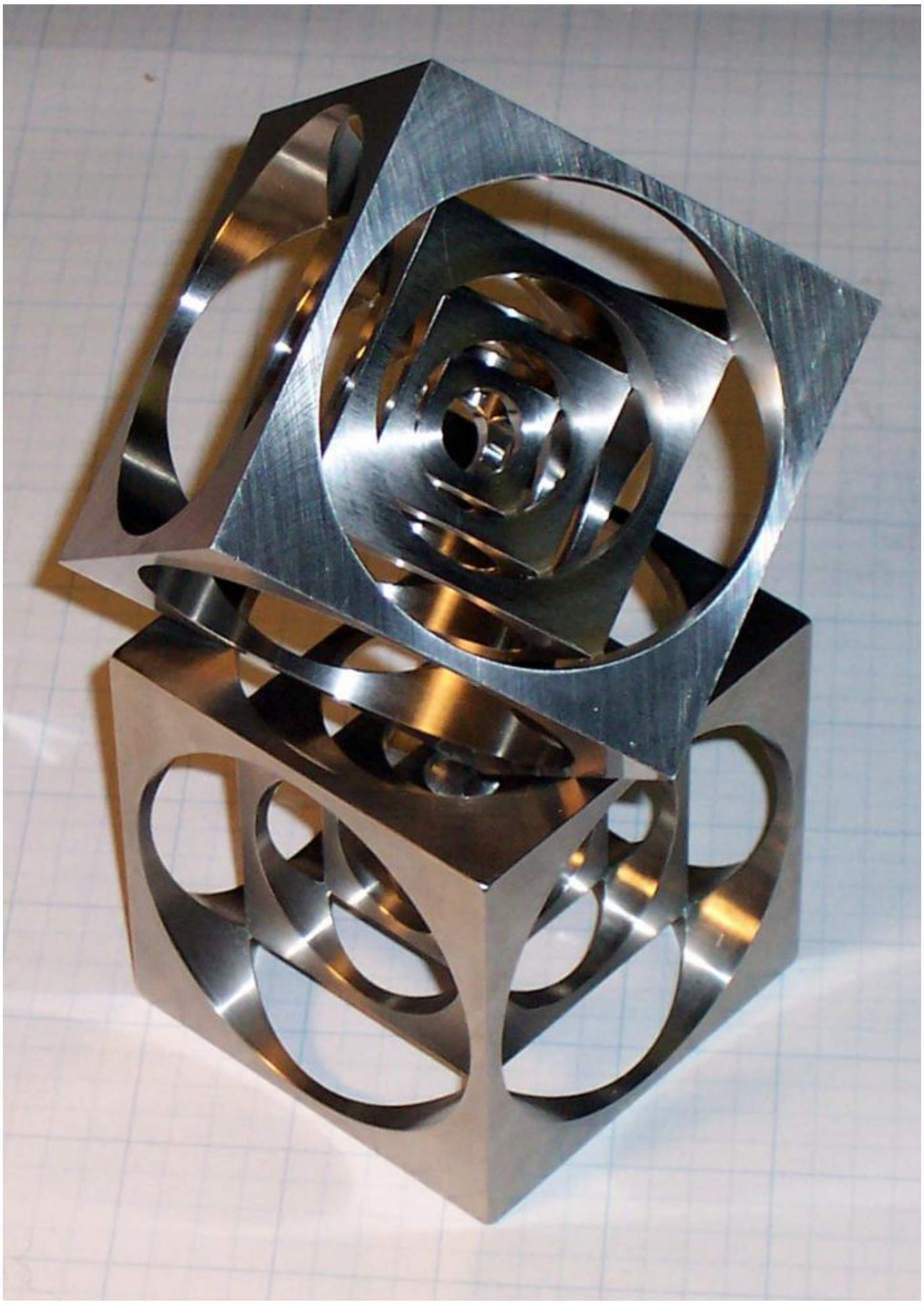
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 151 – Agosto 2011 – Anno Tredicesimo



Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

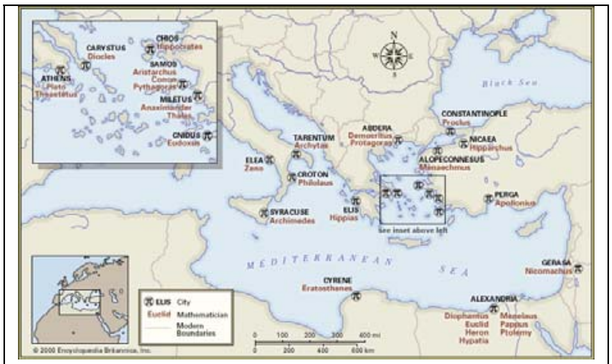
RM150 ha diffuso 2'794 copie e il 03/08/2011 per Google eravamo in 20'800 pagine.

I due oggetti in copertina sono noti in America come ***Cubi di Turner***: costruirli rappresenta(va) il rito di iniziazione nel passaggio da apprendista a fresatore provetto. Matematicamente non saranno una gran cosa, ma realizzarli senza l'aiuto di una macchina digitale non è facile. Essendo RM nato in una città in cui l'ingegneria meccanica ha raggiunto ottimi livelli, confessiamo la nostra ignoranza: esiste un equivalente italiano? E come si chiama?

1. Tempio greco

Lo spazio di Einstein non è più vicino alla realtà di quanto lo sia il cielo di Van Gogh. La gloria della scienza non risiede in una verità più assoluta della verità di Bach o di Tolstoi, ma nello stesso atto della creazione. Le scoperte dello scienziato impongono il loro ordine al caos, allo stesso modo in cui il pittore o il musicista impongono il proprio; un ordine che è sempre circoscritto ad aspetti parziali della realtà, e che è basato sul sistema di riferimento dell'osservatore, che cambia da epoca ad epoca, così come un nudo di Rembrandt differisce da un nudo di Manet. (A. Koestler) ****** *Φοβού τους Δαναούς και δώρα φέροντες.* (Virgilio).

Dove inizia? Quando inizia? Sono domande facili, in molti casi. Dove iniziano le strade consolari? Quando inizia la vita di Hilbert? Quando inizia il 2011, dove inizia il Po? Ma sono anche domande difficili, difficilissime, in molti altri casi. Le sorgenti del Nilo e del Rio delle Amazzoni sono decisamente meno evidenti di quelle che si trovano sul Monviso; le epoche storiche iniziano dove gli storici decidono di farle iniziare, e sono loro i primi a riconoscere l'assoluta fragilità della cesura, quando non direttamente l'assenza, l'impossibilità di separare davvero con una linea di demarcazione il prima dal dopo. E tanto più l'indagine si sposta indietro nel tempo e nello spazio, tanto più le questioni da indagare sono profonde e ritenute innate e proprie dell'uomo, tanto più è complesso, difficile, forse impossibile trovare una risposta. Quand'è che l'uomo ha davvero incominciato ad interrogarsi su cose non strettamente, immediatamente legate alla sua pura sopravvivenza? Quando ha cominciato a guardarsi intorno armato solo di curiosità, e non di paura o di fame? Un aneddoto, abbastanza triste per la verità, riporta lo stupore di un antropologo quando, raggiunta una primitiva e isolata tribù in qualche parte del mondo, riuscì ad imparare la lingua quel tanto che bastava ad una comunicazione essenziale. Ad un certo punto, chiese al capo del villaggio "*Secondo voi, perché si alternano il giorno e la notte?*" e l'indigeno, sorpreso, rispose "*Non ce lo siamo mai chiesto*". La curiosità è forse innata, forse no. Forse l'uomo ha ancora più bisogno di risposte che di domande, anche se sono certo quest'ultime il vero motore della conoscenza. Del resto, quasi tutte le comunità umane, alla domanda dell'antropologo, avrebbero risposto, per lo meno all'inizio della loro storia, con argomenti religiosi, o magici, o mitici. Dèi degli astri che si rincorrono; mostri che mangiano il sole e la luna ogni giorno, e ogni giorno la rendono agli uomini; volontà oscura o palese di numi benigni o maligni, artifici inspiegati e inspiegabili, potenze misteriose che tali dovevano restare. È difficile fare le domande; spesso, invece, è facile accettare le risposte: passivamente, acriticamente, come sempre è stato fatto: "*Così dicevano i nostri padri, così diremo noi ai nostri figli*". Eppure qualcuno, da qualche parte, in qualche piega della storia, avrà cominciato a rifiutare quest'approccio passivo, e a ritenere la propria curiosità degna di risposte migliori. E questo, con ogni probabilità, sarà successo un po' ovunque: nelle steppe d'Asia, nell'America precolombiana, nei misteriosi regni sub-sahariani dell'Africa; ci sarà sempre stato qualcuno poco convinto, che ha continuato a farsi domande, insoddisfatto delle risposte automatiche, mitiche, tradizionali. Ma gli individui isolati non bastano quasi mai. Deve accadere, per forza o per accidenti, qualcosa di diverso dall'inquietudine del singolo: una sorta di propagazione della curiosità, di contagio del pensiero, perché un'intera società cominci a non considerare più pazzi, ma saggi, coloro che si interrogano irrequieti sulla natura delle cose e dei fenomeni. E per quanto ne sappiamo noi, questa rivoluzione della conoscenza, per la prima volta, è dilagata nell'antica Grecia. I primi filosofi guardavano il mondo, e si interrogavano. E certo sbagliavano, anche: la "filosofia naturale" che pian piano costruivano non reggerebbe all'esame d'un laboratorio di fisica moderna, ma il loro metodo di interrogarsi, di rispondersi, era del tutto nuovo, e tutto sommato ancora attuale. E l'indagine continuava, si ampliava. Centinaia di interrogativi profondi, molti dei quali tuttora insoluti, venivano formulati per la prima volta. Dimostrazioni di spettacolare eleganza cominciavano a fiorire – e la cosa più stupefacente di tutte erano proprio i concetti di "dimostrazione" e di "sperimentazione" che prendevano piede – e un linguaggio finalmente diretto, comprensibile, che non chiamava in causa né il volere degli dei né le magie dell'insondabile natura, trasmetteva le conoscenze da persona a persona. Forse è successo anche prima, forse è successo anche altrove; ma, per quel poco che ne sappiamo, quasi tutta la nostra maniera di arrivare alla conoscenza scientifica nasce qui, più di duemila anni fa, nell'antica Grecia. Costruita da migliaia di sconosciuti, che hanno dato il loro contributo, come minimo, alla creazione del linguaggio adatto a comunicare la conoscenza. Innalzata da centinaia di uomini e donne il cui nome è giunto fino a noi, tanto era importante il loro pensiero. Portata all'eccelso da poche decine di personaggi dal talento davvero eccezionale, di cui serbiamo pochi ricordi e qualche opera, e certo la narrazione dei posteri, che di loro parlano con enorme ammirazione e rispetto.

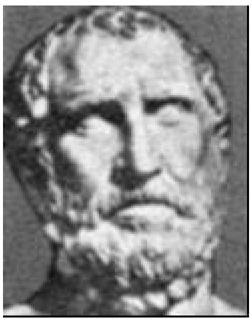


1 *I luoghi dei matematici greci*

Gli antichi scienziati Greci, quando la scienza non era ancora la stessa cosa che oggi noi chiamiamo scienza, ma che ne resta il fondamento essenziale, basilare. Gli antichi Greci, di cui non conosciamo quasi mai la data di nascita, e ai quali non possiamo dedicare un giorno speciale di celebrazione. Ma di qualcuno occorrerà parlare, anche solo per ricordarne il nome: anche se non è neppure detto che a loro, in fondo, essere ricordati interessasse poi molto. Anche la maniera di vivere la vita era diversa, a quei tempi. Chissà quale motto avrebbero voluto sulla loro lapide, come riassunto e coronamento della propria vita: forse…

…"*Un cammino di diecimila miglia comincia con il primo passo* [Lao-Tse]".

Ma come finisce? La cosa ci ricorda una vecchia battuta relativa al fatto se π sia maggiore o minore di *e* quando entrambi vengano scritti al contrario, ma conosciamo qualcuno che non avrebbe riso.


2 *Zenone di Elea*

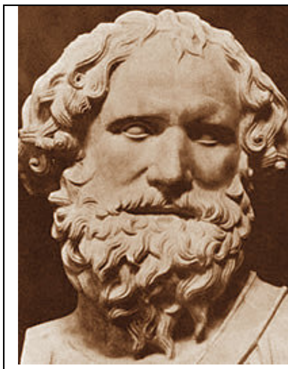
Zenone di Elea nasce in un giorno imprecisato di un anno intorno al 450 a.C.: le notizie sulla sua vita che ci

…"*So una cosa sola: di non sapere* [Socrate]".

Anche perché a quel tempo erano conosciuti con un nome, e qualche caratteristica particolare, come il posto da cui venivano o il lavoro che facevano: un po' come dire "Mario di Torino, panettiere". Per fortuna oggi giorno siamo tutti registrati alla nascita con il nostro bel numero di codice fiscale, nome e cognome ed indirizzo. Non era così nell'antica Grecia: un nome come Apollonio era talmente comune che quelli di cui ci è giunta notizia sono già tantissimi. Basta inserire "Apollonius" nella Wikipedia inglese per ottenere una sfilza di filosofi, poeti, scultori, grammatici, dottori, scolari, nonché generali e strateghi. È abbastanza evidente che in questa sede si parlerà di

…"*Una piccola pietra, lanciata in uno stagno, genera una grande onda* [Socrate]".

E sono davvero piccole le pietre che hanno a disposizione i primi indagatori della natura: ma sanno lanciarle molto bene, e le onde prodotte trasportano energia ancora ai giorni nostri.


5 *Eratostene di Cirene*

Eratostene nasce a Cirene, in quella che oggi è terra di Libia, nel 276 a.C. Ebbe dei maestri che oggi possono

sono pervenute sono di una nebulosità notevole, in quanto sappiamo che il padre si chiamava Teleutagora, ma non conosciamo il nome della madre; sappiamo che fu allievo di Parmenide, ma non siamo sicuri che, all'età di quarant'anni, abbia accompagnato il suo sessantacinquenne maestro a visitare un Socrate suppergiù ventenne; sappiamo che ha cospirato contro un tiranno, arrivando a tranciarsi la lingua con i denti e a sputarla in faccia ai giudici pur di non rivelare il nome degli altri congiurati, ma non sappiamo se il tiranno si chiamasse Nearco o Diomedonte: sappiamo che il suo primo scritto conteneva quaranta paradossi in difesa delle idee di Parmenide, ma nessuna sua opera è giunta sino a noi: l'immagine più probabile che ci è rimasta di lui mostra una persona indubbiamente tormentata, ma la fotografia è sfocata e il volto appare privo di peculiarità: se lo incontrassimo per strada, molto probabilmente avremmo notevoli difficoltà a riconoscerlo. Quello che sappiamo con certezza è che in vita si è dato un gran daffare: il che, se andiamo a vedere quale fosse il suo scopo, suona quantomeno curioso. Infatti tutto il lavoro svolto da Zenone (ivi inclusa l'invenzione della logica e della dialettica, secondo Diogene Laerzio e Hegel *[e, una volta tanto, siamo d'accordo con Hegel]*) volge a difendere la filosofia del maestro Parmenide dagli attacchi dei pitagorici, che affermano la molteplicità dell'essere in quanto uno specifico Apollonio, quello di Perga, nominato già ai suoi tempi "il Grande Geometra".

3 *Apollonio di Perga*

Avendo già utilizzato tutte le coordinate sufficienti ad identificare un greco antico, siamo ancora parecchio fortunati: il nostro eroe scrisse il primo e più esteso trattato sulle *coniche*, in ben otto libri, di cui la maggior parte sono giunti fino a noi, se non nell'originale greco, almeno nelle traduzioni allora prodotte in arabo: del resto, la matematica araba ebbe il suo massimo fiorire proprio in un periodo parallelo a quello greco, e quasi tutti i testi dei filosofi greci ebbero traduzioni in arabo. Il centro della cultura in età precristiana era decisamente più a sud di Roma.

Apollonio dissemina le introduzioni ai vari libri di dettagli personali, e così sappiamo dei suoi viaggi e delle sue amicizie: pur essendo nato a Perga (che si trova nell'attuale Anatolia, in Turchia), visse la sua gioventù ad Alessandria (l'attuale Egitto), dove studiò e in seguito insegnò alla scuola fondata da Euclide, e visitò Pergamo (anche questa in Turchia) dove incontrò l'amico Eudemo (anche qui c'è un grande rischio di omonimia: esiste infatti un famoso geometra tanti di discipline lontane e diversissime tra loro, ma che a quei tempi, senza dubbio, distavano assai meno nell'immaginazione degli uomini: l'erudito Lisania di Cirene; il filosofo Aristone di Chio, già discepolo di Zenone; il grande poeta Callimaco. Dopo cotanti maestri, Eratostene trascorse alcuni anni ad Atene, sempre per formarsi, e solo dopo, ormai dotato di solida cultura e di erudizione, si mosse verso Alessandria e la sua leggendaria Biblioteca. Vi si installò, studiando e lavorando, al punto da divenirne il terzo bibliotecario, succedendo proprio al suo maestro Callimaco.

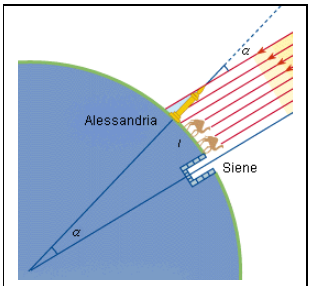
La sua erudizione era universalmente riconosciuta, ma anche un po' dileggiata: veniva scherzosamente chiamato "Beta", perché nell'opinione comune risultava essere sempre il "secondo" migliore nelle varie discipline: c'era sempre un matematico più acuto, un poeta più lirico, un saggio più saggio. Ma se anche fosse stato vero – e abbiamo qualche ragione di dubitarne – gli "Alfa" che lo precedevano erano presenti solo in una classifica dello scibile, mentre lui era secondo in tutte. E, come tale, spaziava in interessi diversi: nel *Platonicus*, una sua opera, si diverte ad esaminare la matematica implicata nei dialoghi di Platone; ma si occupa a fondo di almeno uno di quelli che oggi sono noti come i "problemi classici della geometria", e segnatamente della duplicazione del cubo, al punto che fonti successive alla sua morte arrivano a produrre una sua lettera, numero: i suoi argomenti mirano a provarci che, anche se la negazione del movimento e della molteplicità a prima vista sembra assurda, la loro ammissione conduce ad assurdità ancora più gravi nascoste, ma non risolte, nel linguaggio ordinario: il perno di questi argomenti si basa sulla dimostrazione che sia nella definizione di movimento che in quella di pluralità si annida il delicato e pericoloso concetto di infinito, e affrontarlo armati unicamente della logica del senso comune porta a delle assurdità. Per quanto riguarda la negazione del movimento, immaginiamo che un mobile debba percorrere un dato segmento: prima di averlo percorso tutto, dovrà percorrerne la metà; prima di percorrerne la metà, dovrà percorrerne un quarto, e prima ancora un ottavo, un sedicesimo... È facile, oggi, dare la risposta che la somma di questa serie infinita converge a 1, ma questo, al più, può risolvere il paradosso di Achille e della tartaruga. Qui, il paradosso consiste appunto nel considerare la serie *al contrario*: in un linguaggio certamente impreciso ma a noi più consono, devono essere sommati un numero infinito di termini insignificanti prima di arrivare ad un termine significativo: il fatto in apparenza semplicissimo del movimento si divide in infiniti moti, e da questa infinità nascono le difficoltà concettuali che rendono perplesso chiunque applichi il ragionamento.

La negazione della molteplicità segue, in un certo senso, lo stesso percorso: se del tempo, Eudemo di Rodi, che è stato autore di una "Storia della Geometria", ma non ha niente a che fare con il nostro, che sembra fosse solo un amico interessato agli studi di Apollonio) con il quale ebbe intensi scambi sull'argomento che più lo interessava, la geometria.

Ed è per le *Coniche*, che il nostro eroe è ricordato: un'opera che contiene tutto lo scibile a proposito delle bellissime curve ottenute secando un cono infinito. Tutto quello che gli antichi sapevano di parabole, ellissi, iperboli e circonferenze, racchiuso in otto libri colmi di dimostrazioni, spiegazioni, proprietà. Certo, alcuni di questi teoremi erano già noti a Euclide e ai predecessori, ma la maggior parte erano scoperte dell'autore, che orgogliosamente se ne vanta:

… i più originali e belli tra questi teoremi sono nuovi, e fu la loro scoperta a farmi rendere conto che Euclide non aveva completato la sintesi del luogo di punti rispetto a tre e quattro linee, ma solo una sua parte e senza successo; poiché non sarebbe stato possibile completare una tale sintesi senza l'aiuto dei nuovi teoremi da me scoperti.

Anche se non gli erano note le moderne tecniche analitiche e l'attuale modo di descrivere le curve con equazioni, l'intera trattazione è così moderna che – opportunamente tradotta nel linguaggio odierno – potrebbe essere tranquillamente essere considerata il compendio di tutto ciò che ancora oggi è noto ovviamente falsa, in cui si espone un metodo e un marchingegno ideati da Eratostene per risolvere il problema. E la cosa non deve stupire: Eratostene era anche bravo a costruire macchine, non solo a scrivere papiri e teoremi. Si interessò ai numeri primi: ancora oggi il "crivello di Eratostene" viene ricordato nelle scuole quando viene introdotto il concetto di numero primo. Ma fu poeta, geografo, e soprattutto astronomo. Nel Medioevo potevano forse esserci dubbi, ma gli antichi Greci non dubitavano, in verità, che la terra fosse rotonda. Eratostene lo sa, e avanza un'ipotesi astronomica ancora più sorprendente: e cioè che il Sole sia così distante da noi da poter considerare i suoi raggi paralleli, e non divergenti. E' un'ipotesi coraggiosa, che già sottintende la consapevolezza in Eratostene di distanze spaventose tra il nostro mondo e la sua stella, ma gli basta per tentare di misurare la Terra.

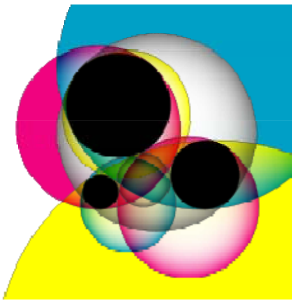


6 *La misura della Terra di Eratostene*

Siene, l'odierna Assuan, si trova a sud di Alessandria, ma sul Tropico del Cancro. Questo significa che il giorno del solstizio d'estate, a mezzogiorno, il sole è esattamente allo zenit, e il suo disco si riflette anche nel fondo dei pozzi. Invece ad Alessandria, sede della Biabbiamo due entità distinte, deve esistere uno spazio intermedio che le separa: questo spazio è un qualcosa distinto dalle due entità, e quindi devono esistere altri due elementi che separino la prima entità dallo spazio e lo spazio dalla seconda entità; ma allora... e l'ammissione di due entità distinte porta all'ammissione di infinite entità. A questo punto, se le parti che compongono un segmento sono infinite, o sono nulle o non sono nulle: nel primo caso la lunghezza del segmento è zero, nel secondo caso è infinita, e non sono date situazioni intermedie: i concetti medesimi di movimento e di lunghezza, per l'introduzione dell'infinito, perdono di significato. Questi argomenti sono la base della diffidenza che, a partire dai greci, ha sempre seguito il concetto di infinito, costringendoli a sottili differenziazioni tra l'infinito *in potenza* e quello *in atto*, arrivando sino a Bernard Bolzano che intitola appunto il suo libro *Paradoxien des Unendlichen* (*I paradossi dell'infinito*: lo trovate – solo in tedesco, purtroppo – su Google Books): l'avvicinamento a questo concetto, come ci insegna uno dei nostri più affezionati lettori, va sicuramente affrontato con calma.

Paradossalmente – ma da Zenone non potremmo aspettarci altro –, proprio questa appassionata ricerca delle contraddizioni in difesa di Parmenide segna l'inizio della fine della filosofia eleatica: più che un confondersi del ragionamento logico nella realtà, in cui il *logos*, il pensiero e sull'argomento: come generare normali ad una conica da un punto esterno, definizioni e metodo di calcolo dei centri di curvatura, definizioni di luoghi di punti e proprietà, asintoti.

L'interesse del *grande geometra* non si ferma alle coniche, molti sono gli oggetti che da lui prendono nome: i cerchi e i problemi di Apollonio, per esempio, sono ancor oggi tra i più belli nel mondo della geometria anche la bellezza delle figure che li risolvono.



4 *Soluzioni del problema di Apollonio*

In ogni caso di Apollonio sono noti molti altri testi con lo studio di sezioni, tangenti, ma anche di numeri irrazionali, di approssimazioni di π (a quanto pare ne trovò una migliore di quella trovata da Archimede), e risultati ottici: in questo campo fu lui a scoprire che raggi di luce paralleli sono riflessi in un singolo fuoco da uno specchio parabolico, e non sferico, come si pensava fino a quel momento.

Come se non bastasse, lo studioso di Perga fu anche un valente astronomo, che applicò con successo i suoi studi geometrici per comprendere i moti apparenti degli astri nel cielo, i suoi studi furono la base del lavoro di Tolomeo.

Ad Apollonio è anche attribuita... blioteca e di Eratostene, in quel giorno e in quell'ora gli obelischi disegnano comunque una piccola ombra. Ombra che corrisponde all'angolo che i raggi del sole fanno con la verticale, angolo che, pensa Eratostene, corrisponde allora all'angolo che, dal centro della Terra, sottende l'arco di meridiano che separa Alessandria da Siene. Basta allora misurare quell'angolo (circa 7,2°) ricordare la distanza tra le due città (5500 stadi) e fare l'elementare proporzione tra 7,2 e 360 per capire quale sia la circonferenza della Terra. La misura che Eratostene ottiene è la prima misura scientifica di un corpo celeste, e per capire il grado di precisione ottenuto la difficoltà maggiore è storica, più che matematica: occorre sapere con buona approssimazione a quanto corrispondesse uno stadio, al tempo di Eratostene. I pessimisti dicono che il bibliotecario si sbagliò di quasi il 15%, ma studi più accurati dicono oggi che l'errore dovrebbe essere stato inferiore all'1%. Lo avesse saputo, gli avesse dato ascolto Cristoforo Colombo, probabilmente non avrebbe neppure tentato la via delle Indie. Eratostene, al pari del genovese, amava la geografia: esplorò il sud dell'Egitto, annunciò che il gran fiume era formato dalla congiunzione di due grandi affluenti, ipotizzò che le sue sorgenti fossero calmierate da grandi laghi, e che il livello di questi, su base stagionale, fosse ciò che regolamentava le piene e le secche della grande arteria che nutriva l'Egitto. Per descrivere le genti e i l'essere rappresentano un'unità, Zenone pone le basi per separare il ragionamento dal reale, cadendo quindi nel suo stesso paradosso relativo alla molteplicità. Ma gettando le basi di quella che diventerà l'astrattezza della logica e, quindi, di tutta la matematica.

Morì attorno al 425 a.C., ad Elea. Uno dei più grandi filosofi greci.

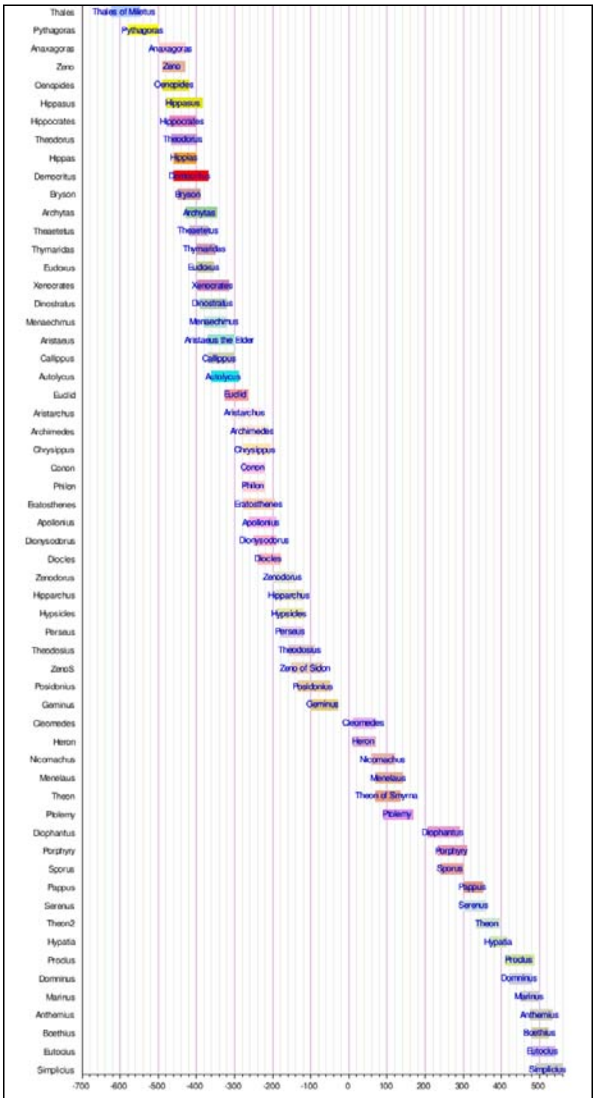
buita l'invenzione di uno speciale tipo di meridiana particolarmente accurata, che utilizza una sezione parabolica per ottenere una precisione superiore nella definizione delle ore, detto hemicyclium.

Morì attorno al 190 a.C., in Alessandria. Forse il maggiore tra i geometri greci.

luoghi, istituì i concetti di longitudine e latitudine, le coordinate sferiche, che ancora oggi usiamo. Quando divenne cieco, si narra che decidesse che era giunto il momento d'andarsene e, semplicemente, si lasciò morire di fame.

Era il 194 a.C., ad Alessandria. Uno dei grandi scienziati greci.

Zenone di Elea, Apollonio di Perga, Eratostene di Cirene, greci. Eppure, legati come siamo alla geografia politica dei nostri tempi, a un nazionalismo che crediamo antico ma che tutto sommato è relativamente giovane nella storia, potremmo stupirci che l'Elea di Zenone si trova in Italia, Europa; che la Perga di Apollonio è situata in Turchia, Asia; che la Cirene di Eratostene sta in Libia, Africa. Tre nazioni diverse, addirittura tre continenti diversi. Eppure, i tre protagonisti di questa storia sono indubbiamente greci, perché figli della cultura greca. Anche se Zenone è un lucano, e visse in quel quinto secolo che vide la nascita delle grandi religioni asiatiche, di Lao-Tze, e nel mediterraneo infuriavano le guerre persiane; anche se Apollonio e Eratostene avevano fatto in tempo a vedere la caduta di Cartagine e il sorgere di Roma; e ci saranno greci – di cultura greca – a lungo, anche durante l'impero romano e perfino oltre, tra Alessandria e l'Egeo, fin oltre il quinto secolo dopo Cristo. Tre continenti, più di mille anni di ricerca della conoscenza, di indagine della natura e della mente, prima della sosta medievale. Perché di sosta si tratta, almeno in parte: il Medioevo è periodo ricco di fascino, molto meno oscuro di quanto fosse dipinto nei tempi andati, come hanno dimostrato e dimostrano gli storici contemporanei: non c'è quasi mai una vera cesura, nella storia dell'uomo, ed è inevitabilmente riduttivo tentare di generalizzare, di dipingere e fissare come un millennio intero più o meno importante d'un altro, perché inevitabilmente si riscopre che ogni giorno è figlio del precedente, e padre del successivo. Ciò non di meno, è un errore anche pensare che il progresso – sotto qualsiasi

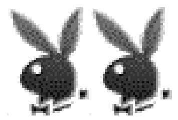
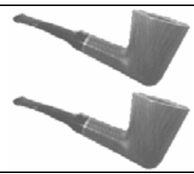
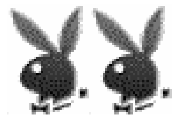


7 *Matematici Greci*

aspetto si voglia intendere questa parola multipla e duttile – non è necessariamente sempre inevitabile, sempre in crescita, sempre verso il migliore dei mondi possibili. Esistono davvero periodi sonnolenti e periodi iperattivi, quasi magici, in cui i circoli virtuosi si alimentano e si moltiplicano.

Per quel che riguarda la scienza, la conoscenza del mondo così come noi la conosciamo, l'epoca, le opere, il pensiero della cultura greca degli antichi resta un momento irripetibile.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silver-brahms**
Non mi piace il Master Mind			
Le probabilità che…			

2.1 Non mi piace il Master Mind

Mi confondo sempre, quando qualcuno comincia a dirmi "due giusti e uno a posto" o "uno giusto e tre a posto" o cose del genere: al secondo passaggio, di solito scambio i numeri e comincio a rispondere con emerite asinate. Un *pochino* meglio vanno i giochi in cui di numeri ve ne rispondono solo uno, ossia di quanti ne avete indovinati. Non solo, ma se al posto dei colori ci sono i numeri, la cosa rischia di risultarmi addirittura simpatica. I VAdLdRM[1], che con il MasterMind se la cavano ragionevolmente bene, hanno deciso di inventarsi qualcosa per distrarre il paparino.

"Pater, io e Fred abbiamo scelto **6** numeri diversi tra loro compresi tra **1** e **49**, estremi inclusi: tu puoi fare delle ipotesi, scegliendo un sottoinsieme dei numeri e proponendoceli: noi ti diremo quanti (non quali) sono quelli giusti. Pronti?"

"Mah, mi sembra una normale variazione sul MasterMind, anche se almeno non devo distinguere tra quelli a posto e quelli fuori posto ma giusti. Proviamo, dovrebbe essere abbastanza veloce".

E, in effetti, sto andando piuttosto bene. Secondo voi, quale strategia mi permette di indovinare i 6 numeri con il minimo di tentativi?

2.2 Le probabilità che Alice...

...si arrabbi appena sente parlare di *urne*: come ogni lettore sa, sono esattamente pari a 1.

In effetti, non ci risulta siano mai stati proposti dei giochi che, in presenza di urne, non prevedano un problema di probabilità con conseguente spegnimento dei neuroni Riddleschi deputati al far di conto: potete allora immaginare la nostra felicità (un po' meno di Alice, che adesso deve risolverlo) quando abbiamo trovato questo problema.

Facciamo le cose in grande: abbiamo *tre* urne, due delle quali sono vuote mentre la terza contiene $3N$ palline; indicheremo questo stato delle urne come $\{0;0;3N\}$.

[1] Notizia a margine per i loro *fan*: leggera *défaillance* di Fred (greco a settembre), ma una volta tanto buon risultato di Alberto alla Maturità (...ragazzi, sembra ieri che andava in giro in passeggino, e al secondo anno di questa rivista parlavamo di Topino Tosto, la sua maestra delle elementari... stiamo invecchiando): di aprire un libro per almeno guardare le figure ne riparliamo a settembre, per il test di ammissione a Veterinaria. Per citare Rabelais, "...se non fosse per le signore bestie, vivremmo tutti come dottori..."

Scopo di Alice è arrivare alla configurazione $\{N;N;N\}$ in N mosse, spostando però alla i-esima mossa esattamente i palline da un'urna ad un'altra urna (quindi vietato metterne "un po' qui e un po' lì", da una sola estrazione); quello che io e Doc ci stiamo chiedendo, però, è per quali valori di N la cosa sia possibile: vorremmo un valore abbastanza piccolo da non scoraggiarla subito, ma anche abbastanza grande da permetterci di dar fondo alle scorte di birra senza che lei se ne accorga... OK, forse non c'entra niente, ma la sequenza $1;1+2=3;\ 1+2+3=6;\ 1+2+3+4=10;\ldots=15;\ 21$ eccetera ha l'aria piuttosto "bucata": non vorremmo, buttando un numero a caso, restare con un palmo di naso e la dimostrazione che è impossibile.

Ora, se volete la birra, potete provare a dare una mano ad Alice.

3. Bungee Jumpers

Provate che, se $a+b=1, a,b \in \Re^+$, allora

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2},$$

e determinate per quali valori di *a,b* vale l'uguaglianza.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Era Una Notte Buia e Tempestosa

Lo dicevamo giusto il numero scorso. Quando l'estate regna e domina, le attività neuronali sembrano allentarsi un po', rilassarsi, cedere di fronte all'avanzare della pigrizia afosa, né più né meno di quelle fisiche. E così rimaniamo un po' perplessi, perché è da tempo che vorremmo recensire questo sublime libello, e non vorremmo proprio farlo attendere oltre; d'altro canto, ci dispiacerebbe se i lettori curiosi della Prestigiosa Rivista di Matematica Ricreativa fossero in numero inferiore del solito, in questo mese sacramentato dalla nullafacenzia. Perché il libretto merita.

Ma è un libro insolito, d'autore insolito: forse è giusto che se ne parli in un periodo insolito. È libro solo apparentemente leggero, e allora forse è giusto raccontarlo in questo mese numero otto, che è solo apparentemente ozioso, ma che cova già, come sempre, gli acuti germogli del risveglio settembrino.

4.1 Giovanni Keplero aveva un gatto nero

«Giovanni Keplero
Aveva un gatto nero
Che storceva le vibrisse
Se sentiva cerchio e non ellisse»

Immagino conosciate tutti Popinga. Se invece non lo conoscete, è bene rimediare. Cominciate allora col Popinga più universalmente noto, quel Kees Popinga che riveste il ruolo del placido assassino in "*L'uomo che guardava passare i treni*" di Georges Simenon: non c'è Maigret (non può proprio esserci, a ben vedere), ma Popinga basta e avanza: è uno dei migliori Simenon.

Dopo questa dovuta presa di familiarità coll'eroe eponimo, andate adesso a conoscere il Popinga più noto del web: per farlo, è sufficiente fare un salto sul suo blog, http://keespopinga.blogspot.com/, e da quel sito capirete molte più cose di quante se ne possano raccontare in questa rubrica.

La frase che troneggia sulla sua home-page è infatti: "*Scienza e Letteratura: terribilis est locus iste*", e non v'è dubbio che Popinga mantenga la promessa. I suoi post navigano regolarmente sul crinale affascinante e poco esplorato in cui le narrazioni diventano scienza e le scoperte scientifiche sono narrate come racconti. Una miscela che riesce a sorprendere e affascinare, ogni volta, i partigiani di entrambe le culture. Certo è che sarebbe bello avere avuto come insegnante, ai tempi del liceo, il professor M.F. Barozzi: chi sa esplorare i misteri della scienza e narrarli con la maestria del letterato deve per forza essere in grado di rendere affascinante anche più soporifera delle lezioni, nonché essere dotato di un gran bel senso dell'umorismo.

E, guarda caso, qualche giovane studente questa fortuna ce l'ha davvero: Popinga insegna, e un po' per rendere i suoi insegnamenti meno ripetitivi, un po' per puro ed egoistico desiderio di rivincita contro l'apparente immobilità ciclica della didattica, si è dedicato a comporre versi che riguardano – e spesso riassumono – principi e leggi della fisica, postulati e teoremi di matematica. Brevi composizioni, rigorosamente allineate alla metrica prescelta (una "dotta premessa" del suo libro spiega e illustra con dovizia di esempi e dettagli cosa siano i limerick, i cleryhew, i misteriosi fib, nonché le disgraziate incarringhiane e i versi maltusiani), ma vergognosamente divertenti.


8 *Popinga, o MFB, se preferite*

E, inevitabilmente, sono anche un gioco da giocare. Se il cleryhew che dà il titolo al libro (riportato in testa a quest'articolo) è di facile e immediata lettura – a meno che tra i lettori di RM non vi sia qualcuno che abbia dimenticato che è stato proprio Keplero a scoprire che le orbite dei pianeti sono ellissi e non cerchi – altri componimenti sono decisamente più impegnativi:

Sentite questo "Destino dei bosoni":

Il fotone migliore della sua generazione
Era stanco del gruppo, voleva distinzione
Dai fermioni canzonato
Si fece scoraggiato
E gli sembrò un principio d'esclusione

Solo un limerick, ma a voler scriverci le note a piè di pagina per una classe di liceo, ci vuole un intero corso introduttivo di meccanica quantistica. Naturalmente, un'intera sezione è dedicata alla matematica: questo si intitola "La tentazione".

C'era un asintoto dalla fede ispirato
Che fece voto di non esser toccato
Ma davanti a una cotangente
Bella, sinuosa, suadente
Dovette ammettere di sentirsi tentato

Come spesso accade quando la chiave di lettura è multipla ed intelligente, si rischia perfino di esagerare nell'attribuire significati ai testi. Prima ancora di entrare in possesso del libro, il vostro umile recensore si è imbattuto in questo fib (senza sapere cosa fosse un fib) dal misterioso titolo "Agorafobia", ma dall'esplicativo sottotitolo "Interazione Forte":

È
Una
Forza
Crudele
Che ci trattiene
In un piccolo locale
All'interno di un complesso edificio

Come dice l'autore, questi fib sulle forze fondamentali (certo, vi sono anche quelli per l'interazione elettromagnetica, debole, gravitazionale e di Higgs) giocano sulla doppia lettura, al pari degli indovinelli e delle crittografie. Colto dall'entusiasmo, chi scrive era anche convinto che l'interazione forte evocata dai versi fosse splendidamente sottolineata dalla forma grafica della poesia: al pari della celebre "The Bomb" di Gregory Corso, che era una lunga poesia i cui versi disegnavano graficamente il fungo atomico, pareva che il componimento di Popinga riproducesse il grafico dell'interazione forte, molto intensa a distanze nucleari ma con un rapidissimo affievolimento al crescere della distanza. In realtà, la forma grafica della poesia è stabilita a priori dal suo essere un fib, ovvero una composizione le cui sillabe si basano sulla serie di Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13… il primo e il secondo verso devono essere composti d'una sola sillaba, il terzo da 2, il quarto da 5, e così via. Ne segue che anche un fib dedicato a una gaussiana avrebbe la forma di quello appena citato per l'interazione forte, con gran scorno delle capacità deduttive del vostro recensore.

Ma forse è un buon segno: tutti i giochi intelligenti nascondono altri giochi, anche involontari. Il libro del professor Barozzi, in arte Popinga, è al tempo stesso libro di scienza, di poesia, di umorismo. Far convivere le tre cose è davvero meritorio, riesce solo ai grandi.

Titolo	Giovanni Keplero aveva un gatto nero
Sottotitolo	Matematica e Fisica in versi
Autori	Marco Fulvio Barozzi (Popinga)
Editore	Scienza Express
Collana	Narrazioni
Data Pubblicazione	Marzo 2011
Prezzo	9 Euro
ISBN	978-88-969-7302-8
Pagine	133

5. Soluzioni e Note

Agosto.

Come ci siamo arrivati non lo sappiamo neppure noi, alla fine di questo numero. L'unica cosa certa è che la Redazione, bellissima e in ottima forma, si è riunita come ogni estate in Svizzera, ed ha raggiunto altitudini mai tentate prima.

Nella foto di repertorio, che non può mancare in questo numero, i nostri eroi – congelati ma felici – si fanno fotografare a più di 3'400 metri di altitudine, vicino all'Eiger e allo Jungfrau, con lo sfondo del Mönch.

9 *La Redazione e il Mönch.*

Abbiamo altre foto forse più belle[2], che provano proprio che siamo stati tutti insieme e che, per la prima volta nella storia di RM, abbiamo anche *lavorato* insieme ad RM. Però il numero che state leggendo è una bellissima prova del fattaccio, per cui non vi servono altre foto, sappiate che – complice il bel tempo[3] proposto dall'estate svizzera – siamo stati tutti e tre davanti a due PC e tre telefonini ad evadere mail, scrivere e commentare blog, programmare pezzi di questo numero.

Come al solito, però, la maggior parte del lavoro che vi trovate a tutto schermo o tra le mani è prodotto in ore rubate al sonno e alle nostre famiglie, quindi – soprattutto in questo periodo tanto vacanziero – spero mi perdonerete se ancora una volta questa parte della rubrica sarà velocissima.

Prima di lasciarvi, un bellissimo quesito che ci è stato proposto da ***Eric***, e che regaliamo anche a voi:

> Questa catena di numeri ha due particolari :
>
> - tutti i numeri sono differenti
> - nessun numero contiene una lettera del numero che segue

[2] E non si sa mai che qualcuna raggiunga il sito, uno di questi giorni: ci mettiamo una vita, ma prima o poi l'aggiorniamo, la nostra pagina della Redazione.

[3] No, se non avete mai vissuto in Svizzera non potete saperlo, che questa frase è ironica. Quest'estate dalle mie parti piove. E anche tanto, quindi la giornata di sole in cima all'Europa è stata una fantastica eccezione. Se passate da queste parti, vi passo il link http://jungfrau.ch/. Da non perdere, veramente.

> ZERO - UNDICI - TRE - DODICI - SETTE - UNO - SEI - QUATTRO - DIECI - OTTO - DUE - OTTANTA - SEDICI - OTTANTUNO - MILLE - QUARANTA - MILLE E DIECI - QUARANTAQUATTRO - MILLE E SEDICI - QUARANTOTTO.
>
> Questa catena e costituita da 20 elementi. Troverai una catena più lunga?

Buon divertimento, se volete provarci!

E con questo passiamo alle vostre soluzioni dei problemi del mese.

5.1 [149]

5.1.1 Da un problema di aprile

Questo problema non aveva quasi trovato una soluzione nel numero scorso. Per fortuna abbiamo ricevuto dei nuovi commenti, ma prima di proporveli, ecco il contenuto del quesito:

> *I VAdLdRM giocano con un dado (a sei facce e "onesto"): cominciano a lanciare il dado con l'accordo che la partita finirà quando verrà ottenuto un punteggio strettamente minore del precedente; insomma, lanciano il dado e se il risultato (dal secondo tiro in poi, evidentemente) è maggiore o uguale al tiro precedente, si va avanti. I Nostri tengono anche un punteggio; si definisce "punteggio" la somma dei valori del dado ottenuti nei vari tiri di una partita (con l'esclusione dell'ultimo, quello perdente): cosa vi aspettate, in media, come punteggio??*

No, non finisce qui:

> *Alberto propone il seguente gioco: Fred lancia il dado e all'inizio di ogni partita mette una moneta da dieci lire. Quando la partita finisce, se il punteggio (come definito prima) è minore di dieci, Fred perde e Alberto si prende le dieci lire; se è maggiore o uguale, Fred si riprende la moneta e vince dieci lire da Alberto. Conviene il gioco a Fred?*

No, non ancora...

> *Come cambiano i numeri, se cambia il dado? Nel senso, per avere gli stessi risultati, usando un intero set di dadi da Dungeons & Dragons (per quelli che non lo sanno, rispettivamente da 4, 6, 8, 12 20 e 100 facce), quali sono i valori per i quali conviene a ciascuno dei due il gioco?*

Quasi nessuna risposta, il mese scorso, l'unico a scriverci era stato ***Alberto R.***, che però ci ha solo inviato un risultato senza spiegazioni, lo riportiamo solo velocemente:

$$\left(\frac{1}{5}\right)\sum_{n=1}^{6} n\left(\frac{6}{5}\right)^{n-1} = 7.985984$$

Il Capo, interrogato (o meglio rampognato per aver proposto un problema tanto complicato nel mezzo dell'estate), aveva proposto:

> OK, cerchiamo di renderlo più facile: nel calcolo del punteggio viene contata anche la giocata perdente. A questo punto cosa mi dite del gioco?

A me non sembrava per niente un suggerimento, e in effetti non ha reagito nessuno. Invece chi ci ha scritto, un po' stupito, è stato ***GaS***, che aveva trovato una soluzione, ma non aveva voluto inviarla perché in forma iterativa e non chiusa. Ebbene, eccola qui:

> Consideriamo il caso generale di un dado ad N facce e cerchiamo il valore S_X corrispondente al punteggio medio atteso *dopo* aver ottenuto X ad un tiro di dado.
>
> La cosa più semplice è partire da S_N: dopo aver ottenuto il punteggio massimo (N) la sola possibilità di continuare il gioco è di ottenere ancora il punteggio massimo,

si ha quindi 1 possibilità su N ed il punteggio aumenta di $N+S_N$. In definitiva: $S_N=1/N\cdot(N+S_N)$ da cui si ricava:

$$S_N=N/(N-1) \qquad [1]$$

Consideriamo ora il generico S_X: dopo aver avuto il punteggio X ci ritroviamo nelle stesse identiche situazioni in cui ci troviamo dopo aver ottenuto X+1 più la possibilità, con probabilità di 1/N, di avere ancora il punteggio X. Si ha quindi: $S_X=1/N\cdot(X+S_X)+S_{X+1}$

Da cui si ricava:

$$S_X=X/(N-1)+N/(N-1)\cdot S_{X+1} \qquad [2]$$

La [2] ci fornisce quindi una semplice formula iterativa per calcolare le S_X per ogni $1\leq X\leq N-1$ a partire dalla S_N data nella [1].

Il problema ci chiedeva però di calcolare il punteggio medio "globale", ciò è facilmente ottenuto considerando che l'inizio del gioco è equivalente alla situazione che si ha dopo aver ottenuto 1 sul dado, il valore cercato è quindi proprio pari ad S_1!

S6	1,2
S5	2,44
S4	3,728
S3	5,0736
S2	6,48832
S1	7,985984

Per N=6 si ha quindi il risultato in tabella qui a destra, e quindi a Fred non conviene giocare in quanto $S_1<10$.

Per altri N si ottengono invece i seguenti punteggi medi nella tabella più in basso.

N=4	6,16
N=8	9,91
N=10	11,86
N=12	13,84
N=20	21,78
N=100	101,73
N=500	501,72
N=1000	1001,72
N=10000	10001,72
N=20000	20001,72

A Fred converrebbe quindi giocare se solo avesse un d10 a portata di mano (basterebbe anche un d9 ma non ricordo di averlo mai visto...).

Dalla tabella si nota un andamento asintotico per cui il valore atteso del punteggio è circa pari ad N+1,7 che risulta un'ottima approssimazione già per N molto bassi. Non sono però riuscito a dimostrare analiticamente tale risultato, e tantomeno a trovare l'esatto valore asintotico, e quindi sarei molto curioso di vedere una tale dimostrazione che immagino parta da una risoluzione in forma chiusa, non quindi iterativa, del problema.

Speriamo che a qualcun altro venga voglia di contribuire!

5.2 [150]

5.2.1 Forse era meglio prima

Qui sarà durissima fare il riassunto del problema, il Capo l'ha arricchito di tali e tanti dettagli sulle rotonde torinesi... comunque ci provo:

> *Immaginate che sia possibile parcheggiare in una rotonda a margine dell'aiuola centrale, e che le zone di parcheggio siano delimitate in questo modo: tracciando le righe ogni due metri, ricavando cento spazi. Immaginiamo poi che l'auto standard sia lunga quattro metri. Ogni utente del parcheggio parcheggerà quindi se e solo se trova due spazi adiacenti. Le nostre macchine arrivano una per volta, e si piazzano in un qualsiasi "buco" da due spazi adiacenti che trovano, scelto a caso se ce ne sono più di due consecutivi ma comunque rigorosamente allineati alle strisce. Quante macchine ci si aspetta di trovare, a parcheggio pieno, ossia con solo degli spazi unitari rimasti liberi?*

Beh, proprio a proposito del campanilismo del Capo, ***Alberto R.*** ci ha fornito una versione piuttosto provocatoria:

Abbiamo un parcheggio anulare, formato da 100 semistalli. Ogni auto occuperà due semistalli adiacenti. Si chiede il numero medio di semistalli che rimarranno isolati e quindi vuoti. Evidentemente la domanda si riferisce alla situazione a regime (stato stazionario), cioè dopo esaurito il transitorio che inizia al momento in cui il parcheggio, appena aperto al pubblico, è ancora tutto vuoto.

Il problema dipende dalla città in cui è collocato il parcheggio, ma i redattori, in palese violazione della par condicio tra i loro lettori/solutori, l'hanno ubicato a Torino (perché io, che abito a Roma, dovrei conoscere la situazione del traffico di Torino?). Mi sento quindi in diritto di trasferire il parcheggio a Roma. (buoni! che in compenso vi mandiamo un paio di ministeri). Con questa premessa sono in grado di fornire la SOLUZIONE: A regime il numero di semistalli vuoti è pari a zero.

DIMOSTRAZIONE:

1. Poiché il numero di semistalli è pari, è possibile che siano tutti occupati, senza buchi.
2. Se un evento è possibile vuol dire che la probabilità che essa accada è diversa da zero, quindi prima o poi accadrà.
3. Una volta che l'evento si è verificato, esso determina una situazione stabile e irreversibile poiché non appena una macchina accenna a lasciare un parcheggio immediatamente si materializza un automobilista allupato e con l'acquolina in bocca, pronto ad occuparne il posto in un nanosecondo.
4. Il ragionamento non cambia se, per un caso eccezionale, due o più auto adiacenti lasciano contemporaneamente il loro posto. Ci saranno altrettanti automobilisti, parimenti allupati, parimenti con l'acquolina in bocca, ognuno che punta al "suo" stallo che, anche se diluvia, non avrà il tempo di bagnarsi.

Come vedete la soluzione è precisa e senza nemmeno un calcolo. ***Franco57*** si dispera per non aver trovato una soluzione chiusa, ma ci delizia con il procedimento come al solito:

Una volta sistemata la prima macchina rimangono 98 spazi contigui utilizzabili per i successivi parcheggi. Il fatto che il parcheggio sia circolare, adesso non ha più nessuna importanza: evidentemente possiamo pensare semplicemente a 98 spazi contigui sul ciglio della strada.

Se chiamo con C_n la "capacità" di un parcheggio costituito da n spazi contigui, cioè il numero medio auto che contiene quando è saturo, ciò che chiede il quesito è di calcolare $1+C_{98}$.

In un tale parcheggio, la prima macchina che arriva (nel parcheggio circolare sarebbe quindi la seconda) parcheggerà a caso in una delle $n-1$ coppie di spazi contigui: $(1,2)$ oppure in $(2,3)$, ... fino a $(n-1,n)$.

Dietro di sé lascerà i spazi contigui e davanti a sé $n-i-2$ con $0 \le i \le n-2$.

Beh, a questo punto possiamo usare i valori di C_i per calcolare C_n ed ottenerne perciò una definizione ricorsiva. Per questo è utile definire anche i casi limite $C_0=0$ e $C_1=0$.

La definizione ricorsiva di C_n sarà quindi:

$$C_n = 1 + \frac{1}{n-1}\left(C_0 + C_{n-2}\right) + \frac{1}{n-1}\left(C_1 + C_{n-3}\right) + \frac{1}{n-1}\left(C_2 + C_{n-4}\right) + \cdots + \frac{1}{n-1}\left(C_{n-2} + C_0\right) =$$
$$= 1 + 2 \cdot \frac{C_0 + C_1 + \ldots + C_{n-2}}{n-1}$$

Cioè $C_n = 1 + 2 \cdot Media\left(C_0, C_1, \ldots, C_{n-2}\right)$.

Ho visto che in alcuni casi questo tipo di definizioni conduce a risultati inaspettatamente semplici. Ad esempio:

$\begin{cases} X_n = 1 + 2 \cdot Media\left(X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}\right) \\ X_0 = 0; X_1 = 1 \end{cases}$ e $\begin{cases} X_n = 1 + Media\left(X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}\right) \\ X_0 = 0; X_1 = 1 \end{cases}$ forniscono rispettivamente la sequenza dei numeri naturali e la serie armonica.

Ma nel nostro caso l'unica cosa interessante che sono riuscito a trovare è una definizione ricorsiva senza la sommatoria. Si ricava: $C_0 + C_1 + \ldots + C_{n-2} = \frac{n-1}{2}\left(C_n - 1\right)$ che sostituita fornisce per C_{n+1}

$$C_{n+1} = 1 + 2 \cdot \frac{C_0 + C_1 + \ldots + C_{n-2} + C_{n-1}}{n-1} = 1 + 2 \cdot \frac{\frac{n-1}{2}\left(C_n - 1\right) + C_{n-1}}{n} = \ldots =$$
$$= \frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)C_n + 2\frac{1}{n}C_{n-1}$$

Si semplifica un po' di più se ricaviamo C_{n-1} in funzione di C_{n-2} e di C_{n-3} e lo sostituiamo in $C_n = \frac{1}{n-1} + \left(1 - \frac{1}{n-1}\right)C_{n-1} + 2\frac{1}{n-1}C_{n-2}$, infatti otteniamo $\boxed{C_n = C_{n-2} + \frac{2}{n}\left(1 + C_{n-3}\right)}$ che richiede una sola moltiplicazione per iterazione.

Data la profondità della ricorsione, bisogna aggiungere una condizione al contorno, quindi $C_0 = 0$, $C_1 = 0$ e $C_2 = 1$.

Ahimè non ho trovato una formula esplicita (me la immagino con fattoriali) … ma il calcolo di $1 + C_{98}$ non è difficile con un foglio elettronico e fornisce approssimativamente 43,23323584.

Il valore esatto non ridotto ai minimi termini è la mostruosa frazione (se *perl* non sbaglia)

numeratore =	69.987.306.420.716.367.298.168.805.277.569.140.482.495.558.442.272. 183.626.422.625.097.375.249.966.028.469.857.171.531.088.252.341.27 6.109.306.476.631.593.119.274.564
Denominatore =	1.618.831.092.881.708.654.907.243.444.916.671.169.624.056.573.581.5 64.142.797.360.830.774.247.469.534.546.482.996.222.387.966.854.760. 679.126.713.275.909.423.828.125

Non mi pare quindi di aver risolto il quesito con mezzi leciti, ma spero nella capacità degli altri amici solutori. Mi piacerebbe inoltre vedere pubblicato qualcosa anche sul limite $\frac{C_n}{n}$, cioè la misura limite della capacità del parcheggio, che pure dovrebbe essere qualcosa di notevole.

Come al solito io giro la domanda ai nostri lettori, che ne sanno sempre una più di noi. Del resto gli altri risultati sono piuttosto simili, come quello di ***Bobbin Threadbare***:

> Ricapitoliamo i termini del problema: abbiamo un parcheggio creato sul margine interno di una rotonda, ma poiché le righe sono strette, "ogni utente del parcheggio parcheggerà se e solo se trova due spazi adiacenti. Le nostre macchine arrivano una per volta e si piazzano in un qualsiasi "buco" da due spazi adiacenti che trovano, scelto a caso". Allora, notiamo subito che la natura di anello della rotonda non ci crea problemi: partendo da un parcheggio vuoto, la prima macchina a posteggiare creerà l'equivalente di una striscia di 98 spazi consecutivi. Lunga vita alla simmetria!
>
> A questo punto, definiamo E(n) come il numero medio di macchine che troveranno posto in una striscia di n spazi consecutivi. Il problema chiede di calcolare E(98) + 1 (contando l'auto iniziale).
>
> Bene, iniziamo a valutare la funzione. Abbiamo
>
> $$E(0) = 0, \quad E(1) = 0$$
>
> Nonostante non sembri, siamo già a buon punto. Infatti, il resto dei valori può essere trovato per via ricorsiva, con un po' di ragionamento. Come dite? E(2) era più facile trovarlo a mano? Suvvia, usiamo metodi più raffinati!
>
> Consideriamo quindi una striscia di n posti consecutivi, e numeriamoli da 0 a n–1. Una macchina, arrivando, occupa i posti k e k+1, con k che può andare da 0 a n–2. A questo punto i posti rimasti sono spezzati in due sottostrisce, di dimensione k e n–2–k rispettivamente, in cui potranno ancora trovare posto E(k) ed E(n–2–k) macchine rispettivamente.
>
> A questo punto, per definizione di media, avremo:
>
> $$E(n) = \sum_{k=0}^{n-2} p(k) \cdot [1 + E(k) + E(n-2-k)]$$
>
> dove *p(k)* è la probabilità che la prossima auto entri nella posizione k. Ma dato che il posto viene scelto a caso e le possibilità sono n–1, avremo che $p(k) = 1/(n-1)$. Da ciò, sostituendo, otteniamo:
>
> $$E(n) = 1 + \frac{1}{n-1}\left[\sum_{k=0}^{n-2} E(k) + \sum_{k=0}^{n-2} E(n-2-k)\right]$$
>
> che con un po' di facili passaggi si semplifica in
>
> $$E(n) = 1 + \frac{2}{n-1}\sum_{k=0}^{n-2} E(k)$$
>
> Non rimane che impostare la formula su un foglio elettronico, e il gioco è fatto: il risultato finale, per i curiosi, è (circa)
>
> $$E(98) + 1 = 43,2$$
>
> Con un programma di calcolo simbolico, o molta carta e matita, si potrebbe addirittura ottenere il risultato in forma frazionale esatta. Ma anzi, sono sicuro di aver letto, in uno dei numeri passati di Rudi Matematici, un qualche algoritmo per esprimere in forma chiusa delle relazioni ricorsive. Non è che qualche persona di buona volontà riuscirebbe a ritrovarlo ed applicarlo in questo caso?

Visto? Prima di chiudere, ringraziamo anche ***GaS***, che è giunto alle stesse conclusioni:

Si può quindi rispondere alla domanda ricavando C_{100}=43,23: in media l'86% dello spazio è occupato dalle macchine mentre alle biciclette è lasciato il restante 14%.

E adesso passiamo al secondo problema.

5.2.2 Rimettere i debiti (...e qui è un problema!)

Anche qui, il Capo si è dato da fare a rendere la storia veramente complicata. Non c'è che dire: l'idea del povero Doc, come al solito ai lavori forzati nel deserto è carina, ma vediamo di ridurre un minimo la parte suggestiva e lasciare solo i dati del problema:

> *L'idea è che Alice, "novella Didone", deve piantare dei pali per definire i confini dell'area sulla quale regnare; ventiquattro ore di tempo per circoscrivere un'area, correndo a velocità costante e fermandosi solo per piantare i pali che Doc mena. Vogliamo l'area massima piantando il numero minimo di pali, contando che percorriamo il perimetro a velocità costante e Doc ci mette un minuto a piantare ogni palo.*

Si capisce? Se no, è colpa della mia sintesi nel copia&incolla, lamentatevi. In ogni caso il problema l'hanno capito bene quelli che ci hanno scritto, e non sono stati pochi. Vi passiamo subito la soluzione del nostro ***Gavrilo***, che non si faceva sentire da qualche tempo:

> Si presume che sia noto che, tra tutti i poligoni di uguale numero di lati e uguale perimetro, quello di area massima è quello regolare. Inoltre è noto che, per poligoni regolari di uguale perimetro, l'area cresce con il numero dei lati e raggiunge il massimo nel caso limite del cerchio. Infine poligoni regolari con lo stesso numero di lati hanno aree crescenti con il perimetro.
>
> Quindi Alice dovrà scegliere di muoversi durante le 24 ore lungo un poligono regolare con il massimo numero di lati che non sia tale da generare troppe fermate (da 1 minuto per palo, a cura di Doc, ed in numero uguale ai lati). Ecco quello che suppongo che Rudi si accinga a fare con il *papiro & calamo*.
>
> Si introducono le seguenti grandezze:
>
> P_o = lunghezza del percorso che il nostro trio percorrerebbe in 24 ore, se non piantasse pali;
>
> N = 1440 min = tempo a disposizione (pari a 24 h);
>
> P_n = lunghezza del perimetro di un poligono regolare di n lati, con n pali, percorribile in 24 h;
>
> A_n = area del poligono di perimetro P_n (di cui sopra);
>
> L_n = lunghezza del lato del poligono di perimetro P_n (di cui sopra).
>
> Consideriamo la serie di perimetri possibili, si ha:
>
> $$P_n = P_o\,(1 - n\ /\ N)\ ,$$
>
> $$L_n = P_n / n = P_o\,(1 - n\ /\ N) / n\ , \quad (*)$$
>
> dove, evidentemente, si ha:
>
> $$P_{1440} = L_{1440} = 0,$$
>
> dato che, se ci fossero 1440 lati, si dovrebbero piantare 1440 pali e non rimarrebbe più tempo per percorrere qualsiasi spazio. Quindi il poligono cercato avrà certamente meno di 1440 lati.
>
> Consideriamo ora il triangolo isoscele con vertice al centro del poligono regolare di lato L_n e avente per base un lato del poligono stesso. Esso ha un angolo al vertice a_n = $2\pi / n$ e la sua altezza H_n è l'apotema del poligono e vale
>
> $$H_n = ½\ L_n \cot\,(\pi / n)\ .$$

Quindi l'area del poligono regolare di n lati considerato è

$$A_n = \tfrac{1}{2}\, n\, L_n\, H_n = \tfrac{1}{4}\, n\, L_n^2 \cot(\pi / n),$$

e, ricordando la (*),

$$A_n = \tfrac{1}{4}\,(1 / n) \cot(\pi / n)\,(1 - n / N)^2\, P_o^2\,.$$

Si tratta quindi di trovare il valore di $n = n_{max}$ per il quale l'area del poligono di n_{max} lati (con n_{max} pali) assume il valore massimo. Dato che P_o è costante, cercheremo il massimo di

$$\mathcal{A}(n) = 4\, A_n / P_o^2\,.$$

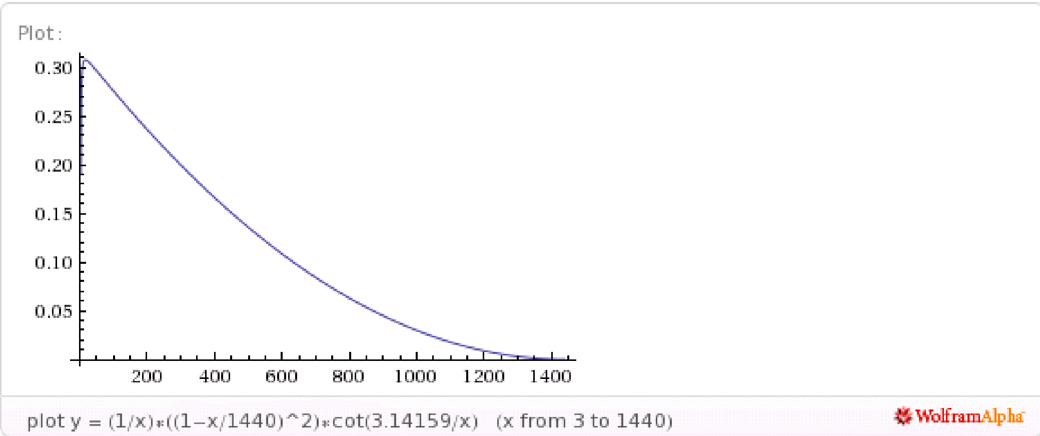
Per cercare il massimo supporremo che $\mathcal{A}$ sia una funzione continua per ogni valore di n (e non solo di quelli discreti) nell'intervallo che ci interessa e quindi lo indicheremo come

$$\mathcal{A}(x) = (1 / x) \cot(\pi / x)\,(1 - x / N)^2\,,$$

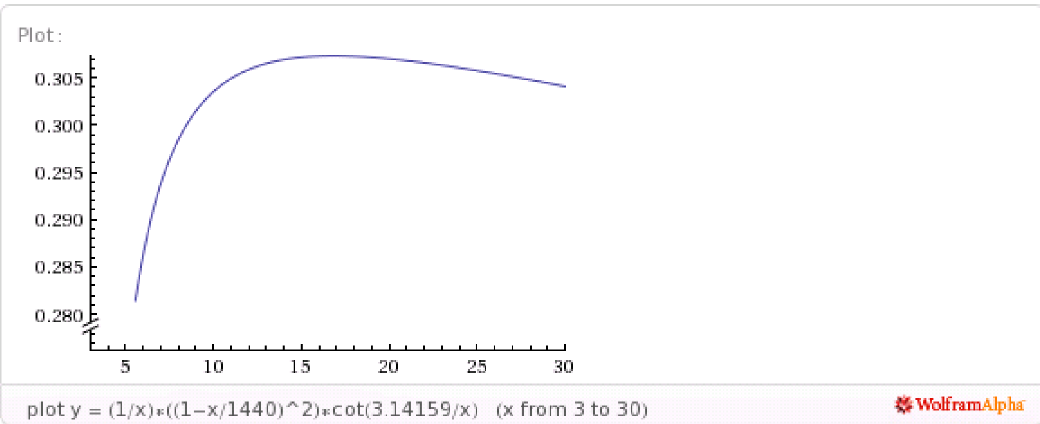
oppure, con valori numerici,

$$\mathcal{A}(x) = (1 / x) \cot(3{,}14159 / x)\,(1 - x / 1440)^2\,, \qquad (2 < x < 1440).$$

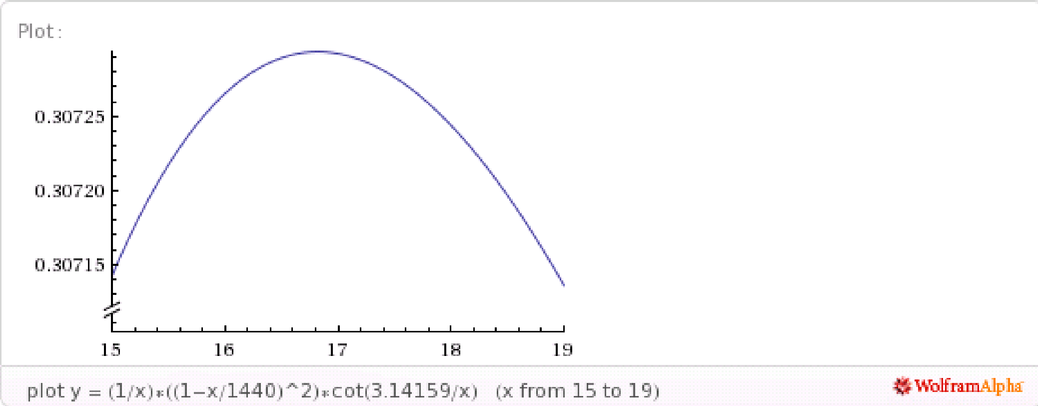
Per cercare il massimo di $\mathcal{A}(x)$ sono ricorso all'aiuto di **Wolfram|Alpha** .



Si intravede che c'è un massimo per un valore di x abbastanza piccolo. Ingrandiamo la regione interessata:



Il massimo sembra essere intorno a 17, vediamo:



Di qui si vede che il valore di $\mathcal{A}$ (17) è maggiore dei valori di $\mathcal{A}$ (16) e di $\mathcal{A}$ (18), infatti è:

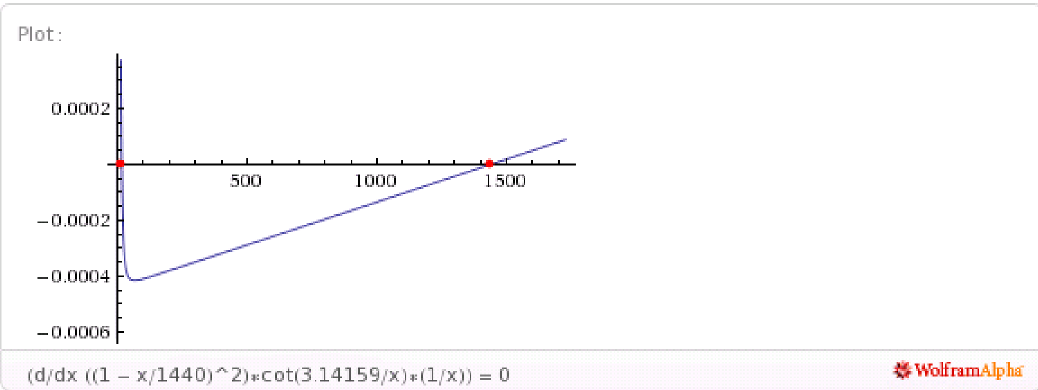
$$\mathcal{A}\ (16) = 0{,}307265\ ;\ \mathcal{A}\ (17) = 0{,}307292\ ;\ \mathcal{A}\ (18) = 0{,}307244\ .$$

Quindi si ha:

$$\mathcal{A}_{\max} = \mathcal{A}\ (17) = 0{,}307292\ .$$

Con **Wolfram|Alpha** si può pure calcolare e rappresentare l'andamento della derivata di $\mathcal{A}(x)$

$$\frac{d}{dx}[(1-x/1440)^2 \cot(3.14159/x)(1/x)] =$$
$$= \{(x-1440)\cdot[(4.82253\cdot 10^{-7}x + 0.000694444)x \cdot \cot(3.14159/x) +$$
$$+ (1.51504 \cdot 10^{-6}x - 0.00218166)\cdot \csc^2(3.14159/x)]\}/x^3 \quad .$$



Risulta che gli zeri si hanno per: $x_1 = 16{,}821$ (dove c'è il massimo), e per $x_2 = 1440$ (dove $\mathcal{A}(x)$ si annulla).

NOTA. *Ma come ha fatto Rudy a costruire questo problema in modo che avesse per soluzione un eptadecagono regolare? (Proprio quello che nel 1796 Gauss dimostrò che era costruibile con riga e compasso).*

Forse una parte della risposta a questa domanda è nella conclusione di ***Alberto R.***:

> Così scrivete: *"...vogliamo l'area massima piantando il numero minimo dei pali..."* Sennonché l'ennagono che minimizza il numero dei pali è, ovviamente, il triangolo, mentre quello che massimizza l'area ha 17 lati. Insomma volete la botte piena e la moglie ubriaca. Nel dettaglio: Il lato dell'ennagono è lungo
>
> $$L=24\cdot 60n-t_p\cdot V$$
>
> Dove V è la velocità di marcia in metri al minuto, n il numero dei lati, 24·60 i minuti di un giorno, t_p il tempo, in minuti, occorrente per piantare un palo (nel nostro caso t_p=1).
>
> L'area dell'ennagono regolare è:
>
> $$A=n\cdot L\cdot 24\cdot \tan(\pi n)$$
>
> Poiché n può assumere solo valori interi ci risparmiamo l'improba fatica di annullare la derivata e con pochi tentativi sappiamo che A diventa massimo per n=17 e vale $159300\cdot V^2$ (in m²).
>
> Generalizzando il problema, osserviamo che il risultato dipende essenzialmente dal tempo t_p occorrente per piantare un palo.
>
> Se t_p è di 8 ore (o più) l'area confinata si annulla perché tutta la giornata è impiegata per piantare i pali e non c'è più tempo per camminare. Per t_p compreso tra 8 ore e 130 minuti (circa) A diventa massima per n=3. Solo in tal caso si riesce, contemporaneamente, a massimizzare A e minimizzare n. Per t_p compreso tra 130 minuti 57 minuti è conveniente tracciare un quadrato, sotto i 57 minuti un pentagono... etc etc. Per t_p che tende a zero l'area massima è quella delimitata da una circonferenza.

Mi resta ancora da dire che erano ottime anche le soluzioni di ***Rub*** e ***Silvano***, ma non ci stanno più... solo un accenno alla conclusione di ***Rub***:

> (...) si conclude che il miglior risultato si ottiene proprio il terribile numero di 17 lati, che comporta un problema agghiacciante di dover tracciare un eptadecagono (quasi) regolare sul terreno, sotto il sole cocente diurno ed il freddo glaciale notturno, sfiancati dalla stanchezza e dal peso della mazza ferrata!

E non posso dire che non ci si diverte, a leggere tutte le soluzioni che arrivano, ecco. Continuate così, non mi deludete mai. Buona continuazione di estate!

6. Quick & Dirty

Questo lo abbiamo preso dal sito di un amico (ciao, Mariano!)

In un paese tutti gli abitanti sono ladri. Non si può camminare per strada con degli oggetti senza che vengano rubati, e l'unico modo per spedire qualcosa senza che venga rubato dai postini è di rinchiuderlo in una cassaforte chiusa con un lucchetto. Ovunque l'unica cosa che non viene rubata è una cassaforte chiusa con un lucchetto, mentre sia le casseforti aperte, sia i lucchetti vengono rubati. Alla nascita ogni abitante riceve una cassaforte ed un lucchetto di cui possiede l'unica copia della chiave. Ogni cassaforte può essere chiusa anche con più lucchetti ma la chiave non è cedibile e non può essere portata fuori dalla casa del proprietario, perché verrebbe rubata durante il trasporto. Non si può in alcun modo fare una copia delle chiavi. Come può un abitante di questo paese spedire il regalo di compleanno ad un proprio amico?

7. Pagina 46

Possiamo riscrivere la diseguaglianza come:

$$\frac{x^2+y^2}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2,$$

in cui abbiamo posto $x = a + \frac{1}{a}$ e $y = b + \frac{1}{b}$. Allora,

$$\frac{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2}{2} \geq \frac{1}{4}\left(a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}\right)^2$$
$$= \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1+\frac{a+b}{ab}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2.$$

La frazione $\frac{1}{ab}$ raggiunge il valore minimo quando ab raggiunge il valore massimo; dalla diseguaglianza tra la media aritmetica e geometrica, elevando a quadrato otteniamo:

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Allora, $\frac{1}{ab} \geq 4$ e $1+\frac{1}{ab} \geq 5$. Da cui segue:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2 \geq \frac{1}{2}5^2 = \frac{25}{2},$$

che era la diseguaglianza cercata. L'eguaglianza vale, evidentemente, per $a = b = \frac{1}{2}$.

8. Paraphernalia Mathematica

8.1 Far girare le sfere senza rompere le scatole

Pochi disegni questa volta: come sapete, la cosa più appuntita che mi lasciano usare è una palla di gomma, quindi figuratevi gli sguardi di terrore quando impugno maldestramente un compasso.

Infatti, l'intenzione è quella di parlare di *cerchi*, o almeno di partire da lì: dovreste ricordare tutti la buona definizione delle elementari, in cui il cerchio è il *luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto dato detto centro*; la cosa, come può accorgersi chiunque pensi ad una sfera, è estendibile a spazi euclidei di *qualsiasi* dimensione, e non a caso abbiamo evidenziato il termine *qualsiasi*; infatti, non solo si può andare "in avanti", ma anche raccogliere qualcosa all'indietro: meglio però se, prima, ci mettiamo d'accordo sui nomi e smettiamo di chiamarli "cerchio" e "sfera": la notazione accettata dalla maggior parte della gente prevede che se il nostro oggetto si trova in uno spazio a n dimensioni, si chiami *n-sfera*.

Per prima cosa, chiariamo un concetto: abbiamo detto "punti equidistanti", quindi i punti "dentro al cerchio" non sono compresi nel cerchio. Questo spiega il motivo per cui nella frase precedente abbiamo detto "la maggior parte della gente", infatti i topologi, ad esempio, non sono d'accordo con questa definizione: siccome se date loro uno spazio loro ci mettono dentro di tutto, dalle bottiglie di Klein ai nastri di Möbius, sostengono che il numero di dimensioni n debba essere riferito non allo spazio in cui lavoriamo, ma all'oggetto in sé, quindi il normale cerchio che per i matematici normali[4] è una 2-*sfera*, per i topologi è una 1-*sfera*, ossia la *n-sfera* necessita almeno di un (n+1)-*spazio* per starci dentro. Siccome in matematica basta mettersi d'accordo all'inizio, seguiamo l'opinione della maggioranza e indichiamo d'ora in poi il nostro cerchio come 2-sfera: i topologi, se proprio vogliono, possono agilmente sottrarre uno[5].

Dicevamo, possiamo estendere anche all'indietro: se prendiamo un 1-spazio (che poi sarebbe una retta), possiamo definire la 1-sfera come sopra: il nostro aggeggio si ridurrà a due punti, uno da una parte e uno dall'altra del centro, ma la cosa è perfettamente compatibile con la definizione data: nel 2-spazio abbiamo la nostra 2-sfera (altrimenti detta "cerchio"), nel 3-spazio abbiamo la 3-sfera eccetera.

E come al solito l'"eccetera" frega: infatti, se volete generalizzare una qualche proprietà, dovete avere una definizione generale, un buon modo è quello di passare attraverso l'***equazione cartesiana della N-sfera***:

$$r^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 ,$$

il che ci permette anche di introdurre alla chetichella il concetto di *raggio* della N-sfera: attenti che, essendo una distanza, il raggio è sempre uno scalare.

Dicevamo, prima, che la N-sfera ha dimensione N–1; da questo, nascono svariate teorie imparentate con la Teoria della Relatività Generale secondo le quali il 3-spazio nel quale viviamo non sia altro che la superficie di una 4-sfera: in questo caso le geodetiche (ossia i percorsi minimi tra due punti qualsiasi) sarebbero degli archi di cerchio e un raggio di luce che parta da un qualsiasi punto, visto che percorre sempre il percorso minimo, dopo

[4] Partiamo da questo palese ossimoro per dire che a parte il giocherellare con i nastri, la topologia non ci è mai stata particolarmente simpatica: se qualcuno ce la spiega bene (magari scrivendo lui qualche dozzina di PM) comunque apprezzeremo.

[5] Sempre nell'ambito delle definizioni, se vogliamo parlare dei punti con distanza *minore o uguale* da un punto dato, usiamo il termine *disco*. E qui anche i topologi sono d'accordo che l'aggeggio ha il numero "giusto" di dimensioni.

essersi fatto tutto il giro dell'universo tornerà da dove è partito "dall'altra parte" (virgolette d'obbligo, quando si dicono certe frasi...).

Adesso, generalizziamo in un altro modo, per vedere come sia facile perdere di vista qualcosa, quando ci si basa sulle impressioni:

Per tracciare una 2-*sfera* (cerchio), ruoto una 1-*sfera* (due punti) attorno ad uno 0-*spazio* (un punto, il centro).

Per tracciare una 3-*sfera*, ruoto una 2-*sfera* attorno ad un 1-*spazio*.

Per tracciare una 4-*sfera*, ruoto una 3-*sfera* attorno ad un 2-*spazio*.

Dal che risulta evidente che:

Per tracciare una *n*-sfera, ruoto una (*n*–1)-sfera attorno ad un (*n*–2)-spazio.

Tutto corretto ma, come dicevamo, si rischia di perdere di vista qualcosa: nel caso della 4-sfera, infatti, *potete scegliere tra due piani* perpendicolari tra loro!

Ragionamenti di questo genere si comportano un po' meglio se li applicate alle proiezioni:

La proiezione di una 2-*sfera* su un 1-*spazio* è un segmento con tutti i punti doppi, tranne i due all'estremità.

La proiezione di una 3-*sfera* su un 2-*spazio* è un disco con tutti i punti doppi, tranne la circonferenza che è proiezione del cerchio massimo.

Insomma, in generale:

La proiezione di una *n*-sfera su un (*n*–1)-spazio da' un (*n*–1)-disco *doppio* tranne una (*n*–1)-sfera.

Discorso simile si può fare per le *sezioni*, anche se qui la fregatura è in agguato: infatti, per tagliare una *n*-sfera, vi serve un (*n*–1)-piano, e ottenete una (*n*–1)-sfera; prima di dire che quest'ultimo passaggio è "evidente", andate a riguardarvi il primo problema di RM084 (gennaio 2006, "Iper-KIAI!"), dove tagliavamo un'ipercubo con un'iperkatana e ottenevamo... Non ve lo diciamo, andate a vedervelo.

Per quanto possa sembrare incredibile, lo scrivente sino al secondo anno d'università ha avuto dei problemi con volume e superficie della sfera: niente da fare, o si ricordava l'una o si ricordava l'altra. La cosa, fortunatamente, è stata risolta grazie alla ***funzione gamma***, e adesso non ha più problemi (forse anche perché finalmente al secondo anno gli hanno fornito una *dimostrazione*[6]):

$$V_N = \int_0^R S_N r^{N-1} dr = \frac{S_N R}{N},$$

$$S_N = \frac{2\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} = \begin{cases} \dfrac{2^{\frac{N+1}{2}} \cdot \pi^{\frac{N-1}{2}}}{(N-2)!!} & \text{se } N \text{ dispari} \\[2ex] \dfrac{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}{\left(\frac{N}{2}-1\right)!} & \text{se } N \text{ pari.} \end{cases}$$

E non mettetevi a ridere: anche per il caso tre dimensioni, la prima lo salva sempre, se riesce a ricordarsi quattroterzipigrecoerretre. Attenti comunque al bifattoriale per il caso di *N* pari: vi ricordiamo che $N!! = N \cdot (N-2) \cdot \ldots \cdot 2$.

[6] Sorvoleremo sul dettaglio che la Prof poi ha voluto che Rudy gliela raccontasse (all'esame).

Se vi mettete a giocare con questi mostriciattoli utilizzando l'estensione ai numeri reali della funzione gamma (no, non ve la diamo), vi accorgete di una cosa strana: fissato il raggio, questo aggeggio ha ***un massimo*** per $N = 7.25695\ldots$, ossia ***per N=7 l'N-sfera ha la massima ipersuperficie***, per un raggio dato[7].

Lasciamo sedimentare per un attimo questo concetto; vi ricordate il ***problema di Soddy***? Avete tre cerchi (o meglio, tre 2-sfere) mutuamente tangenti, dovete trovare la 2-sfera tangente a tutti e tre.

Come dovreste ricordare, ci sono due soluzioni: una "esterna" (con le tre 2-sfere originali all'interno di quella tangente) e una "interna" (con la 2-sfera tangente alle altre tre nello spazio tra quelle originali); il problema è noto come "problema di Soddy" in quanto *Frederick Soddy* (premio Nobel per la chimica nel 1921 per la scoperta degli isotopi) aveva trovato una bellissima formula coinvolgente la *curvatura* ρ, pari all'inverso del raggio:

$$2 \cdot \left(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 + \rho_4^2\right) = \left(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4\right)^2.$$

La qual cosa si può evidentemente generalizzare (altrimenti non ne parleremmo qui) a *N* dimensioni con *N*+1 *N*-sfere osculanti:

$$N \cdot \sum_{i=1}^{N+2} \rho_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{N+2} \rho_i \right)^2.$$

E siccome Soddy come tutti gli scienziati conosceva la poesia (l'inverso non è vero, come ben sapete), non ha resistito all'idea di mettere il tutto in versi, con il titolo *The Kiss Precise*[8]. Per prima cosa, infatti, statuisce il problema:

For pairs of lips to kiss maybe
Involves no trigonometry.
'Tis not so when four circles kiss
Each one the other three.
To bring this off the four must be
As three in one or one in three.
If one in three, beyond a doubt
Each gets three kisses from without.
If three in one, then is that one
Thrice kissed internally.

E quindi fornisce la soluzione:

Four circles to the kissing come.
The smaller are the benter.
The bend is just the inverse of
The distance from the center.
Though their intrigue left Euclid dumb
There's now no need for rule of thumb.
Since zero bend's a dead straight line
And concave bends have minus sign,
The sum of the squares of all four bends
Is half the square of their sum.

Non pago, la estende a tre dimensioni, con quattro sfere:

[7] Il primo che dice "Rudy, ti sei dimenticato la parte decimale" vince la possibilità di scrivere un PM sugli iperfrattali (7+)-dimensionali.

[8] Che lasciamo in inglese, ben consci che Alice e Doc non resisteranno all'idea di tradurla riportandola in opportuni e alati versi. [*…e invece no, questa volta siamo stati troppo impegnati… (NdAR)*]

To spy out spherical affairs
An oscular surveyor
Might find the task laborious,
The sphere is much the gayer,
And now besides the pair of airs
A fifth sphere in the kissing shares.
Yet, signs and zero as before,
For each to kiss the other four
The square of the sum of all five bends
Is thrice the sum of their squares.

Neanche il tempo di pubblicare il tutto (*Nature, Vol.*137*,* 20 *giugno* 1936*, pag.* 1021) che arriva l'estensione N-dimensionale:

And let us not confine our cares
To simple circles, planes and spheres,
But rise to hyper flats and bends
Where kissing multiple appears.
In n-ic space the kissing pairs
Are hyperspheres, and Truth declares-
As $n + 2$ *such osculate*
Each with an $n + 1$*-fold mate.*
The square of the sum of all the bends
Is n times the sum of their squares.

...e funziona anche per le 1-sfere! Per questo, dovevano dargli il Nobel, mica per quella faccenda degli isotopi...

Bene, per essere arrivati sin qui vi meritate un problema[9].

> Due sfere sono tangenti (esternamente) una all'altra e sono entrambe tangenti internamente a una sfera più grande. Una collana di sfere più piccole sono tangenti alle due sfere iniziali, alla sfera grande e ognuna di queste ultime tocca i suoi due vicini più prossimi. Quante sfere formano la collana, e come sono legati i raggi?

Non vorremmo pensaste che per le N-sfere valga il famoso detto "vista una, viste tutte": anche qui esistono dei problemi mica male, e qualcuno ancora irrisolto.

Ad esempio, sapete tutti che *sei* 2-sfere sono impacchettabili attorno ad una 2-sfera di ugual raggio (controllate con le monetine, se non ci credete), e la cosa era nota sin dall'antichità: attorno ad una 3-sfera riuscite a impacchettare *dodici* sfere con una certa tranquillità (ai vertici del dodecaedro), ma avanzate un mucchio di spazio, roba da far pensare che se utilizzaste un impacchettamento *irregolare* forse riuscireste a farcene stare tredici: bene, la dimostrazione che l'impacchettamento regolare dodecaedrico è il migliore ha dovuto aspettare il 1874, e quando si sale la cosa peggiora ulteriormente: trovate in tabella le migliori ipotesi.

Dim.	**Reg.**	**Irr**
4	24	26?
5	40	48?
6	72	85?
7	126	146?
8	246	244?
9	≥ 306	≤ 401
10	≥ 500	≤ 648

10 *Impaccamenti*

Se guardate bene, vedete che nel 9-spazio non siamo più ben sicuri degli impaccamenti: questo è un interessante problema, e la sua origine nasce da un ragionamento piuttosto semplice.

[9] Volevamo inserirlo come ***Summer Contest***, ma dovrebbe esservi evidente il motivo per cui non lo presentiamo come tale: comunque è un *sangaku* (prefettura di Kanagawa, tavoletta del 1822).

Sarete d'accordo che la diagonale di un *N*-cubo di lato unitario vale $\sqrt{N}$, per elementare estensione del teorema di Pitagora; questo significa che potete inscatolare un segmento di qualsiasi lunghezza (finita) se avete un'iperscatola cubica di lato unitario ma della "dimensione" opportuna (le virgolette si impongono). Come abbiamo calcolato prima, però, all'aumentare delle dimensioni il volume dell'ipersfera *decresce*, e tende a zero per il tendere all'infinito delle dimensioni.

Adesso andiamo a riprendere un vecchio Q&D: "*È meglio un tappo rotondo in un buco quadrato o un tappo quadrato in un buco rotondo?*" Se fate i conti, vedete che un cerchio in un quadrato lascia libero meno spazio di quanto lasci un quadrato in un cerchio; ugualmente, una sfera in un cubo lascia libero meno spazio di quanto ne lasci un cubo in una sfera... e avanti così, sin quando arrivate alla nona dimensione: a quel punto, sta meglio un 9-cubo in una 9-sfera che viceversa!

Un paradosso ancora più strano è attribuito a ***Leo Moser***: andiamo per gradi.

In un 2-cubo di lato 4 ci stanno 4 2-sfere di raggio unitario e una 2-sfera di raggio $\sqrt{2}-1$.

In un 3-cubo di lato 4 ci stanno 8 3-sfere di raggio unitario e una 3-sfera di raggio $\sqrt{3}-1$.

Eccetera: in un *N*-cubo di lato 4 ci stanno 2^N *N*-sfere di raggio unitario e una *N*-sfera di raggio $\sqrt{N}-1$. Ossia, per *N*=9 la sfera "piccola" al centro del cubo è *la più grande* che possa stare nell'*N*-cubo, ma resta ancora spazio per $2^9=512$ sfere unitarie! Insomma, c'è un mucchio di (iper) spazio, tra le sfere...

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms