnato il loro punto migliore quando si sono lanciati nel "pesare percentualmente" il cervello rispetto al peso totale dell'animale: un rapporto pari a 0,02 come quello umano appare subito come assolutamente insuperabile, e in rete si trovano decine di grafici didattici che mostrano come l'elefante crolli così ad un misero 0,002, come il cane prenda un ruolo di rilevo con un brillante 0,012 anche se deve cedere di fronte allo 0,016 del sorprendente scoiattolo; il temuto delfino non va oltre un misero 0,003 e tutto sembra tornare a posto.

Poi è arrivato il toporagno a rompere le uova nel paniere: il suo terribile e inaspettato 0,03 ha fatto in modo che di "brain/body ratio" si cominciasse a parlare assai di meno (quantomeno da parte di coloro che lo mostravano con orgoglio come prova della superiorità dell'uomo: gli studiosi seri, come al solito, continuano a raccogliere i dati e ad analizzarli, senza sentirsi offesi neppure quando scoprono che anche alcuni pipistrelli ci fanno mangiare la polvere). Tutto questo, comunque, non è stato sufficiente per molti che si sono lanciati alla ricerca di ulteriori prove della superiorità umana. Il lato divertente della situazione è che in questa strana caccia alla "prova del primato" sono accomunati sia i seguaci di Darwin che quelli delle Sacre Scritture: la gran parte della divulgazione evoluzionistica lascia sottinteso, quando non direttamente e imprudentemente esplicitato, il primato evolutivo dell'Homo Sapiens, quasi fosse cosa del tutto evidente; e la Bibbia non mette minimamente in discussione il fatto che l'uomo sia superiore e proprietario di tutti gli altri esseri viventi. A questo punto è accaduto l'imprevedibile: molti creazionisti[9] contrari alle teorie dell'evoluzione hanno cercato (e cercano tuttora) di minare la biologia molecolare usando le medesime armi dei darwinisti. Cavalcando l'immagine dell'uomo come "vertice ultimo dell'evoluzione" (che è purtroppo propagandata spesso, chissà poi perché, anche da seri scienziati), alcuni gruppi che rifuggono l'idea dell'evoluzione delle specie hanno notato con stupore che l'uomo ha 46 cromosomi. È verosimile che non abbiano avuto nulla da obiettare fin quando hanno verificato che, per quanto riguarda il numero dei cromosomi, la rana si limita a 26 e il gatto ne conta 38; ma quando hanno scoperto che la mucca arriva a 60, il cavallo a 64 e il pesciolino rosso addirittura a 94 (per non parlare dell'imprevedibile e risibile ameba, che nella sua pur microbica e miserrima vita si perita comunque di arrivare a 50 cromosomi, ben 4 più dei nostri) hanno subito lanciato alto il grido d'allarme: questa conta dei cromosomi – urlano – è la prova evidente che gli evoluzionisti mentono! Lo scandalo parte dal presupposto che a maggior numero di cromosomi debba corrispondere un grado evolutivo più alto, e il fatto che equini e ruminanti ci superino, unito al fatto che gli evoluzionisti tenderebbero a nascondere la terribile cosa (sic!), è prova palese che la teoria dell'evoluzione è sbagliata. In questo istante ho a video una pagina web che strilla "Lying About Chromosomes", elenca la tavola dei cromosomi per diverse specie, e aggiunge dei commenti per rafforzare il principio

[8] Lungi da noi l'idea di essere troppo irriverenti in merito: conosciamo troppo poco dell'argomento per potercene concedere il lusso. Per quel che ne sappiamo, l'area totale delle meningi potrebbe davvero essere un parametro atto a spiegare la supposta superiorità del sistema nervoso centrale umano.

[9] RM non intende contestare il credo religioso (o l'assenza dello stesso) dei propri lettori. Di recente la contrapposizione tra evoluzionisti e creazionisti è salita agli onori delle cronache a causa della riforma scolastica, che in un primo momento sembrava voler ignorare le scoperte di Charles Darwin: noi vorremmo limitarci ad osservare, probabilmente commettendo anche peccato di ingenuità, che lo scoprire le regole che governano il mondo e l'universo non dovrebbe scandalizzare in alcun modo coloro che credono che il cosmo sia frutto di un disegno creativo e volontario. Tanto più complessa e affascinante si mostra essere la creazione, tanto più onore e gloria dovrebbero arrivare al suo eventuale creatore. A prescindere dalla fede che si ripone o meno nell'esistenza del suddetto.

dell'assurdità della teoria evoluzionistica: a fianco del primatista assoluto (una felce che stravince con 480 cromosomi) scrivono con evidente ironia "l'obiettivo finale"; a fianco di specie che hanno lo stesso numero di cromosomi (come l'alligatore e la cipolla, pari merito a 32) evidenziano l'assurdità commentando "gemelli identici!", e così via. Il semplice errore iniziale, quello implicito nel dare per scontato che la teoria dell'evoluzione presupponga che ogni specie abbia un diverso numero di cromosomi e che a maggior numero di cromosomi corrisponda un maggiore grado evolutivo, non li sfiora neppure. Questo palesa che non solo non conoscono la teoria dell'evoluzione, ma anche che ignorano cosa sia un cromosoma: e, cosa più inquietante per il cultori di matematica, mostra anche che il mondo tende ancora indiscriminatamente a confondere qualità e quantità. "Più è meglio" sembra ancora un motto imperante ovunque.

Le scienze della vita devono quotidianamente fare i conti con atteggiamenti del genere: gran parte della fortuna di Euclide, viene da pensare, discende forse dal fatto che è difficile identificarsi appieno con rette e poligoni; ma lo studioso cui sembra di riconoscere un buon grado di somiglianza tra noi e un gibbone ha ben altre gatte da pelare. Eppure, la biologia e l'etologia hanno un fascino intenso, anche a prescindere dai loro rapporti più o meno labili con la nostra amata scienza: rapporti che poi riescono a tornare, in maniera del tutto imprevista, anche per ragioni niente affatto numeriche. Non molto tempo fa, durante un talk-show radiofonico, si parlava della recente istituzione dell'obbligo di ottenere un patentino per i ragazzi che si muovono in ciclomotore: in maniera del tutto imprevista, la concione sull'opportunità o meno di organizzare dei corsi di educazione stradale nelle scuole per facilitare il conseguimento di tale documento è improvvisamente scivolata su argomenti meno pragmatici, anche a causa di un convenuto che giustificava su base socio-biologica la maggiore predisposizione ad avere incidenti stradali dei giovani rispetto agli adulti: l'esperto raccontava infatti che sembra esserci una causa evidente della "temerarietà giovanile", e identificava quest'ultima come il motore primario dell'evoluzione sociale. Senza l'incoscienza e il senso rivoluzionario di sfida dei giovani, tutte le società umane tenderebbero alla stagnazione e alla decadenza: ne conseguirebbe che tale impulso a sottovalutare i pericoli e a cimentarsi nelle competizioni sia del tutto naturale e, in ultima analisi, positivo per la specie[10] Homo Sapiens.

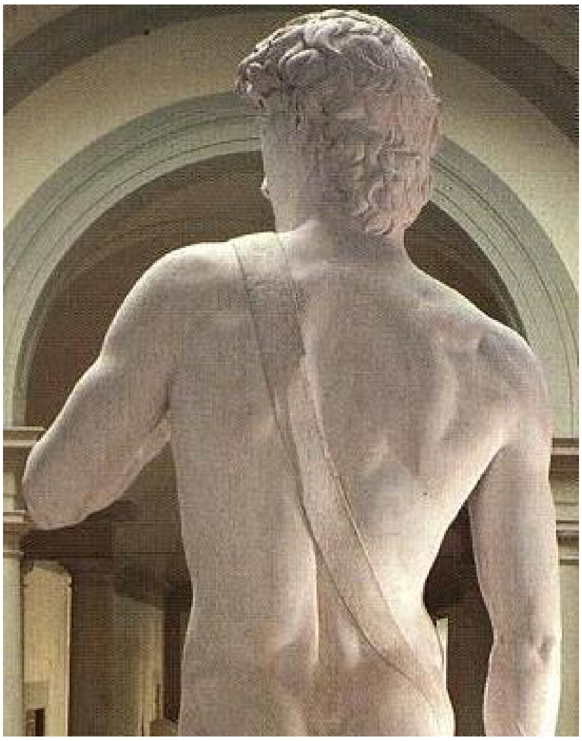
L'ipotesi è intrigante, e serve a spiegare quantomeno un centinaio di proverbi che asseriscono più o meno la medesima cosa: dal punto di vista della storia della matematica, il concetto sembra ben riassunto dalla frase che Godfrey Hardy disse quando si stava accingendo a scrivere la sua "Apologia di un Matematico": "I giovani a dimostrare teoremi, i vecchi a scrivere libri!". Sono stati versati i proverbiali fiumi d'inchiostro sulla relazione tra "creatività scientifica" ed età anagrafica, e anche se esistono diverse scuole di pensiero, la mera statistica sembra deporre a favore di coloro che come Hardy[11] ritengono che sia più probabile fare scoperte importanti nella scienza e nella matematica quando si è nel fiore degli anni: quantomeno, è facile immaginare che i giovani non abbiano paura di affrontare grandi imprese, mentre coloro che non sono più ragazzini potrebbero guardare con meno benevolenza i progetti a lungo termine. Detto ancora in altri termini, i giovani cavalcano il senso

---

[10] Anche se, a dar retta ad una scuola di genetisti, il premio immediato dovrebbe essere di natura squisitamente individuale e riproduttiva: in altre parole, alle pupe dovrebbe piacere di più il bulletto che sa far impennare il motorino di quello che si ostina a usare prudentemente la bicicletta *[PRS].* Anche questo aspetto è discutibile: le "pupe" tendono a flirtare con roboanti motociclisti, ma finiscono con sposare onesti ciclisti che si prendano cura dei loro figli, anche questo è dimostrato con aspetti Darwiniani di sopravvivenza della specie... c'è solo più da chiedersi di chi siano i figli... *[AR].*

[11] È notorio che uno degli sport preferiti dagli scrittori di saggi sia la citazione di opere proprie; da ciò discende naturale il rimando al "compleanno" dedicato a G.H. Hardy: "Stanlio e Ollio", RM49, Febbraio 2003.

della sfida anche perché spesso devono ancora decidere quale futuro costruirsi, mentre usualmente i meno giovani vedono diminuire le loro "variabili libere" nelle scelte di vita e di professione. Il punto essenziale è comunque quello che la "sfida" è un elemento importante: può essere canalizzata nel desiderio di diventare un attore, uno sportivo famoso, o il primo uomo a toccare la superficie di Marte. Quel che è certo è che non va mai sottovalutata, e men che mai considerata come immeritevole di rispetto: alla fin fine, anche il mondo di domani sarà pieno di attori famosi e di campioni sportivi, e prima o poi qualcuno farà davvero quattro passi sulla superficie del quarto pianeta.



Un mio buon amico ha esattamente trent'anni meno di me. Già per questo dato anagrafico si merita tutta la mia invida ma, come se questo non bastasse, in lui alberga già un senso di sfida caratteristico della sua età, che mi sembra assai prezioso. Si chiama Davide, e ha tutte le intenzioni di riuscire a dimostrare come si possa trisecare un angolo con riga e compasso. Davide sa che nessuno è mai riuscito a trovare la maniera di riuscirci, e i suoi (Davide ha la somma disgrazia di avere entrambi i genitori matematici) gli hanno già detto che nessuno è riuscito nella trisezione dell'angolo per la buona ragione che è stata dimostrata essere impossibile. Ma il punto cruciale sta tutto in questa parola: "impossibile". Avete mai notato le facce dei ragazzi che scoprono per la prima volta che non si può superare la velocità della luce? Certo, le espressioni variano in grande misura, e sono in relazione diretta con il loro personale interesse sull'argomento: è però certo che alla prima un'espressione pienamente stupita faccia rapidamente seguito un cipiglio sostanzialmente irritato: "E perché cavolo non si potrebbe superare?" chiedono subito. L'irritazione non sempre viene calmata quando si mostra loro la trasformazione di Lorentz, con la sua bella radice quadrata che immediatamente diventa radice di un numero negativo quando la "v" cresce al punto da superare la "c"[12]: e se ciononostante l'irritazione non si cheta, non è per mancanza di rispetto verso le equazioni o addirittura verso la Relatività di Einstein. È solo che un limite così brutale e deciso è davvero irritante e arrogante agli occhi di chi è ben pronto ad attraversare l'universo, se solo qualcuno si decidesse a mettergli a disposizione l'astronave adatta[13].

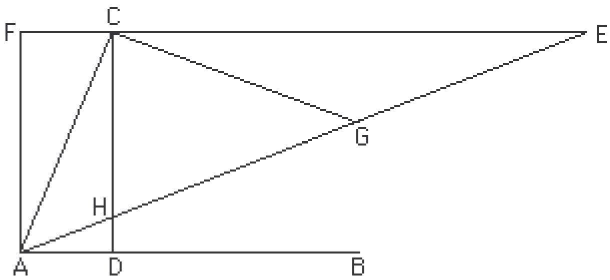
---

[12] Senza riportarle per intero, basti ricordare che le trasformate di Lorentz sono ben frequentate dal termine $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, che è il responsabile ultimo dell'impossibilità di superare i 300.000 chilometri al secondo.

[13] E poi riconosciamolo: la velocità della luce, su scala appena appena extraterrestre, è diabolicamente lenta. Non a caso tutti gli scrittori di fantascienza devono trovare degli escamotage per aggirare la cosa: su scala anche solo galattica (i viaggi extragalattici sono del tutto fuori discussione) è, commisurata ai tempi della vita umana, un perfetto analogo della catena del cane legato alla cuccia.

Così dev'essere la trisezione dell'angolo[14] per Davide: "Impossibile? Mah… e poi, insomma, chi lo ha detto? Come si fa a dimostrare l'impossibilità di una qualsiasi costruzione?". Già: come si fa? È intuibile che si possa trovare un errore in una presunta dimostrazione geometrica, ma come si fa a dimostrare che "tutte le possibili e immaginabili" costruzioni che mirano a dimostrare la fattibilità della trisezione dell'angolo sono sbagliate? E voi, che da tempo immemorabile "sapete" che trisecare un angolo con riga e compasso è impossibile, sapete anche il perché, o vi siete presto rifugiati nel poco scientifico alibi "qualcuno lo avrà dimostrato, e sono disposto a credergli sulla fiducia"?

Avere per conforto una cosa come le formule di Lorentz per comprendere l'impossibilità di viaggiare a velocità superiori a quella della luce non è, in fin dei conti, una consolazione assoluta, dal punto di visto psicologico: ma è comunque uno strumento, una piccola arma di difesa. E le piccole armi servono, in questi casi: in fondo, anche il celebre omonimo del mio amico, quel David che Michelangelo ha estratto dal marmo di Carrara e che manda in visibilio i cultori dell'arte rinascimentale e anche le fanciulle che del Rinascimento poco si curano, porta con sé la sua brava fionda: o credevate che quella striscia di marmo che gli attraversa la schiena fosse un cinturone da cow-boy? Anche il mio amico Davide ha bisogno almeno di una fionda, e la prima che mi trovo sottomano è questa qua:



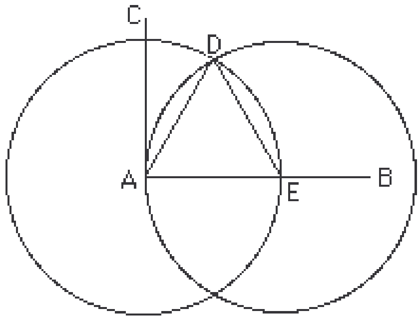
Dato l'angolo ***CAB***, si tracci la perpendicolare ***CD*** da ***C*** su ***AB***. Si costruisca ora il rettangolo ***CDAF***, e si prolunghi il lato ***FC*** fino al punto ***E***, dal quale si traccia il segmento ***AE***, che interseca ***CD*** in corrispondenza del punto ***H***. Il suddetto punto ***E*** è scelto in modo tale che valga la relazione ***HE=2AC***. Il premio finale che si ottiene da questa costruzione è che l'angolo ***EAB*** così ottenuto vale esattamente ***1/3*** dell'angolo originario ***CAB***. Et voila.

Il metodo è generale, e quindi, assumendo che tremila anni di matematica non siano passati invano, da qualche parte ci deve essere un trucco, o quantomeno una violazione delle regole. È una buona occasione per ripassare alcune delle regole fondamentali delle costruzioni della geometria euclidea: ad esempio, quella che ammette l'uso solo di riga e compasso. Il "compasso euclideo" è diverso da quello che si compra in cartoleria: è un compasso ideale che si può aprire ed usare agevolmente, ma che si "chiude" ineluttabilmente quando lo si solleva dal foglio: non lo si può usare, insomma, per riportare una lunghezza da un disegno all'altro. In altre parole, non possiamo usarlo per costruire un "regolo" con le tacche da usare per disegnare altre figure. In modo del tutto analogo, la "riga" è altrettanto diversa dal mezzo

[14] La primavera è stagione terribile, per chi fa matematica ricreativa: questo perché di solito il matematico dilettante ha anche un "lavoro normale" che procura meno diletto ma che richiede tempo ed energie, e di solito in primavera ne richiede in modo particolare. Può capitare (e infatti è capitato questo mese) che tutta la Redazione si sia trovata inguaiata in affari poco matematici ma molto impegnativi. E questo compleanno è (lo confessiamo), un maldestro tentativo di coniugare due esigenze diverse che era impossibile trattare compiutamente in maniera separata: da una parte c'era la necessità di scrivere il solito compleanno mensile, dall'altra quella di fornire a Davide un abbozzo di spiegazione sull'impossibilità di trisezione dell'angolo. Uscire dall'impasse è stata impresa possibile solo grazie a due eventi a bassa probabilità: il primo è una fortunata combinazione a probabilità 0,08333… di cui vi rendiamo conto nella nota a piè di pagina numero 21; il secondo evento discende invece dal fatto che RM ha già una sua bibliografia interna che stupisce gli stessi redattori (e questo fatto aveva probabilità, al momento della nascita della rivista, collocabile nella categoria "infima"): la Trisezione è argomento ricco e variegato, ma possiamo rimandarvi con orgoglio al PM del numero 32 di RM (settembre 2001) che è interamente dedicato all'argomento, e che ci prendiamo la libertà di definire "technical reference" indispensabile e propedeutica a quest'articolo.

metro di plastica che si trova negli zaini degli scolari: la riga greca non ha centimetri e decimetri riportati, è una pura riga nuda che serve solo a disegnare segmenti di retta, non a misurarli. È uno strumento semplice e povero, al punto che Lorenzo Mascheroni mostrò, nella sua "Geometria del Compasso", se ne poteva fare tranquillamente a meno. Questa rapida rilettura delle regole del gioco svela subito la falla nel metodo di trisezione su esposto: la scelta del punto E *"…fatta in modo che valga la relazione HE=2AC"* è scelta che viola le regole euclidee.

La trisezione dell'angolo è uno dei tre problemi della geometria classica, e dei tre è il meno famoso: la "quadratura del cerchio[15]" è così celebre da essere entrato nei modi di dire di quasi tutte le lingue per esprimere la miracolosa soluzione d'un problema (tanto miracolosa che non si riesce mai ad ottenerla), mentre la "duplicazione del cubo" ha dalla sua la leggenda basata sull'altare di Apollo a Delo[16], a renderla immortale: senza contare che nell'antica Grecia il problema della duplicazione del cubo era ritenuto di gran lunga più importante e significativo della quadratura del cerchio, che invece troneggia nelle preferenze dei matematici dilettanti dei tempi nostri. La "trisezione dell'angolo", invece, non ha leggende che lo rivestano di fascino mitologico, né il potere ipnotico della perfezione del cerchio (e di π) a renderlo invitante. Nulla sembra più semplice e meno evocativo di un generico angolo, e viste alcune delle costruzioni spettacolari della geometria euclidea, il fatto che non sia possibile dividerlo in tre angoli uguali sembra davvero un incidente di percorso. Altri elementi inducono poi a considerare la trisezione dell'angolo "diversa" dai due confratelli che parlano di quadrature e duplicazioni: in fondo, nessun cerchio, senza eccezioni, è quadrabile, così come nessun cubo, senza eccezioni, è duplicabile; ma "alcuni angoli" sono invece trisecabili, anche seguendo rigorosamente le regole euclidee. Ad esempio, è trisecabile l'angolo retto (vedi figura: la costruzione che parte dall'angolo retto ***CAB*** fino ad ottenere ***CAD*** pari a $\pi/6$ radianti non sembra aver bisogno di spiegazioni), ed è trisecabile anche $3\pi/20$ radianti (o 27°, se preferite i gradi): e questo rende la trisezione legata a doppio filo alla precisazione "trisecare un angolo ***generico***", che non è invece necessaria per gli altri due problemi.



Quello che ha in comune con gli altri problemi classici è comunque più significativo delle differenze; e in comune ha non solo la sua "impossibilità", ma anche il fatto che tale impossibilità discenda sostanzialmente dalla medesima causa. Tutte e tre le dimostrazioni dell'impossibilità dei tre[17] problemi classici della geometria euclidea sono infattii di natura algebrica e non geometrica, e orbitano attorno al concetto di "numero costruibile". Per comprendere cosa sia un numero costruibile, basta in fondo chiedersi che cosa si fa quando si mette una "coppia ordinata" su un piano cartesiano. Quando Descartes introdusse il piano che porta tuttora il suo nome,

[15] L'innocua domanda si può riassumere con: "dato un cerchio, costruire il lato del quadrato di area pari a quella del cerchio dato"

[16] Secondo la tradizione, gli oracoli avevano decretato che per ringraziare (o calmare) il dio, occorreva raddoppiare l'altare a lui dedicato, che era di perfetta forma cubica. Si scatenò una piccola diatriba sul significato di "raddoppiare" (raddoppiando lo spigolo del cubo, ad esempio, il volume sarebbe diventato otto volte più grande), e, forse per economia, si decise che il vaticinio si limitava a chiedere il raddoppio del volume. Lì cominciarono i dolori, perché il problema "dato un cubo di lato L, trovare il lato L' del cubo che abbia volume doppio rispetto all'originale" non era affatto semplice da risolvere.

[17] Tre, come detto e ripetuto, sono i "problemi classici" della geometria, ma questo non significa che siano solo tre i problemi legati alla costruzione di figure con riga e compasso: la costruzione (impossibile con riga e compasso) dell'ettagono regolare è un altro celebre rappresentante di questa famiglia di irriducibili.

celebrò di fatto il matrimonio tra le due branche maggiori della matematica dei suoi tempi, la geometria e l'algebra, e la scoperta è di tale importanza che ormai sembra addirittura scontata, fin troppo semplice e ovvia. Ma proviamo a considerare, per un attimo, cosa ci si richiede davvero di fare nel momento in cui vogliamo individuare sul piano cartesiano il punto di coordinate (x=1, y=2): in buona sostanza ci si aspetta che noi si percorra l'asse delle ascisse fino ad incontrare il punto "1"; identificare (o creare) la retta parallela all'asse delle ordinate che intercetta quel punto "1". Indi, ripetere l'operazione sull'asse delle ordinate tracciando la parallela all'asse delle ascisse che intercetta il punto y=2, e finalmente marcare col pennarello indelebile il punto di incontro delle due rette così costruite. Operazione estremamente semplice, ma che presuppone qualche postulato. Provate a ripetere l'operazione per identificare il punto ($x=\pi$, $y=2\pi$); il processo operativo è ovviamente sempre lo stesso, ma siete sicuri di riconoscere il fatidico punto $x=\pi$? È bene ricordare che π non è 3,14: 3,14 è 157/50, splendidamente razionale, e profondamente diverso da π: il valore esatto di π ci è "sostanzialmente" ignoto, e questa non è cosa da poco allorquando ci siamo impegnati a riconoscerlo lungo l'asse delle x. Nessuno mette in dubbio che possiamo approssimarlo assai bene, ma "intercettarlo con precisione" è cosa ben diversa. È importante notare, in questa esposizione assai "rude" com'è di solito rude e poco rigorosa ogni discussione su RM, che, almeno da un certo punto di vista, ammettere di non riuscire ad individuare π sull'asse delle ascisse significa già ammettere l'impossibilità di quadrare il cerchio[18]. Si potrebbe obiettare che anche l'individuazione di x=1 è stata data per scontata e non dimostrata, qualche riga fa, e non si vede ragione alcuna perché l'uomo, apparentato col gibbone menzionato in precedenza, dovrebbe avere la magica caratteristica di riconoscere sembra ombra di dubbio il punto x=1 per poi perdersi nell'individuazione di $x=\pi$.

Come al solito, le osservazioni che risalgono su verso le origini più profonde del discorso matematico finiscono con l'ancorarsi ai postulati, quelli che i matematici elencano ordinatamente all'inizio di ogni trattazione. Solo che quando si leggono all'inizio, i postulati sembrano solo un noioso e pedante elenco di ovvietà, mentre quando si ritorna a loro dopo aver navigato a lungo nel mare dell'incertezza mostrano, quantomeno, la lungimiranza dei grandi matematici che li hanno scritti. Euclide ha organizzato i suoi elementi in maniera stupefacente e mirabile; è quasi impossibile coglierlo in castagna, e non si perita di dimostrare, ad esempio, il teorema di Pitagora se prima non ha esposto per bene cosa si intende per "costruire un quadrato su un lato dato", perché tale costruzione è necessaria per la comprensione del teorema di Pitagora. E quando apre gli "Elementi", li apre introducendo i suoi postulati non dimostrabili: sembra ovvio, ormai, dire che "per due punti passa una sola retta", ma Euclide fa appello a ben due postulati, prima di lanciarsi in cotanta affermazione: spiega prima che, dati due punti del piano, si assume che sia sempre tracciabile il segmento che li unisce; poi assume che tale segmento sia prolungabile all'infinito. Descartes, nella creazione della geometria analitica, non è stato da meno: quando introduce le coordinate le associa "per postulato" ai numeri interi, e solo poi passa a dimostrare che anche altri numeri soddisfano le medesime caratteristiche degli interi. E questo è più di quanto ci serve per affermare che siamo in grado di "individuare" il punto x=1 nell'esempio precedente. In seguito, l'insieme dei numeri "costruibili" si allarga attraverso le usuali estensioni. In conclusione, si arriva all'importante definizione che statuisce: "Un numero è costruibile (con riga e compasso) se è una coordinata di un punto

[18] Questo perché è impossibile ottenere il lato del quadrato equivalente al cerchio senza far uso di π: dato un cerchio generico di raggio r, il lato che si intende "costruire" a partire da esso è ineluttabilmente pari a $\sqrt{2\pi r^2}$.

costruito con riga e compasso a partire dai punti aventi per coordinate numeri interi." Le generalizzazioni successive sono fondamentali: è lo stesso Descartes a dimostrare che ogni numero razionale è costruibile al pari degli interi, e che la radice quadrata di un numero positivo costruibile è ancora costruibile[19].

Il punto essenziale deve essere ben chiaro: non si tratta di mere definizioni, ma dello stabilire importanti proprietà. Nel momento stesso in cui una qualsiasi grandezza viene identificata come "non costruibile", allora si può esser certi che non v'è modo al mondo per costruire quella grandezza nello spazio euclideo con l'uso di riga e compasso. Mancano pertanto solo due passaggi a capire perché il triangolo non è trisecabile, perché il cubo non è duplicabile e perché il cerchio non è quadrabile: il primo passaggio consiste nel "trasformare" le operazioni geometriche di costruzione in altrettante equazioni esprimibili con gli usuali simboli dell'algebra, e il secondo passaggio nel dimostrare che tali equazioni implicano grandezze non "costruibili".

Il punto che costituisce la chiave di volta della risoluzione dei tre grandi problemi irrisolti della geometria classica si trova all'interno di una memoria del 1837 ("Ricerca sui modi per riconoscere se un problema di geometria può essere risolto con riga e compasso"), che recita: *"Tout nombre constructible x est racine d'un polynôme à coefficients entiers et le degré du polynôme minimal admettant x comme zéro est une puissance de 2"*[20]. Ogni numero costruibile è quindi algebrico, e per la precisione è tale da poter essere rappresentato, al più, con le quattro operazioni e con la radice quadrata. Viceversa, nessun numero non algebrico è costruibile, né lo è un numero algebrico che necessiti di polinomi, ad esempio, di terzo o quinto grado. Abbiamo già anticipato che la quadratura del cerchio è stata dimostrata impossibile proprio perché legata a grandezze "non algebriche", anche se storicamente questa dimostrazione fu la più tardiva delle tre. La trascendenza di π (e quindi la sua non-algebricità, e quindi la sua non-costruibilità) è stata dimostrata solo nel 1882 da Lindemann.

Cubi duplicati e angoli trisecati non arrivano ad implicare numeri trascendenti, ma finiscono comunque al di fuori delle maglie della rete dei numeri costruibili. Duplicare un cubo significa evidentemente dover trovare la radice cubica di due, e le radici cubiche cadono al di fuori della definizione di costruibilità. La trisezione dell'angolo è meno evidente, perché meno evidente è l'equazione che la sottende: in ultima analisi, la trisezione è governata dall'equazione $x^3 - 3x - 1 = 0$, ma forse è più istruttivo considerare il fatto che costruire un angolo equivale alla costruzione del suo coseno, e che la nota formula

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

mostra che $\cos x$ è variabile nuovamente definita da una cubica che sfugge alla definizione del teorema sopra riportato. Come prezioso effetto collaterale, però, l'equazione ci mostra anche perché alcuni angoli sono però trisecabili: sono quei valori di x per i quali l'equazione di terzo grado è riconducibile ad una di secondo: e come i ferrati in trigonometria sanno, le formule di bisezione e prostaferesi sono spesso d'aiuto nella riduzione del grado delle equazioni trigonometriche. Senza

---

[19] E in questa apparentemente innocua generalizzazione c'è nascosta un'intera tragedia: Pitagora e i suoi discepoli si trovavano perfettamente a proprio agio con i razionali, ma quest'estensione dichiara "costruibile" anche la diagonale del quadrato, che razionale non è, e che tolse il senno ai pitagorici.

[20] A beneficio di quelli che, come il sottoscritto, non usano il francese neanche per dire "champagne", perifrasiamo il concetto in italiano e con altri termini: un numero costruibile deve soddisfare un'equazione del tipo f(x)=0, laddove f è un polinomio avente per grado una potenza di due e i suoi coefficienti devono essere razionali. Inoltre, f(x) è dimostrata essere irriducibile, e questo comporta che il grado di ogni equazione soddisfatta da un numero costruibile deve essere divisibile per due.

addentrarci in troppi dettagli, basti notare che per $x=\pi/2$ radianti e $x=\pi$ radianti i coseni (e i loro cubi) si sciolgono in maneggevolissimi 0 e 1, palesando la loro possibilità di essere trisecati: e che gli angoli trisecabili trasmettono generosamente questa proprietà agli angoli pari alla loro metà e al loro doppio.

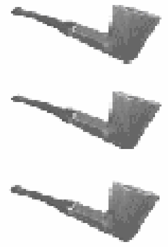
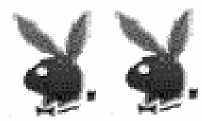
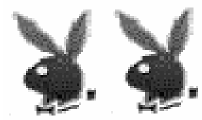
Il teorema che ci è servito per raggiungere questo risultato e la memoria che lo contiene sono stati pubblicati in Francia nel 1837 da un giovanotto di 23 anni. Pierre Laurent Wantzel nacque infatti a Parigi il 5 Giugno[21] 1814, proprio due giorni dopo la firma del trattato di Fontainebleau che attribuiva a Napoleone il possesso dell'Isola d'Elba. Figlio d'un militare che dopo sette anni sotto le armi passò ad esercitare il mestiere di professore di matematica applicata, mostrò spiccate doti matematiche fin dalla più tenera età. E per fortuna: come altri suoi famosi contemporanei, era destinato a vita breve. Morì infatti a soli 34 anni, nel 1848, e la sua esistenza è incastrata in un periodo storico (e in una città) talmente turbolento che quasi stupisce lo scoprirvi persone in grado di dedicarsi alla matematica. Era un ragazzo prodigio, ma il suo nome non è certo tra i più celebri del suo tempo; scrisse una ventina di memorie, e tra queste quella che contiene il teorema protagonista di quest'articolo, che è infatti noto come "Teorema di Wantzel". È lo stesso Pierre a riconoscere che l'idea cardine del suo teorema proviene dallo studio degli scritti di Abel, e dedica le sue successive ricerche alla risoluzione delle equazioni algebriche per radicali; come già fece il suo mentore, fornì nel 1845 una nuova prova dell'impossibilità di risolvere tutte le equazioni algebriche tramite radicali.

La sua scarsa notorietà, anche tra i cultori dei numeri, mostra che la matematica è madre generosa e crudele al tempo stesso: regala l'immortalità ai suoi figli, ma lascia sempre sé stessa in primo piano. I problemi sono più importanti delle soluzioni, le domande più importanti delle risposte.

Il continuare a cercare è più importante della quiete. È questo quello che vorrei cogliesse il mio amico Davide, armato di questa misera fionda che gli ho confezionato: molto più importante dell'impossibilità di trisecare l'angolo è il desiderio di riuscire a farlo. Per qualche oscura regola della natura, sembra che solo quelli che sono disposti a tentare l'impossibile riescono a ottenere traguardi importanti nel possibile.

[21] Assai benigno dev'essere lo spirito protettore dei matematici dilettanti: avevamo solo una probabilità su dodici che colui che dimostrò per primo l'impossibilità della trisezione dell'angolo fosse nato a Giugno, consentendoci di uscire dall'impasse descritto nella nota 14.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Tutta colpa di Doc...			
Maratona probabilistica			

Alice questo mese non ci ha nemmeno provato...

2.1 Tutta colpa di Doc...

...e dei suoi "Compleanni".

Ve lo ricordate, quello su Harald Bohr? Beh, il nostro Valente Estensore è riuscito a farci recuperare, dai meandri di un cervello piuttosto arrugginito (trattasi di quello di Rudy), un grazioso problemino, legato ai metodi balordi per contare i punti nei vari giochi.

Credo non abbiate problemi ad accorgervi che, se si conta di quindici in quindici (sorvoliamo sull'ultimo passaggio), ben difficilmente un set di tennis può finire dodici a ventidue; esistono dei punteggi che proprio non si possono fare, in alcuni giochi.

Ora, consideriamo una forma particolare di basket ("pallacanestro" non lo dice più nessuno...); si possono fare punti in *due* modi, con i "tiri liberi" o (passatemi il termine) in "partita viva" (questo lo consideriamo un caso unico, come nel "vecchio" basket). Ora, i tiri liberi ci danno "***a***" punti, mentre gli altri ce ne danno "***b***".

Proprio adesso vi hanno chiesto di arbitrare la Finale della Coppa Condominiale di Basket Balordo, e tutto quello che vi ricordate è che esistono *esattamente* ***35*** punteggi che una squadra non può fare, e che uno di questi punteggi impossibili è ***58***.

Siccome sugli spalti sono già cominciate le "ola", forse è meglio se trovate alla svelta i valori di ***a*** e ***b***...

2.2 Maratona probabilistica

Adesso non saltate su a dire "ma lo avete già fatto!" Lo sappiamo benissimo, ma la prima domanda ci serve per garantire la completezza formale.

Avete davanti tre scatole; vi è stato detto (e voi ci credete) che dentro ad una di quelle scatole ci sono mille euro. Ne scegliete una, e la vostra Nemesi (c'est moi: visto che citiamo i compleanni nell'altro problema, tanto vale farlo anche qui) vi dice "sei sicuro?" e apre una delle scatole che *non* avete scelto, che risulta vuota (*lui lo sa*, dov'è il premio...).

Allora, prima domanda: a questo punto, *se vi viene data la possibilità di cambiare la vostra scelta, cambiate?*

Ora, partiamo dal principio che abbiate trovato una strategia ragionevole per questo giochino; stufo di regalarvi i soldi in questo modo, vi propongo una variante. Stessa procedura, ma se non trovate i mille euro al primo giro, potete rigiocare con duemila euro nella scatola (e anche qui facciamo il giochino del "sei sicuro?").

Seconda domanda: *qual è la vostra strategia di gioco, in questo caso?*

Secondo me, state diventando un po' troppo ricchi a mie spese... Comincio a preoccuparmi, nel proporvi la terza versione. Qui, se sbagliate anche al secondo giro, avete una terza possibilità, con tremila euro in qualche scatola ("sicuro?").

E tre: *cosa fate in questo caso?*

3. Bungee Jumpers

Trovare quattro numeri naturali tali che il quadrato di ognuno di essi, quando viene sommato ai tre numeri restanti, dia sempre origine ad un quadrato perfetto.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

2004-05-02 10:42	Mistral - [064] – 1	
2004-05-02 18:47	BlackSky - [064] – 2	
2004-05-02 19:32	Luigi - [064] – 2	
2004-05-02 19:58	Zar - [064] – 2	
2004-05-03 14:46	Last Duke- [064] – 1	
2004-05-03 16:33	Sam - [064] – 1	
2004-05-03 17:40	Loba - [064] – 1&2	
2004-05-03 17:54	Stokastik - [064] – 2	La soluzione di Alcuino
2004-05-03 21:02	Delfo - [064] – 2	
2004-05-04 15:27	Mistral - [064] – 1	La versione finale
2004-05-05 11:11	Mash - [064] – 2	
2004-05-05 14:52	Jvanbie - [064] – 2	
2004-05-07 01:49	Torkitorio- [064] – Q&D	
2004-05-07 13:45	Diagonal - [064] – 2	
2004-05-11 01:08	Torkitorio - [064] – 2	
2004-05-11 04:38	Mistral - [064] – 2	
2004-05-12 12:07	Caronte - [059] – 1	
2004-05-14 01:19	Torkitorio - [064] – 1	
2004-05-19 02:44	Torkitorio - [064] – 1	La versione finale
2004-05-19 17:50	Sideranto - [064] – 1	
2004-05-21 13:11	Sideranto - [064] – 1	Un'estensione
2004-05-23 16:58	U_toki - [064] – 2	
2004-05-24 15:45	Pasquale- [064] – 2	

2004-05-24 19:05	Guido- [064] – 2
2004-05-28 19:13	Orso 3000 – [064] - 2

E di sicuro anche questa volta ne abbiamo persa qualcuna verso la fine, ma la Redazione potrebbe decidere di menzionare i ritardatari il mese prossimo.

4.1 [059]

4.1.1 Tre Dadi Duri (e tre sacchetti molli)

La premessa a questo corposo paragrafo sarà brevissima, ***Caronte*** ci ha ancora una volta bacchettato. Chiediamo solo perdono per aver maltrattato la sua punteggiatura a lui, e a tutti quelli che non si sono ancora lamentati delle riformattazioni e degli aggiustamenti di testi e formule. Come sapete il mago del "cut&paste" è capriccioso e maligno, anche se noi facciamo del nostro meglio. Pubblichiamo qui parte della sua lettera introduttiva e la sua versione del problema (vi sarete accorti dell'aggiunta nel titolo...), stiamo preparando una versione più integrale per il bookshelf.

> (...) Per inciso, segnalo un piccolo errore: il punto di intersezione delle tre rette del disegno di Last Duke (che è poi il centro di simmetria della regione interessante della figura, ma questo non risulta evidenziato) non è $(n/3,2n/3)$, ma $((n+1)/3,2(n+1)/3)$; ciò non influisce tuttavia sul risultato finale (il perché non lo so, dato che mi sono rifiutato di seguire i suoi calcoli, così come avevo rifiutato di affrontarli io stesso) o, meglio, sui risultati finali, che sono giusti.
>
> Nell'approccio di Last Duke, a parte la notevole complicazione dei calcoli necessari per arrivare ai risulati voluti, quello che è criticabile è il fatto che l'importante riconoscimento della necessità di considerare sei casi distinti non ha una giustificazione adeguata. E per me questo è il punto essenziale di tutto il discorso e quello che, se messo in chiaro, può portare ad una semplificazione sensibile, anche se non estrema (eliminando, se non altro, le sommatorie doppie), dei calcoli, come vedrete, se avrete la pazienza di seguire il mio approccio. (...)
>
> Lasciatemi riformulare il problema, assimilando i tre dadi duri ad ***n*** facce (identificate dai primi ***n*** numeri naturali e considerate come equiprobabili al lancio di un dado) a tre sacchetti molli, contenenti ciascuno ***n*** gettoni identici (numerati da 1 ad ***n*** ed aventi tutti la stessa probabilità di essere estratti), e, ovviamente, il lancio di un dado, con conseguente identificazione di uno particolare degli ***n*** numeri, all'estrazione di un gettone, e quindi di un numero, da un sacchetto. Questo mi dà il vantaggio di poter considerare anche i casi di ***n=0***, ***1***, ***2*** e ***3***, che sono valori non fisici per un dado ad ***n*** facce, dato che il più semplice solido a facce piane che può essere realizzato in uno spazio a tre dimensioni (come quello in cui, almeno apparentemente, viviamo) è un tetraedro che possiede ***4*** facce. Il vantaggio è notevole da un punto di vista teorico, dato che una formula matematica che fornisca una informazione valida per qualsiasi valore di ***n*** deve contenere anche le previsioni relative ad ***n=0***, ***1***, ***2*** e ***3***, e dal punto di vista pratico, perché considerare anche tali valori permette di faticare molto di meno, cioè di semplificare drasticamente i calcoli numerici. Il fatto, poi, di assimilare un dado duro ad un sacchetto molle mi permette di credere che lanciando un dado ad ***n*** facce, con ***n*** generico, la probabilità che il dado caschi su una determinata faccia (e questo è l'unico modo di selezionare univocamente una delle ***n*** facce del dado) sia effettivamente la stessa per ogni faccia, cosa che ritengo assai ardua da provare per un dado fisico con un numero arbitrario di facce, ma che possiamo accettare, come atto di fede, per un astratto dado teorico che soddisfi per definizione al postulato di equiprobabilità; la cosa può invece ritenersi scontata per un gettone estratto, tra ***n*** identici, da un sacchetto. Ciò premesso, mi adeguerò al linguaggio

utilizzato e continuerò a parlare di "dadì", in senso astratto, considerando quindi anche dadi a zero facce (non esistono facce e le probabilità sia di vincita che di perdita sono, per qualsiasi tipo di gioco, nulle: informazione matematicamente preziosa!), ad una, a due ed a tre facce.

Indicati con ***A***, ***B*** e ***C*** i tre dadi, si lanciano i dadi ***A*** e ***B***, e siano rispettivamente ***j*** e ***k*** i numeri da essi selezionati; visti tali numeri, ho la possibilità di scegliere uno qualsiasi dei tre dadi; lanciato il terzo dado ***C*** ed indicato con ***l*** il numero da esso selezionato, vinco se il numero associato al dado da me scelto è strettamente contenuto tra i numeri selezionati dagli altri due dadi, mentre perdo in tutti gli altri casi; per fissare le idee, supponendo, per esempio, di avere scelto il dado ***A***, vinco se ***k<j<l***, ovvero se ***l<j<k***. Il problema è: trovare la probabilità di vincita, massimizzando tale probabilità con una scelta oculata di uno dei tre dadi.

Se la scelta dei tre dadi fosse casuale, la risposta sarebbe quasi immediata, e la stessa che si avrebbe assumendo a priori la scelta del terzo dado (***C***). Infatti, considerando l'insieme dei tre dadi, il numero degli eventi (o casi) possibili, cioè il numero delle possibili terne ***(j,k,l)***, è n^3 (uguale al numero D'_{n3} delle disposizioni con ripetizione di ***n*** numeri a ***3*** a ***3***), mentre il numero di casi in cui è possibile che il valore scelto sia compreso tra gli altri due è quello delle terne con elementi tutti diversi tra loro, che è uguale a $n(n-1)(n-2)$, il numero D_{n3} delle disposizioni di ***n*** elementi a ***3*** a ***3***, e di queste solo un terzo realizzano la condizione che sia proprio il numero da me scelto ad essere compreso tra gli altri due. Dunque la probabilità di vincita, in caso di scelta casuale, è

$$P(n)=\frac{1}{3}\frac{D_{n3}}{D'_{n3}}=\frac{(n-1)(n-2)}{3n^2},$$

risultato noto e fornito in modo brillante da GaS.

Però, purtroppo per la semplicità dei ragionamenti e dei calcoli e fortunatamente per le possibilità di vincita, la scelta del dado non deve essere casuale, ma meditata, in modo da massimizzare la probabilità di vincita, e questo complica notevolmente, per ***n*** arbitrario, il calcolo del numero di casi favorevoli, numero che vorremmo poter esprimere in modo tale da fornire la probabilità ***P(n)*** cercata con un'unica formula, valida per ogni valore di ***n***, come già nel caso della scelta casuale di un dado (equivalente a quella forzata del terzo dado). Poiché le possibili terne di numeri ***(j***, ***k***, ***l)*** ottenibili col lancio dei tre dadi sono n^3 e quelle favorevoli solo una parte di queste, è certo che il numero di casi favorevoli, che indicheremo con ***F(n)***, deve essere esprimibile con un polinomio di terzo grado (al più) in ***n***. Ora, è facile rendersi conto che un unico polinomio di terzo grado che fornisca ***F(n)*** per ogni valore di ***n*** non esiste; infatti, se tale polinomio esistesse, esso dovrebbe annullarsi sia per ***n=0***, che per ***n=1***, che per ***n=2***, casi in cui le possibilità di vincita sono palesemente nulle; ma gli unici polinomi di terzo grado che abbiano tale caratteristica sono proporzionali a $n(n-1)(n-2)$ e quindi dovrebbe essere

$$F(n)=\alpha n(n-1)(n-2). \qquad \texttt{[004.001]}$$

Ma, se questa fosse la formula esatta, per fissare $\boldsymbol{\alpha}$ basterebbe confrontare i due membri per un valore di ***n*** per cui ***F(n)*** sia noto; verificato che per ***n=3*** il numero di casi favorevoli è uguale a ***6*** (per ognuna delle sei coppie ***(j,k)*** con $j \neq k$ esiste un solo valore di ***l*** che fornisce un caso favorevole), la `[001]` ci dice che dovrebbe essere ***6=6***$\boldsymbol{\alpha}$ e quindi $\boldsymbol{\alpha}$***=1*** e

$$F(n)=n(n-1)(n-2); \qquad \texttt{[004.002]}$$

ma questa relazione cade immediatamente in difetto già per ***n=4***, caso in cui il numero di casi favorevoli è ***18***, mentre il secondo membro della `[002]` vale ***24***.

Il polinomio che esprime ***F(n)*** deve quindi essere un polinomio di terzo grado in ***n*** con almeno un coefficiente dipendente da ***n***; con maggior precisione, questo vuol dire che occorre suddividere gli infiniti insiemi di tre dadi ad ***n*** facce in un certo numero di classi aventi le stesse caratteristiche, in modo tale che un'unica formula fornisca il numero di casi favorevoli per tutti gli elementi della classe; questo implica il suddividere l'insieme dei numeri naturali ***n*** in un certo numero di sottoinsiemi, in corrispondenza biunivoca con le classi degli insiemi dei dadi. Il primo problema da risolvere è quindi quello della determinazione di queste classi e dei corrispondenti sottoinsiemi di numeri. A tal fine è necessario, per prima cosa, definire la scelta del dado che massimizza le probabilità di vincita, cioè il numero di casi favorevoli (CF). Cominciamo allora con l'osservare che, una volta lanciati i dadi ***A*** e ***B***, delle n^2 coppie ***(j,k)*** possibili, le ***n*** coppie con ***j=k*** sono inesorabilmente perdenti e che pertanto i casi favorevoli devono essere associati alle rimanenti $n(n-1)$ coppie con $j \neq k$; che per metà di queste si ha ***j<k*** e per l'altra metà ***j>k*** e che il numero di CF associati a ***j<k*** è uguale al numero di CF associati a ***k<j***. Pertanto quello che ci proponiamo di calcolare è il numero

$$\phi(n) = \frac{1}{2}F(n) \qquad \texttt{[004.003]}$$

che rappresenta il massimo di CF associati a tutte le coppie di numeri ***j***, determinato dal lancio di ***A***, e ***k***, determinato dal lancio di ***B***, con ***j<k***. Vediamo ora dunque quali degli ***n*** possibili valori di ***l***, ottenibili tirando il dado ***C***, producano casi favorevoli, in funzione delle tre possibili scelte. Scegliendo il dado ***A***, gli ***l*** favorevoli sono quelli minori di ***j***, in numero di $j-1\ (l = 1,2,\ldots, j-1)$; scegliendo ***B***, sono quelli maggiori di ***k***, in numero di $n-k\ (l = k+1, k+2,\ldots, n)$; scegliendo ***C***, sono quelli compresi tra ***j*** e ***k***, in numero di $k-j-1\ (l = j+1, j+2,\ldots, k-1)$. Per massimizzare il numero di casi favorevoli devo dunque scegliere[22]:

il dado ***A*** se $j-1 > n-k$ e $j-1 > k-j-1$,

il dado ***B*** se $n-k > j-1$ e $n-k > k-j-1$,

il dado ***C*** se $k-j-1 > j-1$ e $k-j-1 > n-k$.

La scelta di ***A*** e ***B*** dà palesemente lo stesso numero massimo di CF se

$$j-1 = n-k \text{ e } j > \frac{n+1}{3} \Leftrightarrow k < 2\frac{n+1}{3};$$

quella di ***A*** e ***C*** è parimenti indifferente se

$$j-1 = k-j-1 \Rightarrow k = 2j \text{ e } j > \frac{n+1}{3} \Leftrightarrow k > 2\frac{n+1}{3}$$

e quella tra ***B*** e ***C*** conduce a sua volta allo stesso numero massimo di CF se

$$n-k = k-j-1 \Rightarrow 2k = n+j+1 \text{ e } k < 2\frac{n+1}{3} \Leftrightarrow j < \frac{n+1}{3}.$$

[22] Questo è quello che nei commenti relativi al problema dei tre dadi duri viene indicato come "la strategia del GC".

È infine indifferente scegliere sia ***A*** che ***B*** che ***C*** se

$$j-1=n-k=k-j-1 \Rightarrow j=\frac{n+1}{3} \text{ e } k=2\frac{n+1}{3};$$

quest'ultimo caso può verificarsi, ovviamente, solo se ***(n+1)/3*** è un numero intero, cioè per ***n=2***, ***5***, ***8***, ***11,...*** ovvero, altrimenti detto, ***n=3s+2*** (***s*** intero) ovvero ancora, con altra notazione, ***n=2***, ***mod 3***.

Una volta definita la scelta da fare, il compito che ci attende è la valutazione, per ***n*** arbitrario, del numero di casi favorevoli corrispondenti ad ognuna delle $n(n-1)/2$ coppie ***(j,k)*** considerate. Cominciamo, a tal fine, con l'osservazione banale che, essendo per ipotesi ***j<k***, i valori che ***j*** può assumere vanno da ***1*** ad ***n-1***, mentre quelli che può assumere ***k*** vanno da ***2*** ad ***n*** ed immaginiamo di disporre in modo ordinato le $n(n-1)/2$ coppie ***(j,k)*** sui punti di un reticolo triangolare, avente ***n-1*** punti per lato, secondo lo schema indicato in ***Figura 1***.

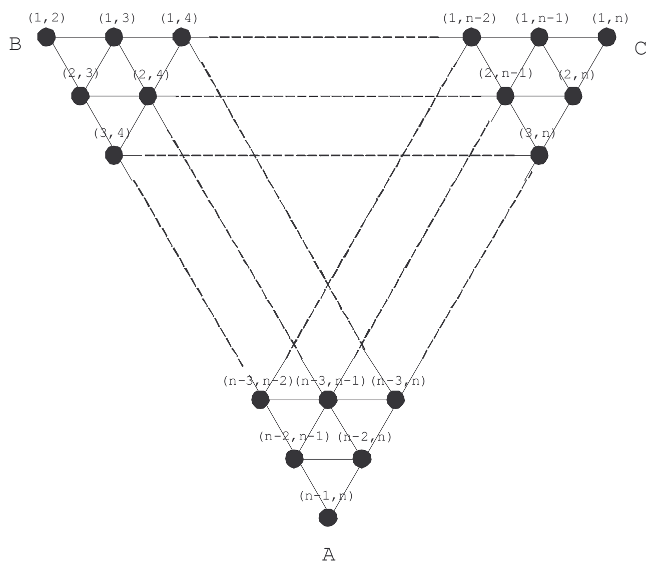


Figura 1: Reticolo per "n" generico

Riportiamo qui di seguito (***Figura 2***) i primi ***6*** reticoli che si possono costruire, quelli per ***n=3***, ***4***, ***5***, ***6***, ***7*** e ***8*** (omettendo, per semplicità grafica, parentesi e virgole nell'identificazione delle coppie, visto che nei casi considerati non sono possili confusioni) che possono servire per rendere più evidenti alcune caratteristiche generali e cui faremo inoltre riferimento esplicito per i calcoli numerici che faremo.

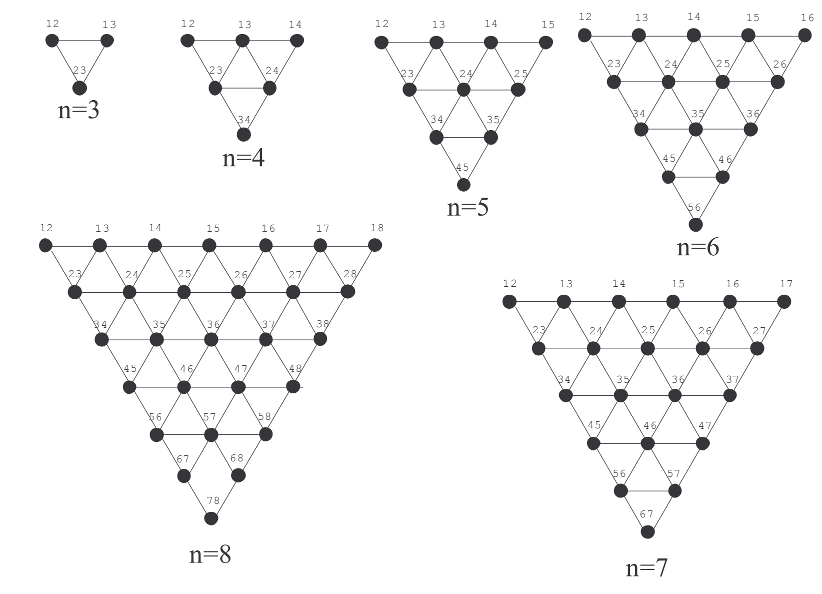


Figura 2: Reticoli per n=3, 4, 5, 6, 7 e 8

Considerando il reticolo relativo ad un valore generico di ***n*** (e con uno sguardo ai vari casi particolari), è immediato rendersi conto che le tre coppie ***(j,k)*** situate nei tre vertici del reticolo sono quelle che forniscono il massimo numero possibile di CF, uguale ad $n-2$, per una specifica scelta di uno dei tre dadi. Precisamente: il vertice ***(1,2)*** dà $n-2$ CF per la scelta di ***B*** (mentre nullo è il numero di CF per le scelte di ***A*** e di ***C***), il vertice ***(1,n)*** dà lo stesso numero di CF per la scelta di ***C*** (e ***0*** CF per le altre scelte) e, infine, il vertice $(n-1,n)$ li dà per la scelta di ***A*** (con ***0*** CF per ***B*** e ***C***). Indicheremo pertanto i tre vertici con le stesse lettere del dado da privilegiare e quindi il vertice in cui sta la coppia ***(1,2)*** sarà il vertice ***B***, eccetera. Se ***n*** è sufficientemente grande, il reticolo palesa delle proprietà peculiari che servono ad evidenziare facilmente la scelta che massimizza il numero di casi favorevoli relativi ad una generica coppia ***(j,k)*** ed il valore di tale numero. Partendo da uno qualsiasi dei vertici e spostandosi di un passo sul reticolo si incontrano due coppie ***(j,k)*** che forniscono ancora il massimo numero di CF per la stessa scelta del dado fatta per il vertice, ma tale numero risulta diminuito di una unità (e quindi uguale ad $(n-3)$). Facendo un secondo passo sul reticolo, allontanandosi maggiormente dai vertici (in qualsiasi direzione), si raggiunge, in corrispondenza di ogni vertice, una terna di coppie ***(j,k)*** che forniscono, sempre per la stessa scelta del dado che caratterizza il vertice, lo stesso CF, che risulta ancora diminuito di un'unità (e quindi uguale ad ***n-4***); ogni terna è situata su tre punti del reticolo che giacciono su un segmento parallelo al lato opposto al vertice di partenza. Continuando così, sempre che ***n*** sia grande a sufficienza, man mano che ci si allontana da ogni vertice si incontrano, di passo in passo, multipletti di coppie ***(j,k)***, costituiti da un numero di elementi crescente via via di un'unità e giacenti su segmenti paralleli tra loro ed al lato opposto, cui è associato lo stesso numero massimo di CF, sempre per la stessa scelta del dado fatta per il vertice di partenza, essendo tale numero via via diminuito di un'unità.

Viene istintivo a questo punto associare ad ogni reticolo un semplice grafo, mettendo in corrispondenza le coppie del reticolo coi punti del grafo, associando a questi una molteplicità che uguaglia il numero massimo di CF relativo alla coppia corrispondente e collegando tra loro con dei segmenti i punti aventi la stessa molteplicità. Per semplificare la grafica, segneremo solo i punti estremi di tali segmenti, con associata la loro molteplicità, mentre sul segmento riporteremo il numero di punti del grafo che stanno su tale segmento, pari al numero di coppie che possiedono la stessa molteplicità. Per quanto riguarda la parte del reticolo fino ad ora esaminata, la struttura del grafo ad essa associata è, per ***n*** generico, ma sufficientemente grande, del tipo riportato in ***Figura 3***.

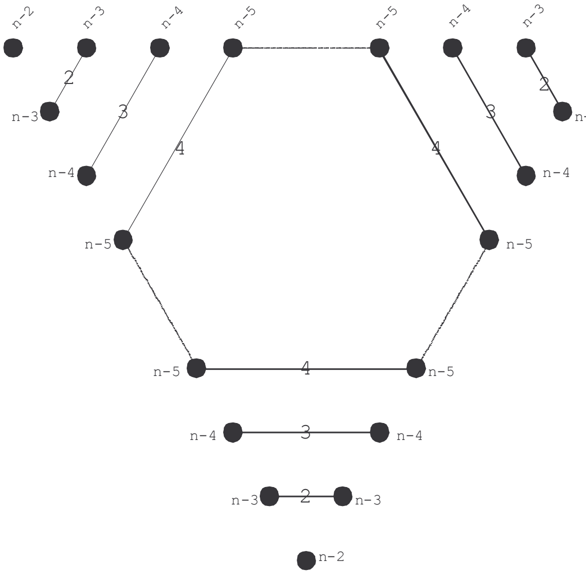


Figura 3: Grafo per "n" generico

Il grafo presenta una palese simmetria, rispetto allo scambio dei tre vertici, che rispecchia la sostanziale identità dei tre dadi e delle possibili scelte per massimizzare le probabilità di vincita; inoltre mostra chiaramente che l'associazione di un punto ad un vertice (ovvero di una coppia ad un dado) è determinata dalla vicinanza del punto al vertice stesso: la molteplicità di un punto è determinata dal vertice più vicino.

Dobbiamo ora esaminare la parte più interna del reticolo, che è quella che ci permetterà di costruire la parte più interessante del grafo, quella centrale, e di differenziare tra di loro i vari tipi di grafi a seconda dei valori di ***n*** e quindi di classificarli, di collocarli cioè in un certo numero di classi, intendendo per classe l'insieme dei grafi che possiedono le stesse caratteristiche; i grafi di una stessa classe corrisponderanno allora ad un sottoinsieme dei numeri ***n*** per cui le probabilità ***P(n)*** cui siamo interessati (ovvero i numeri di CF $\phi(n)$ e ***F(n)***) saranno dati da un'unica formula. Cominciamo con l'osservare che il processo di allontanamento dai vertici, con associazione al vertice più vicino degli elementi raggiunti, può continuare solo fino a che non si sia raggiunta la metà di un lato; e qui occorre fare una prima distinzione tra i grafi, a seconda che il punto

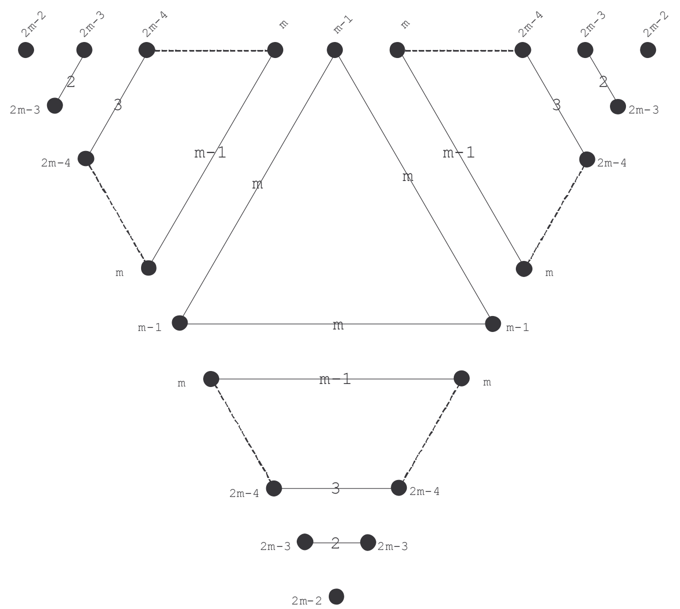


Figura 4: Grafo per n=2m

centrale dei lati (che, ricordiamo, posseggono $(n-1)$ punti) appartenga al lato oppure no. Questo ci porta ad una prima distinzione tra i numeri $\boldsymbol{n}$ a seconda che siano pari o dispari. Nel primo caso, di $\boldsymbol{n=2m}$, $\boldsymbol{m}$ intero, il numero dei punti appartenenti ad un lato è dispari $(2m-1)$ e quindi il punto centrale del lato appartiene al grafo (è l'$\boldsymbol{m}$-esimo punto dal lato). Considerando, per esempio, il lato ***BC***, che nel nostro grafo è quello orizzontale, $m-1$ punti stanno alla sua sinistra, e la loro molteplicità è determinata dal vertice ***B***, ed $m-1$ punti stanno alla sua destra, e la loro molteplicità è determinata dal vertice ***C***; quella del punto centrale, equidistante da ***B*** e ***C***, è determinata indifferentemente dall'uno o dall'altro vertice e risulta uguale a $m-1$. Naturalmente, data la perfetta simmetria del grafo per lo scambio dei vertici, per gli altri lati vale un discorso identico a quello appena fatto, salvo lo scambio del nome del vertice, importantissimo per l'utilizzazione pratica di queste considerazioni (cioè per massimizzare effettivamente le probabilità di vincita in fase di gioco), ma inessenziale al fine del computo della probabilità cercata, cioè del numero totale di CF. I punti centrali dei tre lati risultano collegati tra loro ed a tutti i punti del reticolo aventi la stessa molteplicità $m-1$ (uguale alla molteplicità $2m-2$ dei vertici diminuita del numero $m-1$ dei passi effettuati per raggiungere il centro dei lati). I tre segmenti, equidistanti dai tre vertici, che uniscono i punti con uguale molteplicità si sono a questo punto saldati a formare un triangolo con $\boldsymbol{m}$ punti per ogni lato (in numero pari ad ***1*** più il numero di passi effettuati). I vertici di tale triangolo, punti medi dei lati, sono, come già detto, punti di scelta indifferente per due dei tre dadi, mentre la molteplicità assegnata ai rimanenti punti appartenenti ai lati è sempre associata al vertice più vicino (si veda la ***Figura 4***).

È opportuno qui segnalare che per il conteggio dei CF occorrerà fare una certa attenzione perché, mentre nelle situazioni precedentemente considerate esistevano tre segmenti equivalenti disgiunti e quindi, se ad ogni segmento appartenevano $\boldsymbol{p}$ punti, ciascuno con molteplicità $\boldsymbol{r}$, il numero totale di punti con molteplicità $\boldsymbol{r}$ era ovviamente ***3p***, questo diventa $3p-3 \equiv 3(p-1)$ nel caso in cui i tre segmenti siano saldati a formare un triangolo.

Se ora nel grafo ci spostiamo ancora (da ognuno dei punti appartenenti al triangolo appena considerato) di un passo verso il centro, incontriamo un punto appartenente a sua volta ad un triangolo, concentrico al precedente e formato da punti aventi tutti la stessa molteplicità (inferiore di una unità rispetto a quella del punto da cui ci si è mossi e quindi uguale ad $m-2$) e con ogni lato costituito da un numero di punti inferiore di ***3*** unità a quello del triangolo precedente (nel caso specifico, quindi, da $m-3$ punti); i suoi vertici risultano nuovamente equidistanti da due vertici del grafo e sono quindi associati a coppie ***(j,k)*** per cui la scelta di due dadi è indifferente, mentre per i punti interni ai lati la molteplicità è sempre determinata dal vertice più vicino. Continuando a muoversi verso il centro, sempre che $\boldsymbol{n}$ sia sufficientemente grande, si incontrano via via triangoli concentrici sempre più piccoli (con il numero di punti per lato diminuito di ***3*** unità ad ogni passo, ogni punto avente una molteplicità diminuità di una unità per passo), fino a raggiungere un triangolo centrale che può essere costituito da ***3*** o ***6*** o ***9*** punti (rispettivamente ***2*** e ***3*** e ***4*** punti per lato); nei primi due casi all'interno dell'ultimo triangolo raggiunto non esistono più punti del grafo, mentre nel terzo all'interno dell'ultimo triangolo raggiunto esiste ancora un punto appartenente al grafo che ne è il centro (equidistante dai tre vertici) e rappresenta dunque una coppia ***(j,k)*** per cui è indifferente la scelta di ognuno dei tre dadi.

Nel caso considerato di $\boldsymbol{n}$ pari, $\boldsymbol{n=2m}$, abbiamo quindi tre categorie di grafi, diversificate dal loro "centro" che può essere costituito o da un triangolo formato da sei punti o da un triangolo formato da tre punti o da un unico punto. Poiché il centro viene raggiunto, partendo da un triangolo con ***m*** punti per lato, con passi successivi che comportano la diminuzione di tre punti per lato per ogni passo, è chiaro che il tipo di centro è determinato dallo specifico valore del numero ***m*** considerato e precisamente che occorre distinguere tre casi:

$$m = 3q \quad \Rightarrow \quad \text{centro con 3 punti per lato,}$$
$$m = 3q + 2 \quad \Rightarrow \quad \text{centro con 2 punti per lato,}$$
$$m = 3q + 1 \quad \Rightarrow \quad \text{centro costituito da un unico punto.}$$

Per ***n*** pari, dunque, si hanno tre classi di grafi,

$$n = 6q \quad \Rightarrow \quad \text{triangolo centrale di 6 punti,}$$
$$n = 6q + 4 \quad \Rightarrow \quad \text{triangolo centrale di 3 punti,}$$
$$n = 6q + 2 \quad \Rightarrow \quad \text{centro costituito da un unico punto.}$$

Ovviamente, per ***q=0*** il grafo corrispondente non esiste nel primo nè nel terzo caso.

Nel caso di ***n*** dispari, ***n=2m+1***, la differenza essenziale rispetto al caso di ***n*** pari è che ora il punto centrale dei lati del grafo non appartiene al grafo; sui lati non esiste alcun punto che corrisponda ad una scelta equifavorevole di due dadi. Il grafo possiede ugualmente una struttura centrale, formata da triangoli concentrici, dello stesso tipo di quella appena esaminata, ma il primo triangolo che si incontra, muovendosi dai lati del grafo verso il centro, ha i propri vertici situati nei punti centrali dei primi segmenti paralleli ai lati del reticolo ed interni ad esso (formati da $2m-1$ punti) (si vega ***Figura 5***).

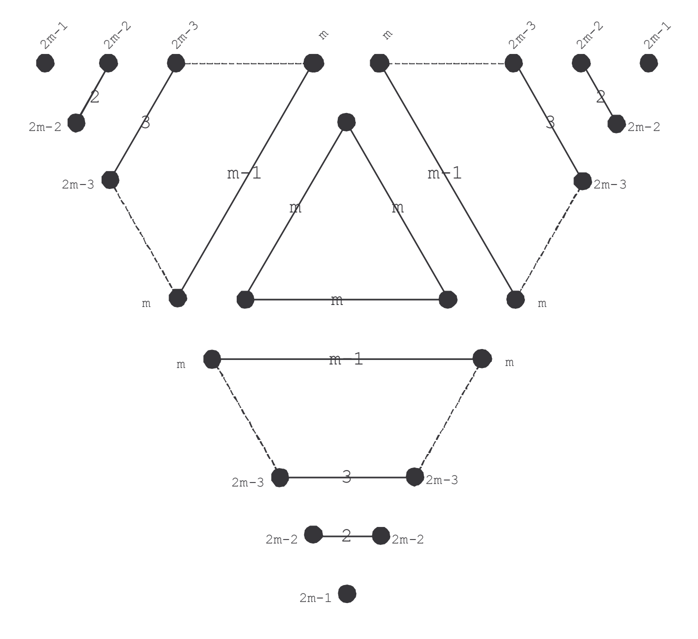


Figura 5: Grafo per n=2m+1

Il primo triangolo della struttura interna ha ora $m-1$ punti per lato ed ogni punto ha molteplicità $m-1$; spostandosi verso il centro i triangoli che si incontrano via via hanno sempre un numero di punti per lato che decresce di tre unità ad ogni passo, mentre la molteplicità di tali punti decresce di una unità per passo. Il centro del grafo potrà di nuovo essere costituito o da un triangolo di ***6*** punti (***3*** per lato) ovvero da un triangolo di ***3*** punti (***2*** per lato) ovvero ancora da un unico punto, secondo la corrispondenza:

$$m = 3q \quad \Rightarrow \quad \text{centro con 2 punti per lato,}$$
$$m = 3q + 2 \quad \Rightarrow \quad \text{centro di un unico punto,}$$
$$m = 3q + 1 \quad \Rightarrow \quad \text{centro con 3 punti per lato.}$$

Anche per ***n*** dispari, dunque, si hanno tre classi di grafi:

$n = 6q + 1 \quad \Rightarrow \quad$ triangolo centrale di 6 punti,

$n = 6q + 3 \quad \Rightarrow \quad$ triangolo centrale di 3 punti,

$n = 6q + 5 \quad \Rightarrow \quad$ centro costituito da un unico punto.

Mettendo insieme quanto visto a proposito di ***n*** pari ed ***n*** dispari, possiamo dunque concludere che esistono 6 classi di grafi associati ai 6 sottoinsiemi dei numeri naturali costituiti dai numeri[23]

$$n_i = 6q + i, \quad q = 0,1,2,\dots, \quad i = 1,2,3,4,5$$

Per ognuno di questi sottoinsiemi deve esistere una una formula unica, valida per tutte le terne di dadi con n_i facce, con ***i*** prefissato, che fornisca la probabilità di vincita $P(n_i)$, deve cioè esistere un polinomio di terzo grado in n_i, determinato in modo univoco, che fornisca il numero di casi favorevoli per ogni possibile valore di n_i. Lo studio dettagliato delle 6 classi di grafi che abbiamo determinato ed esaminato in precedenza ci fornisce una strada sicura per la determinazione dei polinomi $\phi(n)$ relativi ad ogni classe: si tratta di trovare, per ogni tipologia di grafo, caratterizzata dalla particolare classe, la somma delle molteplicità di tutti i punti costituenti il grafo. La cosa è semplicissima del punto di vista concettuale, ma un po' meno da quello pratico, in quanto i calcoli relativi pretendono una certa attenzione ed una buona dose di pazienza. Prima di affrontarli vediamo dunque se è possibile cercare di ottenere i risultati voluti riducendo lo sforzo necessario.

Abbiamo già visto che il numero di casi favorevoli $\phi(n)$, associato al grafo relativo a dadi con un numero ***n*** generico di facce, deve essere esprimibile con un polinomio di terzo grado in ***n***, i cui coefficienti non possono essere tutti indipendenti da ***n***, in quanto $\phi(n)$ deve essere in grado di distinguere le sei classi di grafi (ovvero i ***6*** sottoinsiemi di numeri naturali n_i). A tal fine è sufficiente che un unico coefficiente differenzi tra loro i polinomi $\phi(n_i)$ e l'ipotesi più semplice è che, se ciò è vero, tale coefficiente sia il termine noto. In effetti è praticamente scontato che il coefficiente del termine cubico sia lo stesso per ogni $\phi(n)$, perché il $\lim_{n\to\infty} P(n) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{F(n)}{n^3} \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{2\phi(n)}{n^3}$ non può dipendere dal sottoinsieme di numeri n_i considerato per effettuare il limite, ed è plausibile che anche i coefficienti di n^2 e di ***n*** siano gli stessi. Proviamo dunque a vedere se possa essere adatto ad esprimere $\phi(n)$ per ogni valore di ***n*** un polinomio del tipo

$$\phi(n) = an^3 + bn^2 + cn + d_n \qquad \textbf{[004.004]}$$

con $d_n = d_{n+6}$ determinato dalla classe cui appartiene il grafo associato ad ***n*** e ***a***, ***b*** e ***c*** coefficienti universali. Se ciò è vero (come sarà verificato a posteriori) la determinazione di tutti i polinomi $\phi(n)$ dipende dalla conoscenza di ***9*** numeri, i ***6*** valori di d_n per ***n=0***, ***1***, ***2***, ***3***, ***4***, ***5*** e quelli dei tre coefficienti universali ***a***, ***b*** e ***c***. Si tratta allora di sfruttare ***9*** informazioni per determinarli, cioè di utilizzare la

[23] A questa conclusione l'ultimo duca arriva con la folgorante asserzione:*"giocando un po' con questo grafico, variando la* **n**, *si è visto che, dal momento che è necessario ottenere valori interi per le variabili, bisogna differenziare i casi modulo 6*". Mi piacerebbe sapere quale è il tipo di gioco che ha giocato!

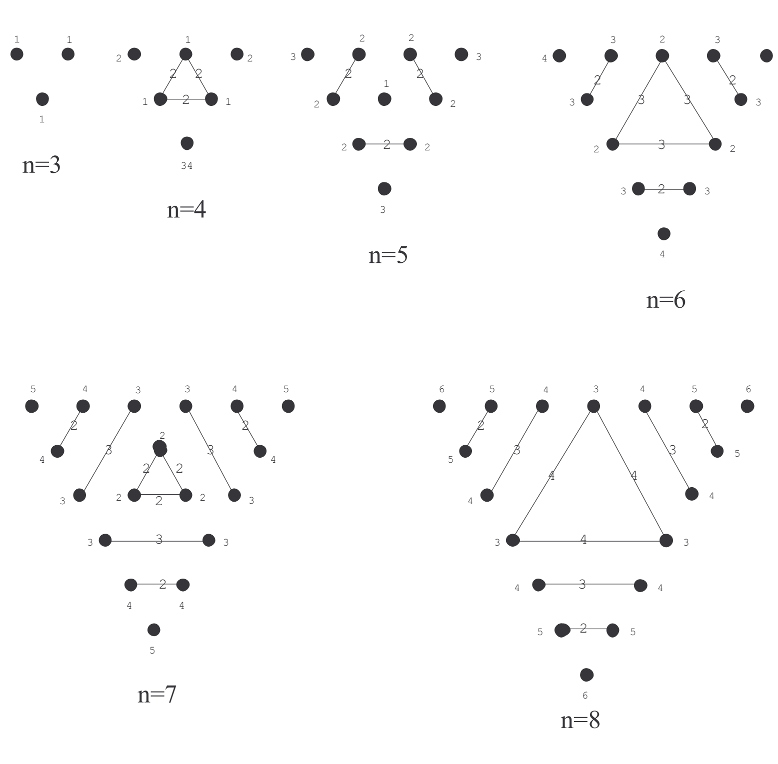


Figura 6: Grafi per n=2,…8

`[004]` per ***9*** distinti valori di ***n*** per cui si sia valutato $\phi(n)$, ottenendo così un sistema lineare di nove equazioni in nove incognite; la dimensione del sistema non deve spaventare, in quanto la sua soluzione è in realtà molto semplice. La prima informazione la fornisce immediatamente la `[004]` per il caso di ***n=0***; infatti, essendo $\phi(0)=0$, ne segue che deve essere $d_0=0$. Ci rimangono quindi solo più 8 equazioni da considerare e, ovviamente, saranno quelle ottenute dalla `[004]` facendo variare ***n*** da ***1*** a ***8***; dobbiamo quindi ricavarci i valori di $\phi(n)$ per tali valori di ***n***. Per ***n=1*** ed ***n=2*** il numero di casi favorevoli è palesemente nullo e quindi abbiamo $\phi(1)=\phi(2)=0$. I valori di $\phi(n)$ per i ***6*** successivi valori di ***n*** si ottengono facilmente dai grafi corrispondenti a questi ultimi, riportati in ***Figura 6***.

Sommando, per ognuno di essi, le molteplicità di tutti i punti del grafo, ricaviamo

$$\phi(3)=3,\quad \phi(4)=9,\quad \phi(5)=22,\quad \phi(6)=42,\quad \phi(7)=72,\quad \phi(8)=113.$$

A partire dalla `[005]`, otteniamo così il sistema

$$\begin{cases} a+b+c+d_1=0, & [005.1] \\ 8a+4b+2c+d_2=0, & [005.2] \\ 27a+9b+3c+d_3=3, & [005.3] \\ 64a+16b+4c+d_4=9, & [005.4] \\ 125a+25b+5c+d_5=22, & [005.5] \\ 216a+36b+6c=42, & [005.6] \\ 343a+49b+7c+d_1=72, & [005.7] \\ 512a+64b+8c+d_2=113. & [005.8] \end{cases} \qquad \texttt{[004.005]}$$

Considerando le equazioni ottenute sottraendo la `[005.1]` dalla `[005.7]` e la `[005.2]` dalla `[005.8]`, associate alla `[005.6]`, si ottiene un sottosistema che contiene solo i coefficienti ***a***, ***b*** e ***c***:

$$\begin{cases} 342a + 48b + 6c = 72, \\ 504a + 60b + 6c = 113, \\ 216a + 36b + 6c = 42. \end{cases} \quad \texttt{[004.006]}$$

Di qui, sottraendo la terza dalla prima e la prima dalla seconda, si hanno le due equazioni

$$\begin{cases} 126a + 12b = 30, \\ 162a + 12b = 41. \end{cases} \quad \texttt{[004.007]}$$

sottrando ancora la prima dalla seconda si ricava l'equazione

$$36a = 11$$

che fornisce il primo coefficiente

$$a = \frac{11}{36} \equiv \frac{22}{72}. \quad \texttt{[004.008]}$$

Sostituendo questo valore nella prima delle `[007]` si ricava

$$b = \frac{1}{12}\left(30 - 126\frac{11}{36}\right) = -\frac{51}{72}; \quad \texttt{[004.009]}$$

introducendo i valori ricavati per ***a*** e ***b*** nella terza delle `[006]`, si ricava ***c***:

$$c = \frac{1}{6}\left(42 - 216\frac{11}{36} + 36\frac{51}{72}\right) = \frac{18}{72} = \frac{1}{4}. \quad \texttt{[004.010]}$$

Noti ***a***, ***b*** e ***c***, le `[005.i]`, con $i = 1,2,\ldots,5$ ci forniscono per i termini noti d_i i valori

$$d_1 = \frac{11}{72},\quad d_2 = -\frac{8}{72} = -\frac{1}{9},\quad d_3 = \frac{27}{72} = \frac{3}{8},\quad d_4 = -\frac{16}{72} = -\frac{2}{9},\quad d_5 = \frac{19}{72}. \quad \texttt{[004.011]}$$

Grazie ai risultati numerici `[008]`,...,`[011]`, dalla `[005]` otteniamo per $\phi(n)$ la formula generale

$$\phi(n) = \frac{1}{72}\left(22n^3 - 51n^2 + 18n + \alpha_n\right), \quad \texttt{[004.012]}$$

dove abbiamo posto $\alpha = 72d_n$; esplicitamente, quindi

$$\alpha_1 = 0,\quad \alpha_2 = -8,\quad \alpha_3 = 27,\quad \alpha_4 = -16,\quad \alpha_5 = 19,\quad \alpha_{n+6} = \alpha_n. \quad \texttt{[004.013]}$$

Va sottolineato che la validità generale della `[012]` è per ora solamente una ipotesi, dato che non siamo stati in grado di dare una piena giustificazione della `[005]`; che la `[012]` sia una formula di validità generale è però effettivamente vero e ciò può essere verificato a posteriori, confrontando le sue predizioni per quattro valori di ***n*** per ognuna delle sei classi di grafi[24] con il valore della molteplicità totale dedotta dai grafi corrispondenti. La verifica è sufficientemente noiosa, ma dà una conferma certa della sua validità.

[24] In realtà per 5 delle 6 classi ne sono sufficienti tre, se teniamo conto del fatto che il valore ***a*** deve essere universale.

Accettata la validità della `[012]`, per la probabilità di vincita ***P(n)***, data dal rapporto tra il numero totale di eventi favorevoli $F(n)=2\phi(n)$ e il numero totale di eventi possibili, pari ad n^3, abbiamo la formula generale

$$P(n)=\frac{22n^3-51n^2+18n+\alpha_n}{36n^2} \qquad \texttt{[004.014]}$$

esendo gli α_n dati dalla `[013]`.

Un metodo sicuro per valutare $\phi(n)$ consiste, come già abbiamo fatto notare, nel sommare esplicitamente le molteplicità di tutti i punti costituenti un generico grafo; poiché i grafi sono raggruppati in ***6*** classi, corrispondenti a diverse tipologie, dobbiamo aspettarci, per tale somma, che rappresenta $\phi(n)$, una formula a priori diversa per ogni classe. Conviene qui considerare separatamente le tre classi associate agli ***n*** pari e le tre classi associate agli ***n*** dispari. Per ogni classe è poi opportuno separare la somma delle molteplicità dei punti del generico grafo della classe in due parti: la prima, che indicheremo con ***S(n)***, tiene conto della regione "esterna" del grafo, quella, separata in tre parti, cosituita dagli intorni dei vertici del grafo, in cui i punti sono collegati da segmenti aventi gli estremi liberi, e la seconda, che indicheremo con ***T(n)***, che tiene conto della somma delle molteplicità dei punti appartenenti al nucleo, formato da triangoli concentrici, che contiene il centro del grafo. Pensando alla struttura dei vari grafi, risulta chiaro che la forma di ***S(n)*** dipende soltanto dall'essere ***n*** pari o dispari, mentre la forma di ***T(n)*** sarà specifica di ogni singola classe; ci attende quindi il calcolo di otto somme, le quali, tutte, coinvolgeranno somme elementari del tipo

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{s} C = C_s, \quad \sum_{k=0}^{s} C = C(s+1) \quad \forall C \text{ indipendente da } k,\\
&\sum_{k=0}^{s} k = \sum_{k=1}^{s} k = \frac{1}{2}s(s-1), \qquad \texttt{[004.015]}\\
&\sum_{k=0}^{s} k^2 = \sum_{k=1}^{s} k^2 = \frac{1}{6}s(s+1)(2s+1) \equiv \frac{2s^2+3s^2+1}{6}
\end{aligned}$$

Cominciamo a considerare il caso di ***n*** pari, ***n=2m***. L'esame della parte esterna del generico grafo relativo ad ***n=2m*** mostra che

$$\begin{aligned}
S(n) &= 3[1*(2m-2)+2(2m-3)+3(2m-4)+\ldots+(m-1)m]=\\
&=3\sum_{k=1}^{m-1}k(2m-k-1)=\\
&=3(2m-1)\sum_{k=1}^{m-1}k-3\sum_{k=1}^{m-1}k^2=\\
&=3(2m-1)\frac{1}{2}m(m-1)-3\frac{1}{6}(m-1)m(2m+1)=\\
&=m(m-1)(2m+1)\equiv 2m^3-3m^2+m;
\end{aligned}$$

sostituendo ***m=n/2*** in questo risultato, si ha

$$S(n)=\frac{1}{4}n^3-\frac{3}{4}n^2+\frac{1}{2}n, \quad \forall n=2m. \qquad \texttt{[004.016]}$$

Dobbbiamo ora calcolare i contributi dei nuclei triangolari per i tre valori di ***m*** che definiscono le tre classi di grafi relative agli ***n*** pari.

Per ***m=3q*** (e quindi ***n=6q***), la parte interna del grafo, a triangoli concentrici, ha la struttura del grafo di ***Figura 7*** e pertanto si ha:

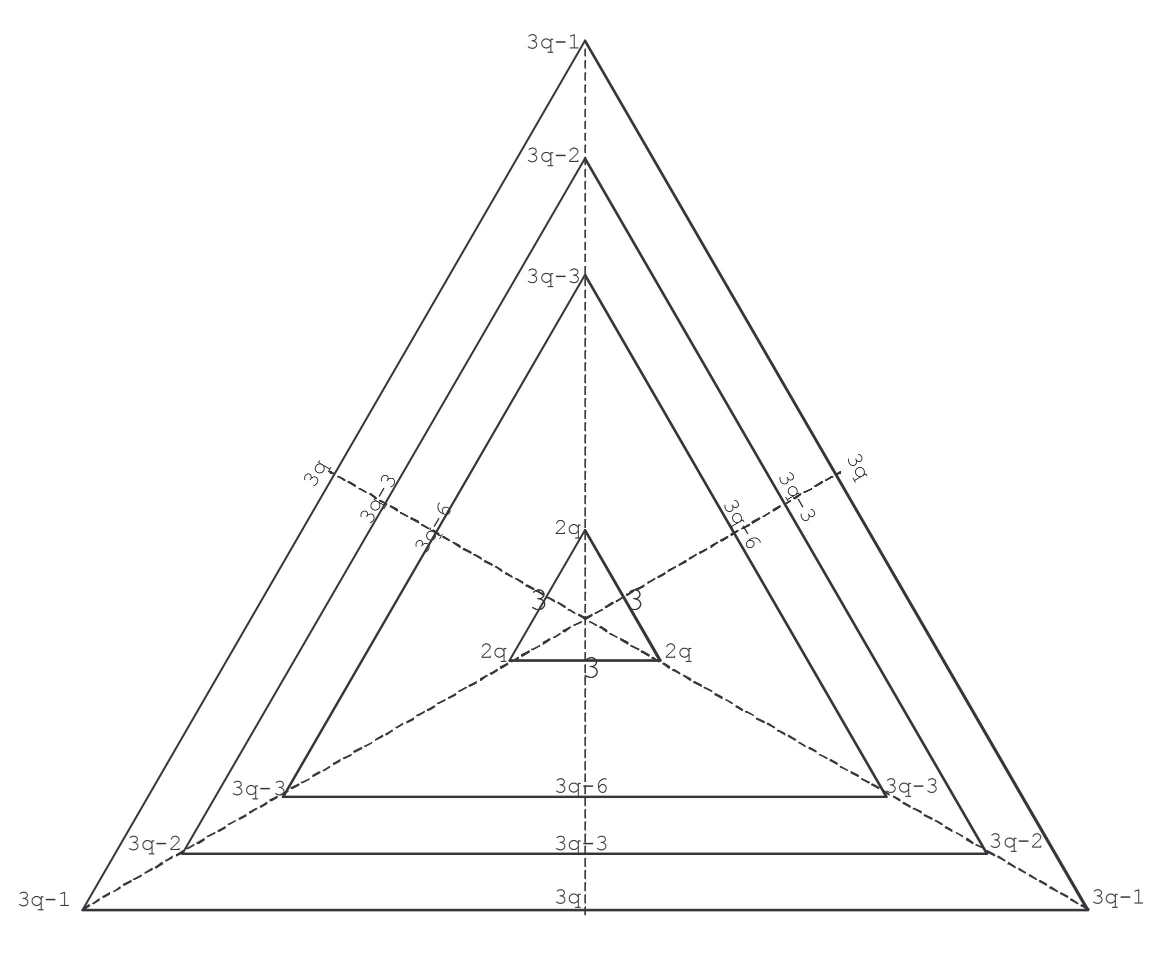


Figura 7: Grafo per n=2m, m=3q

$$T(n)=3[(3q-1)(3q-1)+(2q-4)(3q-2)+(3q-7)(3q-3)+\ldots+2(2q)]=$$

$$=3\sum_{k=1}^{q}(3q-3k+2)(3q-k)=3\sum_{k=1}^{q}\left[(9q^2+6q)-(2+12q)k+3k^2\right];$$

ricordando le somme **[015]**, con due passaggi algebrici si ricava

$$T(n)=\frac{3}{2}\left(8q^3+q^2-q\right),\quad \text{per}\quad n=6q. \qquad \textbf{[004.017]}$$

Sommando la **[016]** con la **[017]**, calcolata per $q=n/6$, ricaviamo per $\varphi(n)$, nel caso specifico di ***n=6q***, l'espressione

$$\varphi(n)=\frac{1}{72}\left(22n^3-51n^2+18n\right),\quad n=6q. \qquad \textbf{[004.018]}$$

Possiamo notare subito che la **[018]** è effettivamente un caso particolare della **[012]** da noi precedentemente dedotta in modo semiempirico.

Passando a considerare, sempre per ***n=2m***, il caso di ***m=3q+1*** (e quindi ***n=6q+2***) la parte triangolare interna del grafo ha la struttura di ***Figura 8***, che ci permette di leggere immediatamente $T(n)$:

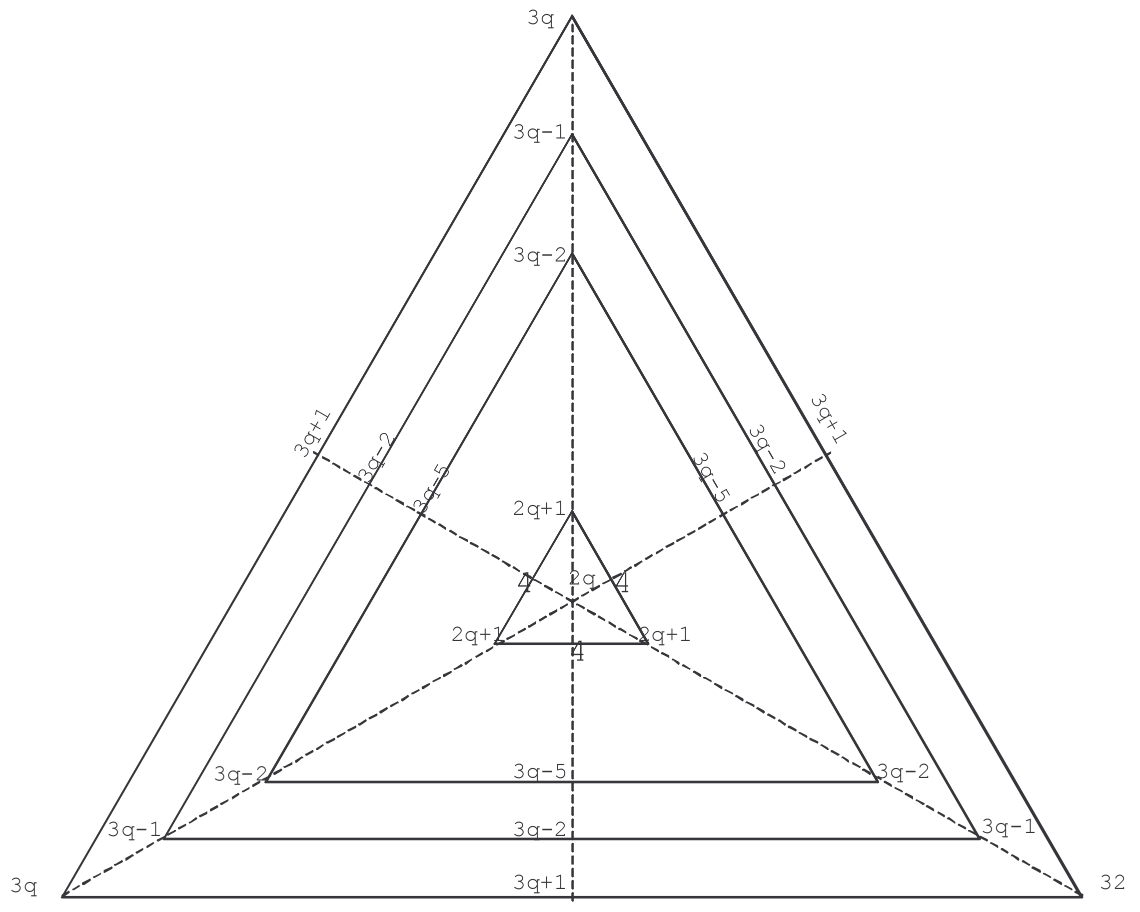


Figura 8: Grafo per n=2m, m=3q+1

$$T(n) = 3[3q * 3q + (3q-3)(3q-1) + (3q-6)(3q-2) + \ldots + 3(2q+1)] + 1 * 2q =$$
$$= 3\sum_{k=0}^{q-1}(3q-3k)(3q-k) + 2q,$$

dove l'ultimo termine rappresenta il contributo singolo del punto centrale del grafo. L'uso delle solite formule per le somme e due semplici passaggi algebrici ci forniscono in risultato

$$T(n) = 12q^3 + \frac{27}{2}q^2 + \frac{7}{2}q, \quad \text{per} \quad n = 6q+2. \qquad \texttt{[004.019]}$$

Sommando questo risultato, valutato per $q = (n-2)/6$, con la **[016]**, ricaviamo

$$\varphi(n) = \frac{1}{72}\left(22n^3 - 51n^2 + 18n - 8\right), \quad n = 6q+2 \qquad \texttt{[004.020]}$$

Di nuovo vediamo che la **[020]** risulta un caso particolare della **[012]**.

Per l'ultimo caso da considerare per ***n*** pari, quello di ***m=3q+2*** (e quindi ***n=6q+4***), la struttura della parte centrale del grafo è quella di ***Figura 9*** e quindi abbiamo

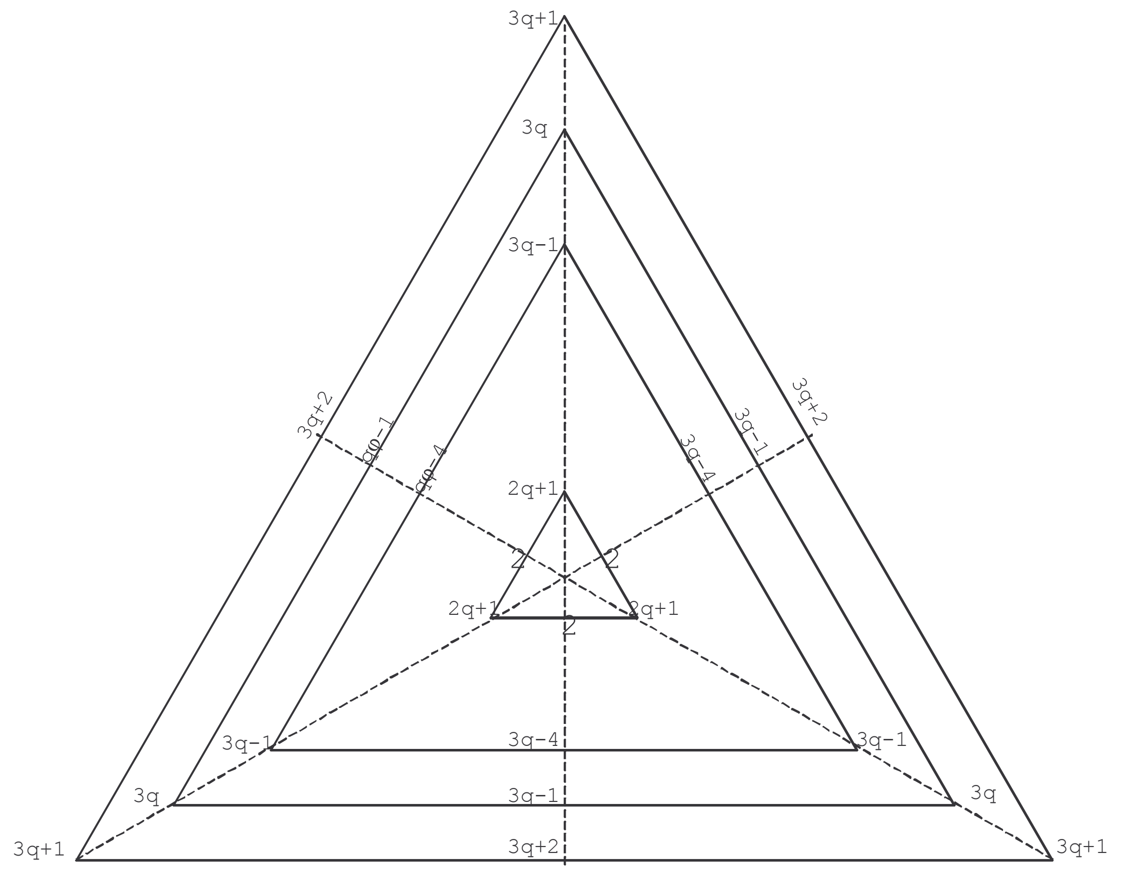


Figura 9: Grafo per n=2m, m=3q+2

$$T(n) = 3[(3q+1)(3q+1) + (3q-2)3q + (3q-5)(3q-1) + \dots 1(2q+1)] =$$

$$= 3\sum_{k=0}^{q} (3q-3k+1)(3q-k+1)$$

e il solito tipo di calcoletto ci fornisce

$$T(n) = 12q^3 + \frac{51}{2}q^2 + \frac{33}{2}q + 3, \quad \text{per} \quad n = 6q+4. \qquad \texttt{[004.021]}$$

Questo risultato, valutato per $n = 6(n-4)/6$, sommato con la **[016]** ci permette di dare per $\varphi(n)$, per la classe di dadi con ***n=6q+4*** facce, l'espressione

$$\varphi(n) = \frac{1}{72}\left(22n^3 - 51n^2 + 18n - 16\right), \quad n = 6q+4. \qquad \texttt{[004.022]}$$

Anche la **[022]** risulta essere un sottocaso della **[012]**.

Ci rimane da trattare il caso degli ***n*** dispari. Per ***n=2m+1*** il numero di casi favorevoli fornito dalla parte esterna del grafo relativo (vedi ***Figura 5***) è

$$S(n) = 3[1*(2m-1) + 2(2m-2) + 3(2m-3) + \dots + m*m] =$$

$$= 3\sum_{k=1}^{m} k(2m-k);$$

di qui, con due semplici passaggi si ha

$$S(n)=\frac{1}{2}\left(4m^3+3m^2-m\right)$$

e quindi, essendo ora $m=(n-1)/2$,

$$S(n)=\frac{1}{4}n^3-\frac{3}{8}n^2-\frac{1}{4}n+\frac{3}{8},\quad \forall n=2m+1 \qquad \texttt{[004.023]}$$

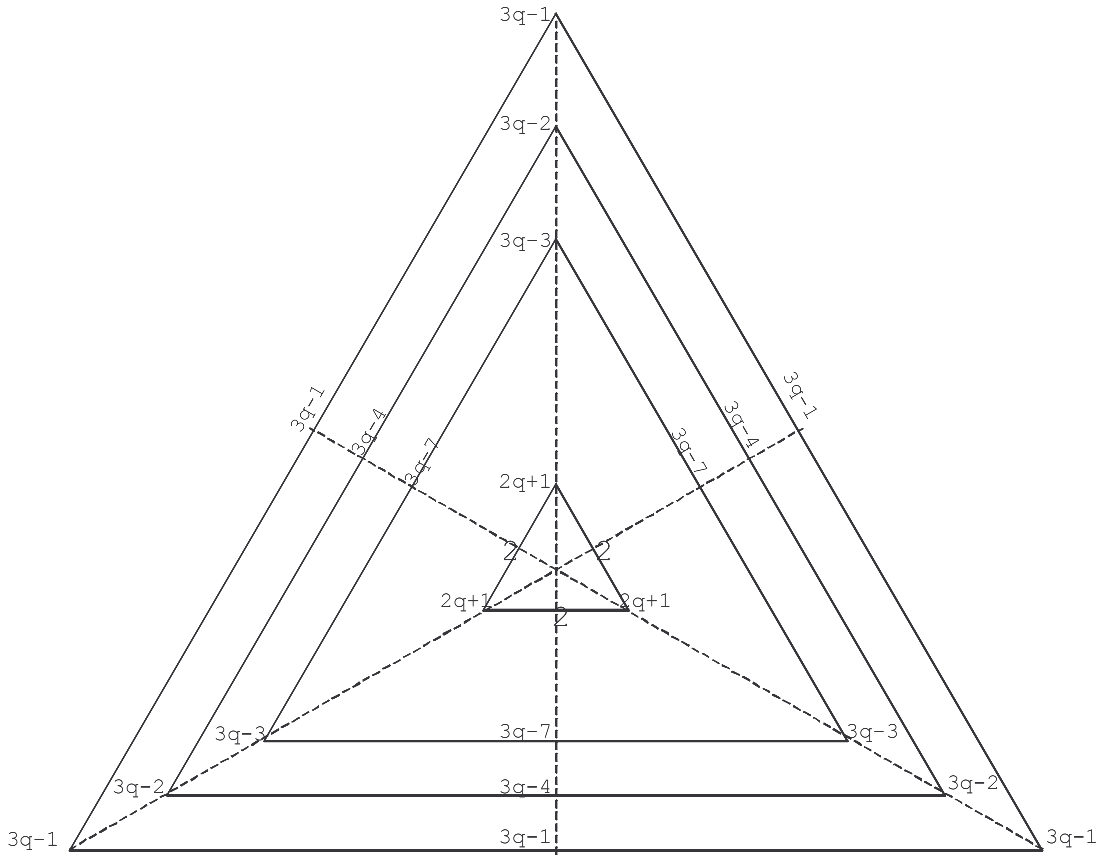


Figura 10: Grafo per n=2m+1, m=3q

Anche qui, per quanto riguarda i contributi dei nuclei triangolari, dobbiamo esaminare separatamente le tre classi di grafi legate agli ***n*** dispari.

Per ***m=3q*** (e quindi ***n=6q+1***), la struttura del nucleo triangolare è data dal grafo in ***Figura 10*** e quindi abbiamo

$$T(n)=3\left[(3q-1)3q+(3q-4)(3q-1)+(3q-7)(3q-2)+\ldots+2(2q-1)\right]=$$
$$=3\sum_{k=0}^{q-1}(3q-3k-1)(3q-k)$$

e di qui, col solito tipo di calcolo, ricaviamo

$$T(n) = 12q^3 + 6q^2, \quad \text{per} \quad n = 6q + 1. \qquad \texttt{[004.024]}$$

Sommando la **[024]**, calcolata per $q = (n-1)/6$, con la **[023]**, otteniamo la relazione

$$\varphi(n) = \frac{1}{72}\left(22n^3 - 51n^2 + 18n + 11\right), \quad n = 6q + 1. \qquad \texttt{[004.025]}$$

altro caso particolare della **[012]**.

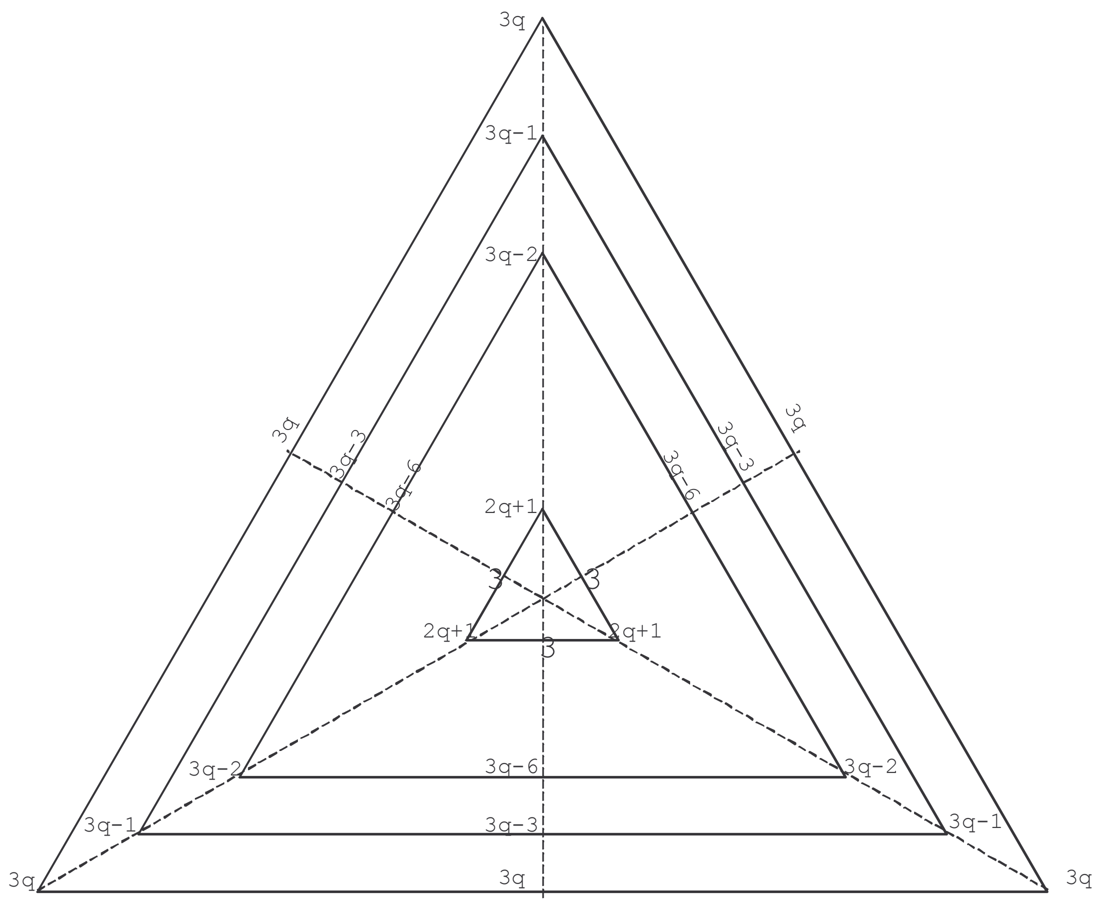


Figura 11: Grafo per n=2m+1, m=3q+1

Per ***m=3q+1*** (e quindi ***n=6q+3***), la struttura del nucleo triangolare è data dal grafo in ***Figura 11*** e quindi abbiamo

$$\begin{aligned} T(n) &= 3[(3q-1)3q + (3q-4)(3q-1) + (3q-7)(3q-2) + \ldots + 2(2q-1)] \\ &= 3\sum_{k=0}^{q-1}(3q-3k-1)(3q-k) \end{aligned}$$

e di qui, coi soliti passaggi,

$$T(n) = 12q^3 + 6q^2, \quad \text{per} \quad n = 6q + 3. \qquad \texttt{[004.026]}$$

Sommando questo risultato, valutato per $q = (n-3)/6$, con quello fornito dalla **[023]**, otteniamo la relazione

$$\varphi(n)=\frac{1}{72}\left(22n^3-51n^2+18n+27\right),\quad n=6q+3. \qquad \texttt{[004.027]}$$

ulteriore caso particolare della **[012]**.

Per l'ultimo caso che ci rimane da considerare, ***m=3q+2*** (e quindi ***n=6q+5***), il nucleo triangolare è dato dal grafo in ***Figura 12***, che ci permette di leggere $T(n)$, come:

$$T(n)=3\left[3q(3q+1)+(3q-3)3q+(3q-6)(3q-1)+\ldots+3(2q+2)\right]+1*(2q+1)=$$

$$=3\sum_{k=0}^{q-1}3(q-k)(3q-k+1)+2q+1.$$

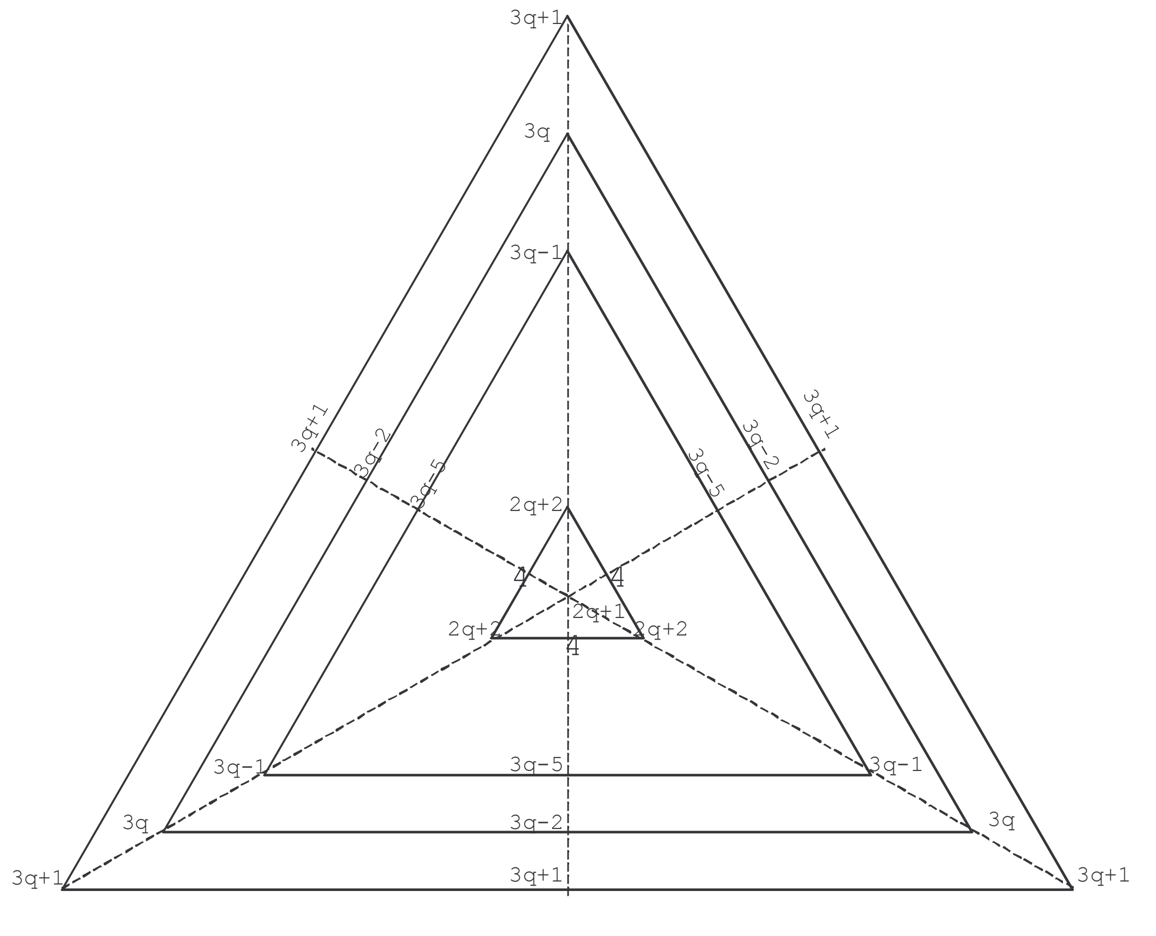


Figura 12: Grafo per n=2m+1, m=3q+2

dove il contributo che compare fuori sommatoria è quello dovuto al punto centrale del grafo; di qui, procedendo come al solito, ricaviamo

$$T(n)=12q^3+18q^2+8q+1,\quad \text{per}\quad n=6q+5, \qquad \texttt{[004.028]}$$

e quindi, sommando questo risultato, valutato per $q=(n-5)/6$, con quello fornito dalla `[023]`, ricaviamo l'epressione di $\phi(n)$ per la sesta ed ultima classe dei grafi associati ai tre dadi ad ***n*** facce, espressione che risulta

$$\varphi(n)=\frac{1}{72}\left(22n^3-51n^2+18n+19\right),\quad n=6q+5, \qquad \texttt{[004.029]}$$

fornendo l'ultimo caso particolare previsto dalla [012].

Morale: Il caso è semplice, ma tira a fregarvi. Il libero arbitrio vi dà maggiori possibilità, ma vi complica notevolmente l'esistenza!

4.2 [064]

4.2.1 Attenti alla simmetria!

Ragazzi, vi siete sbizzarriti. Al solito ci congratuliamo con chi ci ha mandato una soluzione "corretta", ..., ma anche con chi ci ha provato, e ci ha mandato soluzioni divertenti. Qualcuno (non mettiamo il nome!) ha perso di vista un po' di matematica elementare, quando ci chiede se vogliamo il prodotto dei lati e il prodotto delle diagonali o il prodotto totale. Qualcun altro non si ricordave più bene cosa fosse una diagonale.

Data la mole che il numero di questo mese sta assumendo, abbiamo deciso di pubblicare solo quella di ***Sam***, che ci è mancato molto negli ultimi mesi e che è stato molto chiaro nella spiegazione. Lo stesso vogliamo citare tutti gli altri: ***Loba***, ***Torkitorio***, ***Sideranto*** (new entry: benvenuto!) che ha anche verificato i limiti per n infinito, ***Last Duke***, ***Mistral***. E ora la parola a ***Sam***:

Descriviamo i vertici di un poligono regolare con ***n*** lati sul piano cartesiano, scegliendo un vertice come l'origine, con le coordinate

$$\left(\cos\left(\frac{2\pi*k}{n}\right)-1;\sin\left(\frac{2\pi*k}{n}\right)\right)\qquad k=1,\ldots,n-1$$

[Oibò! Posizionamento quantomeno insolito... La nostra soluzione posizionava il centro nell'origine, notando che i vertici erano le soluzioni di $x^n-1=0$*... Comunque, il risultato non cambia (RdA)].*

Quindi la distanza di un vertice dall'origine è:

$$\sqrt{2}*\sqrt{1-\cos\left(\frac{2\pi*k}{n}\right)}$$

Facendo il prodotto di tutte queste distanze otteniamo:

$$2^{n-1}*\prod_{k=1}^{n-1}\sqrt{\left(\frac{1-\cos\left(\frac{2\pi*k}{n}\right)}{2}\right)}$$

ovvero

$$2^{n-1}*\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)*\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)*\ldots*\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=$$

$$=2^{n-1}*\left(\frac{n}{2^{n-1}}\right)=n$$

Se noi ripetiamo questo conto mettendo al posto dell'origine ognuno dei vertici, otterremo ***n*** prodotti uguali. Facendo il loro prodotto $\left(n^n\right)$ avremmo moltiplicato tra loro tutti i lati e le diagonali, ma ogni termine comparirebbe due volte; quindi dobbiamo fare la radice quadrata:

$$\sqrt{n^n} = n^{\frac{n}{2}}$$

4.2.2 Enjoy your banana!

Questo problema ha veramente entusiasmato tutti, ma soprattutto i tre figuri le cui firme trovate in fondo alla rivista. Dato che i risultati ricevuti sono stati tanti e la maggioranza molto divertenti, abbiamo stilato una classifica di chi ha portato più banane al mercato:

Coltivatori diretti di banane	**Banane al mercato**
Jvanbie	333
Luigi, Zar, Diagonal, Pasquale	400
Mistral	416
PierCarlo	444
BlackSky, Loba	500
Delfo, Torkitorio, u_toki, Guido	533
Mash, Orso 3000	534
Stokastik	NC

È arrivata ogni genere di roba, la soluzione di Alcuino da parte del nostro ***Stokastik*** (per ovvie ragioni non classificabile), per esempio, per darle il giusto valore l'abbiamo dovuta scrivere con carateri appropriati, e la trovate qui di seguito:

LII-Propositio de Homine Paterfamilias

Quidam paterfamilias jussit XC modia frumenti de una domo sua ad alteram deportari; quae distabat leucas XXX: ea vero ratione, ut uno camelo totum illud frumentum deportaretur in tribus subvectionibus, et in unaquaque subvectione XXX modia portarentur: camelus quoque in unaquaque leuca comedat modium unum. Dicat, qui velit, quot modii residui fuissent?

Solutio.

In prima subvectione portavit camelus modios XXX super leucas X, et comedit in unaquaque leuca modium unum, id est, modios XX comedit et remanserunt X. In secunda subvectione similiter deportavit modios XXX et ex his comedit XX, et remanserunt X, in tertia vero subvectione fecit similiter; deportavit modios XXX, et ex his comedit XX, et remanserut X. Sunt vero de his, qui remanserunt, modia XXX, et de itinere leucae X. Quos XXX, in quarta subvectione domum detulit, et ex his X in itinere comedit, et remanserunt de tota illa summa modia tantum XX.

Come ci ha fatto notare ***u_toki***:

> Premetto un'osservazione: la domanda finale avrebbe dovuto essere "quante banane AL MASSIMO arrivano al mercato?", visto che io potrei caricare il

> cammello con 1000 banane, attraversare la distanza piantagione-mercato e arrivare al mercato SENZA banane (1000 km di tragitto-1000 banane mangiate dal cammello)...e così facendo non consegnerei nulla!

Verissimo, chiedevamo "con quante arrivate..." presupponendo un rapace spirito levantino nei nostri lettori: è evidente che chi arriva con più banane arriva prima (ha fatto meno chilometri) e, contato il fatto che può venderle come primizie in regime monopolistico, è anche quello che spunta il prezzo più alto... In ogni caso sono stati tutti d'accordo che il gioco non valesse la candela: chi ha proposto di vendere il cammello per comprare un pick-up, chi addirittura di lasciar perdere le banane e vendere insieme al famelico cammello l'intera piantagione, non possiamo darvi torto.

Il discorso fondamentale è che la maggior parte ci ha inviato delle proposte di percorso, senza tentare di dimostrare che fossero ottime. Pubblichiamo una versione per ogni risultato, cominciando con come portarne 333 secondo ***Jvanbie***:

> Il cammello viene caricato con 1000 banane e procede per 333km, scarica 334 banane, e utilizza le altre 333 per tornare indietro. Esegue l'operazione per 3 volte. A questo punto abbiamo a 333km dalla piantagione e quindi a 667km dal mercato 1002 banane. Il cammello se ne carica 1000 in groppa e le porta al mercato, percorrendo 667km rimangono al mercante 333 banane da vendere. Le altre due (rimaste al deposito) le regala a passanti!

Se non altro generoso. Per 400 banane vi diamo la soluzione di ***Zar***, che l'ha giustificata così:

> L'idea è questa: devo minimizzare i viaggi del cammello perché ogni volta che torna indietro consuma materiale prezioso. Con un solo viaggio e zero punti di sosta, il cammello abbandona 2000 banane al loro destino, ne trasporta 1000, se le mangia tutte e arriva al mercato con zero banane ma molto felice. Così non va...
>
> Allora pensiamo ad un solo punto di sosta, a distanza x dal punto di partenza. Il cammello fa tre viaggi; porta 1000 banane, ne consuma x, ne trattiene x per il ritorno, scarica le rimanenti 1000-2x. Poi fa un altro viaggio identico, poi fa il terzo viaggio, alla fine del quale scarica 1000-x banane (non trattiene le x per il ritorno perché non deve tornare indietro). Quindi a distanza x dal punto di partenza ci sono 3000-5x banane. Ora il cammello le carica (vediamo dopo a quali condizioni deve soddisfare la x) e percorre i restanti 1000-x chilometri consumando 1000-x banane, arrivando alla fine con 3000-5x-(1000-x)=2000-4x banane. Vogliamo massimizzare questo valore.
>
> L'equazione y=2000-4x è una retta decrescente nel piano banana/spazio, dunque dobbiamo cercare di stare il più a sinistra possibile per trovare il massimo numero di banane che si possono salvare dalla bocca del cammello. Veniamo quindi alle condizioni a cui deve soddisfare la x: prima di tutto 3000-5x deve essere >=0 (il cammello non porta banane negative al primo punto di sosta), questo ci dice che x<=600. Anche 2000-4x deve essere >=0 (stesso motivo di prima), quindi 2000-4x>=0, dunque x<=500. Queste condizioni ci dicono poco, perché vogliamo sapere quanto possiamo spostarci a sinistra lungo l'asse x. Se il primo deposito fosse composto da un numero di banane >1000, il cammello non potrebbe caricarle tutte, ne dovrebbe lasciare un po' a terra, dovrebbe poi tornare indietro consumando un sacco. Quindi poniamo che 3000-5x sia <=1000, e questo ci dice che x deve essere maggiore o uguale di 400. E dunque il massimo si ha quando x=400.
>
> In questo caso il cammello fa tre viaggi di 400 chilometri, costituendo un deposito di 1000 banane. Poi se le carica in spalla e percorre gli altri 600 chilometri, portando al mercato la bellezza di 400 banane. Non ci è dato di sapere come farà poi il cammello a tornare indietro...

Mistral e 416 banane al mercato (caso da 2 a più tappe):

(...) Nel caso di due tappe intermedie conviene fare la prima tappa in modo da consumare esattamente 1000 banane, cioè: $6x'_0 = 1000$ da cui $x'_0 = x_0 / 2 = 1000/6$.

Analogamente conviene fare la seconda tappa in modo da consumare esattamente altre 1000 banane, cioè: $4x''_0 = 1000$ da cui $x''_0 = 1000/4 = 250$.

Infine nell'ultima tappa si percorre una distanza pari a $1000 - 1000/6 - 250 = 7 \cdot 1000/12$ per cui le banane al mercato sono $5 \cdot 1000/12 > 1000/3$.

Con ragionamento analogo al caso ad una tappa si vede che non si può fare di meglio perché deviando da x'_0 e x''_0 si fanno viaggi di ritorno in più oppure si lasciamo banane nelle tappe intermedie con il cammello fermo tra una tappa e l'altra. Per la stessa ragione più di due tappe intermedie sono meno efficaci.

Pier Carlo e 444 banane:

1* viaggio: carico 1000 banane, dopo 334 km ne deposito 332 e torno casa.

2* viaggio: carico 1000 banane, dopo 444 km ne deposito 112 e torno a casa.

3* viaggio: carico 1000 banane, al km 334 mi riprendo le 332, al km 444 mi riprendo le 112; arrivo al mercato, lego il cammello con l'apposito nodo per cammelli (cfr. "Enciclopedia dei nodi" di Ashley), e scarico le mie 444 banane.

Per 500 banane sentiamo ***Loba*** (il metodo di ***BlackSky*** è lo stesso):

Carico il cammello con 1000 banane e vado al punto A (250Km), dove scarico 500 banane, poi torno indietro (ho consumato 500 banane). Ricarico il cammello con altre 1000 banane, arrivo ad A con 750 banane, ne carico 250 e vado a B (500Km), dove ne scarico 500; poi torno ad A, prendo le 250 banane rimaste e torno alla piantagione (ho consumato 1000 banane, più le 500 consumate prima). Ricarico il cammello con le ultime 1000 banane e vado direttamente a B, consumando 500 banane, che ricostituisco recuperandole dal deposito. (Finora ho consumato 2000 banane). Ora, carico di 1000 banane, affronto coraggiosamente gli ultimi 500 Km, arrivando al mercato con 500 banane, una gran sete e una tremenda emicrania. Ora vendo le banane e il cammello, che non saprei come portare indietro, e mi compro finalmente il tanto sognato pick-up usato. E via sgommando verso casa.

Tutti gli altri li consideriamo a parimerito, anche perché per far avanzare la banana in più hanno usato sporchi trucchi, come per esempio ***Mash***:

Nonostante notoriamente il cammello possa accumulare cibo nelle gobbe mi è sembrato giusto non considerare questa caratteristica perché non è citata nella descrizione e poi perché ad essere "seriamente realistici" quante banane mi sarei mangiato io?

Ho considerato il cammello come "prepagato" (nel senso che prima di fare il Km mangia la banana) per deformazione professionale dato che <*operatore mobile*> usa il protocollo CAMEL (Customized Application for Mobile network Enhanced Logic) per le sue carte prepagate.

La battuta sul CAMEL è per gli addetti ai lavori, ma due terzi della redazione si sono rotolati sulla sedia dal ridere, mentre il Doc li guardava con aria di compatimento. Pubblichiamo la soluzione di ***Guido***, che ci è sembrata la più chiara:

Innanzitutto provo a inserire una sola sosta intermedia, cioè porto prima tutte le banane che posso al chilometro x e poi le porto a destinazione, facendo il seguente percorso:

Parti del viaggio	**Banane nel punto 0**	**Banane nel punto x**
Da 0 a x	2000	1000-x
Da x a 0	2000	1000-2x
Da 0 a x	1000	2000-3x
Da x a 0	1000	2000-4x
Da 0 a x	0	3000-5x

Per determinare x, impongo di non lasciare nessuna banana lungo il cammino. Quindi 3000-5x=1000 ⇒ x=400; e 400 sono le banane che così arrivano a destinazione.

Vediamo come si può fare meglio: facciamo ora 2 soste intermedie lungo il percorso:

Parti del viaggio	**Banane nel punto 0**	**Banane nel punto x**	**Banane nel punto y**
Da 0 a x	2000	1000-x	0
Da x a 0	2000	1000-2x	0
Da 0 a x	1000	2000-3x	0
Da x a 0	1000	2000-4x	0
Da 0 a x	0	3000-5x	0
Da x a y	0	2000-5x	1000-(y-x)
Da y a x	0	2000-5x	1000-2(y-x)
Da x a y	0	1000-5x (=0)	2000-3(y-x)
Da y a 1000	0	0	1000-3(y-x) (=0)

Fino al punto x tutto è come prima; ora trasporto tutte le 3000-5x banane nel punto y, in due viaggi (altrimenti non serve a nulla la sosta in y); quindi trasporto in un solo viaggio le 2000-3(y-x) banane, arrivando in città con 1000-2y+3x banane.

Il numero massimo si ottiene imponendo di non lasciare nulla lungo il percorso, e quindi avremo 1000-5x=0 ⇒ x=200, e 1000-3(y-x)=0 ⇒ y=1600/3; in questo modo sono riuscito a trasportare ben 533 banane (il 3 periodico lo mangio io)!

4.2.3 Q&D

Siccome ***Torkitorio*** è riuscito a farci ridere molto con la sua soluzione del Q&D, ve la proponiamo velocemente, senza nessuna modifica:

Certo che stavolta non potevate trovare problema più azzeccato per il Quick & Dirty, perché se da un lato le formiche sanno essere davvero veloci (quick appunto), dall'altro la cucina che descrivete è very very dirty (ah già, dimenticavo, avete detto che è la mia...). La soluzione non richiede eccessivi calcoli.

Considerato che al primo traguardo si stacca una formica, e il numero rimanente è divisibile per due, al secondo se ne stacca un'altra (quindi 2 in tutto), e il numero rimanente è divisibile per tre, al terzo si stacca la terza, etc, in pratica nel totale di quelle che si staccano ne manca sempre una per poter formare un'altra riga del "plotone" rimanente. Quindi sarebbe sufficiente arruolare una formica in più per ottenere un numero iniziale di formiche divisibile sia per 1 che per 2 che per 3 che per.. (devo continuare sino a 10!?).

Perciò il mio numero minimo di formiche deve essere pari al più piccolo numero che abbia come fattori primi tutti i numeri primi compresi tra 1 e 10 (con adeguato esponente in modo che il risultato sia divisibile anche per i multipli di tali numeri primi compresi tra 1 e 10) dal quale poi va sottratto 1, e cioè:

F(ormiche) = $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 - 1 = 8 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 7 - 1 =$ e qui ci vuole la calcolatrice = 2519

MAMMA MIA: un'invasione!!!!!! E nella mia cucina poi!!!

5. Quick & Dirty

Le formiche che avete in cucina, come ogni mattina, escono dal nido in fila indiana e procedono così sino al barattolo dello zucchero, dove una si separa dalla fila. Da quel momento, procedono in fila per due sino alle briciole del pane, dove una si separa dal gruppo. Quindi, vanno in fila per tre sino alla pila dei piatti della sera prima, dove una si separa dal gruppo. Procedono allora in fila per quattro... insomma, avanti così per quel disastro che è la vostra cucina, sin quando arrivano in fila per dieci al toast avanzato della vostra colazione.

Quante formiche avete, come minimo, in casa?

Sono molto arrabbiato. Quando facevo danni come programmatore (in **C**), uno dei miei errori preferiti era soprannominato "Errore JfaFO" (Just for a F**k*d One), in quanto sbagliavi di uno (nell'esaminare un vettore, o nel porre il limite a un ciclo, o "minore o uguale" anzichè minore...). La mia speranza era che ci cascaste anche voi... Nessuno. Grunt.

*Supponiamo di avere **n** formiche; allora, **n-1** deve essere divisibile per **2** e quindi dovrà esserlo anche **(n-1+2)=n+1**.*

*Al secondo passaggio, **n-2** deve essere divisibile per **3** e quindi lo sarà anche **(n-2+3)=n+1**.*

...

*Al **k**-esimo passaggio, **n-k** deve essere divisibile per **k+1** e quindi lo sarà anche **(n-k+k+1)=n+1**.*

*Quindi, se **n** sono le formiche, **n+1** (e non n, come sostenevo io) deve essere il minimo comune multiplo tra i numeri da **1** a **10**.*

Comunque, il vostro disordine rende felici 2520-1=2519 simpatici conviventi.

6. Pagina 46

Se i quattro numeri cercati sono indicati come x, y, z, u, deve sussistere il sistema di equazioni agli interi:

$$\begin{cases} x^2 + y + z + u = (x+v)^2 \\ y^2 + x + z + u = (y+w)^2 \\ z^2 + x + y + u = (z+t)^2 \\ u^2 + x + y + z = (u+s)^2 \end{cases} \qquad [006.001]$$

Ossia:

$$\begin{cases} y+z+u=2vx+v^2 \\ x+z+u=2wy+w^2 \\ x+y+u=2tz+t^2 \\ x+y+z=2su+s^2 \end{cases} \qquad \texttt{[006.002]}$$

Che, sommando, dà:

$$(2v-3)x+(2w-3)y+(2t-3)z+(2s-3)u+v^2+w^2+t^2+s^2=0 \qquad \texttt{[006.003]}$$

Notiamo che in questa equazione almeno una delle parentesi deve essere negativa, in quanto in caso contrario si avrebbe un'espressione maggiore di zero.

Supponiamo sia $(2v-3)<0$; questo è possibile solo per ***v=0*** o per ***v=1***; il primo caso ci porta a $y+z+u=0$, che va contro la richiesta del problema che i numeri siano naturali. Quindi, deve essere***v=1***. Allora possiamo riscrivere la `[003]` come:

$$x=(2w-3)y+(2t-3)z+(2s-3)u+w^2+t^2+s^2+1 \qquad \texttt{[006.004]}$$

Consideriamo ora le diverse possibilità:

I numeri x,y,z,u ***sono tutti distinti***.

In questo caso, anche ***v***, ***w***, ***t***, ***s*** sono distinti; infatti, se fosse ad esempio ***v=w***, la differenza tra le prime due equazioni di `[002]` darebbe $y-x=2v(x-y)$, che è impossibile se imponiamo $v>0$ e $x \neq y$. Inoltre, se assumessimo ***v=1***, la prima delle `[002]` darebbe $2x=y+z+u-1$, ossia $x=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}$ che è in contraddizione con l'equazione `[004]`, in cui i coefficenti di ***y***, ***z***, ***u*** sono interi positivi e ***w***, ***t***, ***s*** non possono essere uguali a ***1*** in quanto abbiamo imposto che sia ***v=1*** e che i quattro valori siano distinti.

Quindi, ***questo caso non è possibile***.

Due e solo due tra gli interi x,y,z,u ***sono uguali tra loro***.

Dobbiamo esaminare separatamente due casi:

$z=u$, il che implica $t=s$

L'equazione `[004]` e la prima delle `[002]` diventano rispettivamente:

$$x=(2w-3)y+2(2t-3)z+w^2+2t^2+1 \qquad \texttt{[006.005]}$$

e

$$2x=y+2z-1 \qquad \texttt{[006.006]}$$

E come visto prima sono inconsistenti.

$x=y$, il che implica $w=v=1$

L'equazione `[004]` e la prima delle `[002]` diventano rispettivamente:

$$2x=(2t-3)z+(2s-3)u+t^2+s^2+2 \qquad \texttt{[006.007]}$$

e

$$x=z+u-1 \qquad \texttt{[006.008]}$$

Sostituendo la seconda nella prima, abbiamo:

$$(2t-5)z+(2s-5)u+t^2+s^2+4=0 \qquad \texttt{[006.009]}$$

Da cui segue che almeno una delle parentesi deve essere minore di zero.

Supponiamo $(2t-5)<0$; deve essere $t>1$, in quanto $(v=1, \mathrm{z} \neq \mathrm{x}) \Rightarrow t \neq v$; quindi, ***t=2***.

Se poi sommiamo il doppio della prima delle `[002]` con la terza delle `[002]`, otteniamo:

$$4z+4x+6=4x+2z+3u \quad \Rightarrow \quad z=\frac{3}{2}u-3 \qquad \texttt{[006.010]}$$

Sostituendo nella `[009]` e ricordando che ***t=2***, si ha:

$$(4s-13)u+2s^2+22=0 \qquad \texttt{[006.011]}$$

Con $(4s-13)<0$ e, dovendo essere $s>0, \quad s \neq 1, \quad s \neq 2$, deve essere ***s=3***.

Sostituendo i valori sin qui trovati nella `[002]`, si ha un sistema di tre equazioni lineari in tre incognite:

$$\begin{cases} x+z+u=2s+1 \\ 2x+u=4z+4 \\ 2x+z=6u+9 \end{cases} \qquad \texttt{[006.012]}$$

Che dà finalmente:

$$\begin{aligned} x &= y = 96 \\ z &= 57 \\ u &= 40 \end{aligned} \qquad \texttt{[006.013]}$$

Gli interi x, y, z, u ***sono uguali tra loro a due a due***.

Supponiamo ***x=y*** e ***z=u***; la prima equazione della `[002]` diventa $x=2z-1$; sostituendo in `[003]`, abbiamo:

$$x=(2t-3)z+t^2+1 \quad \Rightarrow \quad (2t-5)z+t^2+2=0 \qquad \texttt{[006.014]}$$

Da cui segue che $2t-5<0$ e, dovendo essere $t>0, \quad t \neq 1$ deve essere ***t=2***.

L'equazione `[003]` si può ora scrivere come:

$$\begin{cases} x+2z=2x+1 \\ 2x+5=4z+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y=11 \\ z=u=6 \end{cases} \qquad \texttt{[006.015]}$$

Tre degli interi x, y, z, u ***sono uguali tra di loro***

Qui devono essere considerati ***due*** casi:

Se $y=z=u$, l'equazione `[004]` e la prima delle `[002]` assumono la forma:

$$\begin{aligned} x &= 3(2w-3)y+3w^2+1 \\ 2x &= 3y-1 \end{aligned} \qquad \texttt{[006.016]}$$

che sono inconsistenti.

Se $x=y=z$ l'ultima delle `[002]` diventa:

$$\begin{aligned} 3x &= 2su + s^2 \\ &= 2s + s^2 \\ \Rightarrow x &= \frac{s(s+2)}{3} \end{aligned} \qquad \texttt{[006.017]}$$

Ma ***x*** deve essere un intero positivo, il che implica che s o $(s+2)$ devono essere divisibili per ***3***. Da cui:

$$\begin{aligned} s = 3k &\Rightarrow x = k(3k+2) \\ s = (3k-2) &\Rightarrow x = k(3k-2) \end{aligned} \qquad \texttt{[006.018]}$$

Dove ***k*** è un intero arbitrario.

Tutti i numeri x, y, z, u ***sono uguali tra loro***

In questo caso, la prima delle `[002]` diventa:

$$3x = 2x + 1 \Rightarrow x = 1 \qquad \texttt{[006.019]}$$

Riepilogando,

x	***y***	***z***	***u***
96	96	57	40
11	11	6	6
$k(3k \pm 2)$	$k(3k \pm 2)$	$k(3k \pm 2)$	1
1	1	1	1

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 Due palle così! – [003] Ormai l'avete capito tutti

Beh, è ormai abbastanza evidente dove volevamo andare a parare con quanto abbiamo detto finora. Proprio lui, il ***paradosso di Banach-Tarski***. Che ormai non dovrebbe più essere tanto paradossale; nella sua enunciazione più semplice, dice che:

> È possibile dividere in un numero *finito* di parti una sfera solida e ricomporle attraverso rotazioni e traslazioni in *due* sfere solide identiche all'originale.

Bene, visto che qualcosa di simile siamo già riusciti a farlo, usando *due* parti per ricostruire un insieme che precedentemente avevamo diviso in quattro, la cosa non dovrebbe più essere particolarmente traumatica. Tanto per cominciare, stiamo parlando di una sfera ***matematica***, non fisica; ossia, un oggetto in $\Re^3$ definito come

$$S = \{(x, y, z) \in \Re^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\} \qquad \text{[007.001]}$$

...e sapete tutti bene che questo oggetto ha ***infiniti*** punti (o meglio ha un numero di punti pari alla cardinalità del continuo); quindi, dividerlo in due parti non vi riduce sostanzialmente il numero di punti in ognuna delle parti[25] e pertanto le nostre sfere sono infinitamente divisibili.

Se assumiamo che la nostra sfera ***non*** sia infinitamente divisibile, infatti, il Paradosso di Banach-Tarski non si applica, in quanto i pezzi coinvolti nella "divisione matematica" sono infinitamente complessi e non risultano misurabili; per loro (e la cosa era ragionevolmente chiara già nella prima puntata) il volume non è ben definito, e non possiamo misurarlo. I pezzi non misurabili li possiamo ottenere solo se tagliamo la nostra sfera in pezzi infinitamente dettagliati, cosa impossibile per le sfere reali, in quanto non potete tagliare i singoli atomi in parti infinitamente dettagliate. Ma per prima cosa cerchiamo di enunciare il paradosso in un modo un po' più formale: Partiamo dalla ***S*** definita sopra e dalla sua "copia" traslata ***S'***; inoltre prendiamo delle oppportune rototraslazioni T_i .

$$\begin{aligned} &\exists\{a_1, \ldots, a_n\} : \forall j \leq n \wedge \forall i \neq j, i \leq n \\ &a_i \cap a_j = \{0\} \wedge \bigcup_{i=1}^{n} a_i = S \\ &\Rightarrow \exists\{T_1, \ldots, T_n\}, \exists m < n : \bigcup_{i=1}^{m} T_i(a_i) = S \wedge \bigcup_{i=m+1}^{n} T_i(a_i) = S' \end{aligned} \qquad \text{[007.002]}$$

...e possiamo sempre proporlo a Doc per casa sua come sostituto dell'"attenti al cane" (che non ha[26]).

Ora, qualcuno di voi potrebbe pensare "OK, ci credo, ma presumo ti serviranno un numero di pezzi dalle parti dell'infinito..." Beh, no. Esiste una (noiosissima) dimostrazione[27] in cui prima si verifica che vi servono ***quattordici*** pezzi, poi dimezzabili a ***sette*** che quindi si portano a ***cinque*** se siete così pignoli da tenere conto del punto centrale; in caso contrario, ve ne bastano ***quattro***; quelli di voi che sono stati attenti durante la puntata precedente (vogliamo sperare che questo insieme sia diverso

[25] Questa caratteristica rende sostanzialmente inapplicabile il metodo di Banach-Tarski a tutti quei graziosi parallelepipedi verdi sui quali è scritto "100 Euro".

[26] Da intendersi "non ha il cartello". Di cani ne ha tre, sempre pochi rispetto al numero di gatti, comunque *[PRS]*.

[27] La versione più abbordabile è in un articolo di ***Su*** (è la sua "minor thesis" del Ph.D.); se avete problemi di insonnia, chiedete pure.

dall'insieme vuoto), probabilmente potranno sviluppare qualche dubbio su dove sia finito, nella divisione in quattro parti del nostro insieme a croce frattale, il punto ***e***.

Per riuscire a capire come gira il fumo, lasciamo un attimo da parte la sfera matematica e prendiamo una ***palla fisica***, ***P***. La nostra ***P*** è perfettamente identica a ***S***, con l'unica differenza che, anzichè da un numero infinito di punti, è formata da un numero *finito* di atomi, organizzati in un qualche modo (nel senso che esiste una relazione di struttura tra un atomo e i suoi vicini) secondo un reticolo cristallino. La struttura degli atomi non è altro che la definizione di una relazione tra un atomo e i suoi vicini.

Ora, applichiamo l'equivalente del Paradosso di Banach-Tarski alla nostra ***P***; in pratica, la dividiamo in quattro "nuvole" di atomi C_1, C_2, C_3 e C_4 e, giusto per essere coerenti con la versione matematica del paradosso, ignoriamo l'atomo al centro; assumiamo che queste nuvole siano abbastanza sparse da essere gassose e non più solide (il che ci permette di imitare la non misurabilità del volume dei pezzi della nostra sfera). Supponiamo però mantengano una qualche struttura di regolarità, in modo tale che se noi ruotiamo di un certo angolo il pezzo C_1 e lo montiamo insieme a C_2 otteniamo la stessa struttura cristallina di ***B***, tranne per il fatto che la distanza tra gli atomi è maggiore (per tenere conto degli atomi che sono rimasti negli altri pezzi). Nello stesso modo, facciamo la stessa cosa con C_3 e C_4, spostandoli al di fuori della regione originale in modo tale che non interferiscano con C_1+C_2 e riassembliamoli in una sfera.

A questo punto, abbiamo costruito due copie della sfera originale con lo stesso raggio di ***P*** utilizzando il materiale di ***P***: l'unica differenza (Essendo le due sfere *fisiche*) è che la "densità" delle due sfere risultanti è la metà di quella originale, anche se la "struttura cristallina" è la stessa.

Riportiamo questa analogia nella matematica, tornando alla nostra sfera ***S***: quella che prima era la struttura cristallina, qui diventa la struttura topologica di $\Re^3$; le "nuvole" hanno perso questa struttura (ossia non sono misurabili, non potete calcolarne il volume), ma con un corretto riaggiustamento possiamo formare due sfere della stessa dimensione dell'originale, ma aventi densità dimezzata. Già, ma ***S*** per definizione è *infinitamente densa*, e la metà di infinito è un infinito dello stesso ordine. Quindi, la densità è invariata, ossia le due sfere sono ***identiche***.

Che è esattamente quello che volevamo ottenere: come spesso accade in matematica, il paradosso è tale solo sin quando non si guarda bene.

Ma allora perché i matematici si scaldano tanto, quando parlano di 'sta roba? Beh, la cosa è legata all'***Assioma della Scelta***: e, anche se molti matematici lo accettano, non tutti sono d'accordo che debba essere preso come un assioma; per lungo tempo si è discusso se debba essere accettato o no e, anche se semplifica notevolmente molte dimostrazioni, applicato con disinvoltura porta a strani risultati del tipo del Paradosso di Banach-Tarski. Vediamo un attimo con calma, sì?

Sostanzialmente, l'assioma della scelta si riduce ad una cosa di questo genere: supponiamo di avere una collezione di insiemi ***C***; allora esiste un insieme ***H*** (chiamato (l'*insieme scelto*) formato da un elemento per ognuno degli insiemi ***C*** iniziali. ***H*** è chiamato "insieme scelto" in quanto sostanzialmente viene costruito esaminando ognuno degli insiemi ***C*** e prendendo un elemento da ognuno di essi.

Una delle caratteristiche interessanti di ***H*** è che semplicemente si *presuppone esista*: non ci viene fornito un modo per costruirlo, molto semplicemente c'è; cavoli nostri poi trovarlo.

Ora, fin quando si pasticcia con le biglie e le monetine non ci sono problemi: possiamo tranquillamente prendere per vero l'Assioma della Scelta; abbiamo la ragionevole aspettativa che il tutto funzioni correttamente. Ma quando trattiamo con insiemi infiniti (soprattutto con un grado di infinito che è tutto da definire…) la cosa non è proprio immediata.

Fermiamoci un attimo, cercando di visualizzare cosa succede. Vi faccio un esempio "facile", OK? Prendiamo una circonferenza, e togliamole un punto, ad esempio, quello corrispondente a zero radianti. Come possiamo, con i punti che ci restano, ricostruire la circonferenza?

Il modo più semplice è quello di *ruotare* la circonferenza di π radianti; il punto "zero" viene coperto, e il "buco" va in posizione π; però, *anche questo punto è coperto*, in quanto possiamo (attraverso frazioni continue di lunghezza infinita, ad esempio) esprimere il valore di π, e quindi il punto è coperto anch'esso.

Capito, dove sta l'inganno? Avendo un insieme *infinito*, il togliere un certo numero di punti non necessariamente "toglie punti". E funziona anche in casi peggiori. Una delle cose che mi piacevano meno, in Analisi I, era la Funzione di Dirichlet; ve la ricordate, spero: $\boldsymbol{y=x}$ se $\boldsymbol{x}$ è razionale, altrimenti $\boldsymbol{y=0}$. Intrattabile. Beh, provate a togliere i punti per cui la funzione vale zero, poi dategli un giretto… Manca qualcosa?

Nel caso del Paradosso di Banach-Tarski, ognuno degli infinitamente complessi "pezzi" è costruito a partire da questi insiemi scelti; siccome non conosciamo nessun algoritmo in grado di costruire questi insiemi, noi possiamo solo ricavare indirettamente alcune loro caratteristiche, come quella ad esempio di non essere misurabili (secondo Lebesgue; o, se preferite, di avere una *complessità geometrica intrattabile*); il problema relativo all'accettazione o meno dell'Assioma della Scelta è il decidere se questi insiemi siano o no matematicamente ammissibili.

Ecco, a questo punto, ci sarebbe da dividere la torta… Chi mangia le briciole?

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms