Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 179 – Dicembre 2013 – Anno Quindicesimo

Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM178 ha diffuso 3'069 copie e il 10/12/2013 per Google eravamo in 12'300 pagine.

Cheril Sorg (http://www.cherylsorg.com/home.html) ha preso l'impronta del proprio pollice, l'ha ingrandita e ha sostituito alle linee i libri e le citazioni che hanno lasciato *un'impronta* nella sua cultura: scusate il pessimo gioco di parole, ma in questo caso ci pare necessario. Non sappiamo il titolo, ma propendiamo per "autoritratto non solo culturale".

1. Identità e differenze

"Professore, lei sarà una delle tre persone al mondo che capisce davvero la Relatività Generale… Non mi risponde? Suvvia, non faccia il modesto…"
"Al contrario: stavo pensando chi potesse essere la terza."
(da un'intervista del 1919)

Le somiglianze sono davvero tante, quasi stupefacenti. La prima e più importante, almeno in italiano, sta proprio nel nome; ed è innegabile che le somiglianze etimologiche non siano altro che la sintesi di somiglianze più profonde, essenziali. Tutto parte dal termine "canna", che è tanto antico quanto la storia dell'uomo: si arriva perfino agli assiro-babilonesi, che chiamavano "*kanna*" l'arbusto dotato di fusto alto e robusto che deve essere stato uno dei primi strumenti degli uomini primitivi. In fondo, è evidente: è uno splendido prolungamento dell'arto, utilissimo per esplorare nell'erba, nei luoghi potenzialmente pericolosi, nei nidi di animali; è robusto abbastanza per colpire, è lungo abbastanza da consentire a chi lo brandisce di mantenere una distanza di sicurezza dal pericolo, e infine è così perfettamente impugnabile e maneggevole che non serve poi una gran pratica per goderne subito i vantaggi.

E allora non può stupire che il termine si sia conservato, propagato e trasformato fino a caratterizzare quasi tutti gli oggetti che ne ricordassero le caratteristiche principali, e segnatamente proprio quelle geometriche: un cilindro molto allungato, in cui l'altezza, la dimensione verticale, è sproporzionatamente più grande del raggio della base circolare. Ma una qualsiasi canna che si rispetti ha un'ulteriore caratteristica, anch'essa di natura geometrica: ovvero la proprietà di essere un oggetto cavo, vuoto all'interno. A ben vedere, è caratteristica essenziale anche per i suoi primi – e primitivi – usi: sarebbe decisamente più complicato brandire una canna lunga un paio di metri se questa non fosse al contempo molto leggera, e la sua leggerezza è assicurata appunto dal suo essere vuota all'interno. Ma ben presto la cavità acquista delle sue doti particolari e preziose: ciò che è vuoto si può riempire, come ben sanno i fabbricanti d'armi dell'Ottocento, che nascondevano stiletti affilatissimi in bastoni da passeggio, o i più recenti consumatori di tabacco (le sigarette non sono altro che piccole cannule di carta opportunamente riempite) o di altre sostanze in grado di essere fumate; a questi ultimi, quantomeno, va riconosciuto il merito etimologico di aver salvaguardato il nome originale dell'oggetto.

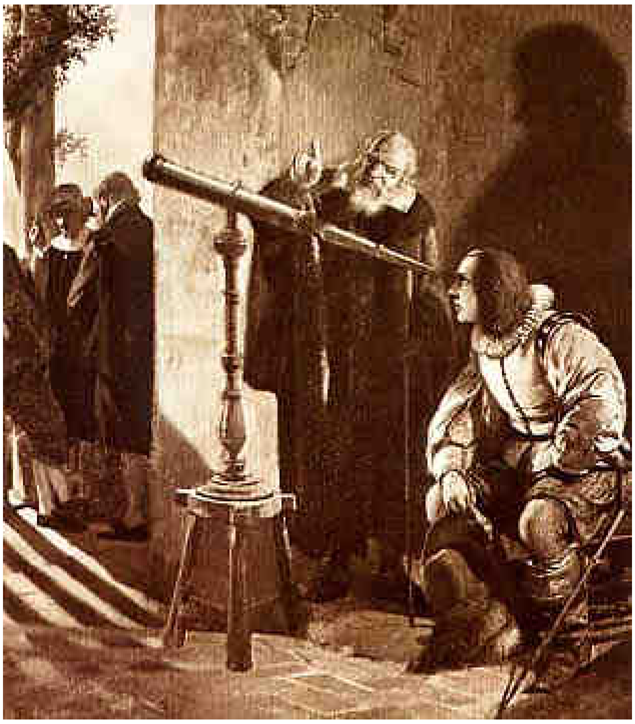
Nella sua versione più libera dalla rigidità monodimensionale e rettilinea, quando insomma la canna è libera di fare curve nello spazio, e soprattutto quando la sua cavità viene utilizzata essenzialmente per il trasporto di materiali (prevalentemente liquidi o gassosi) la canna assume la dignità e il nome di "tubo" o, nei suffissi, il più dotto termine di "dotto"[1] (acquedotto, oleodotto, gasdotto). Ma l'uso in questione è già troppo generale e specialistico, quindi è opportuno tornare alla canna rettilinea.

La forma a cilindro allungato è così utile e diffusa che si presta a scopi anche molto diversi: fin da quando il primo uomo della foresta equatoriale si è accorto che una canna poteva essere usata per lanciare lontano – e con buona precisione – dei dardi in grado di ferire piccoli animali (e di conseguenza facilitare l'assunzione quotidiana di un paio di pasti a base di carne), ci si è resi conto che la canna aveva un potenziale eccezionale non solo per la sua lunghezza fisica, ma soprattutto per la sua capacità di fissare una direzione nel nostro universo tridimensionale. L'inventore della cerbottana ha prodotto un salto evolutivo non trascurabile, ne sia stato egli cosciente o meno: ha infatti trasformato la canna in una parte di un percorso ben più lungo della cerbottana stessa. Non c'è dubbio che altri uomini (nonché ominidi, mammiferi, e una pletora di altri animali) avessero già provato l'ebbrezza di lanciare oggetti lontano da sé: ma lo avranno

[1] Ah, quanto ci piacciono questi sciocchi giochi di parole…

fatto come lo facciamo ancora oggi quando lanciamo un sasso, ovvero proiettandolo in maniera più o meno istintiva verso il bersaglio. La cerbottana è invece uno strumento che cambia radicalmente la filosofia del lancio, e richiedere una precisa attività di immaginazione: occorre "prevedere" che il dardo soffiato via da essa prosegua lungo una linea immaginaria che è la prosecuzione del "segmento" rappresentato dalla cerbottana stessa. In altre parole, introduce il concetto di "mira", o più precisamente, quello di "puntamento", oltre che – forse – il nocciolo della prima astrazione matematica, la prosecuzione di un segmento all'infinito.

La drammatica evoluzione della canna che da tempo immemore, sotto forma di cerbottana, lancia dardi, è un oggetto che è denominato con il semplice accrescitivo di "canna", pur se declinato al maschile: il cannone. Un altro latore di morte, ma ampiamente più distruttivo; e la tecnica di puntamento è tanto complicata quanto l'evoluzione della tecnica devastatrice dell'uomo ha potuto richiedere. Nell'artiglieria, un'intera squadra di serventi è normalmente chiamata a dirigere i proiettili verso il bersaglio desiderato, e difficilmente l'inventore della cerbottana avrebbe mai potuto immaginare con quale cura sarebbe stato orientato il pronipote della sua canna con cui soffiava proiettili verso i conigli. Gli angoli sono misurati con precisione estrema, e una gran quantità di termini tecnici sono stati inventati e adoperati: i principali, forse, sono "alzo" e "azimut".



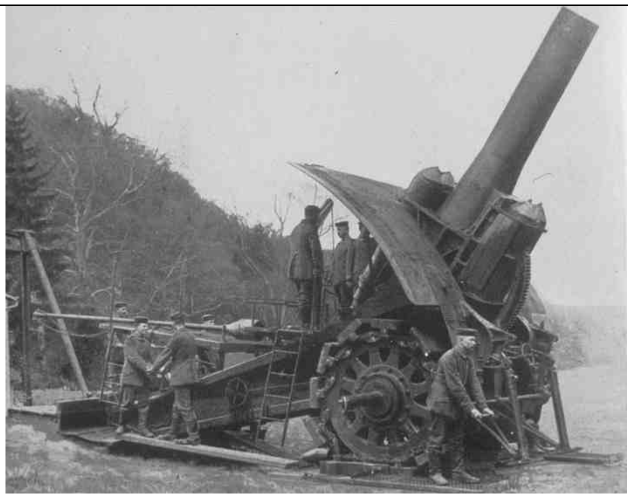
1 *Galileo e il suo cannocchiale*

Non dovrebbe allora stupire se gli stessi termini sono altrettanto importanti per un altro derivato della "canna", che come il cannone mantiene nel nome l'antica radice etimologica assiro-babilonese. A dire il vero, il suo utilizzatore più famoso lo aveva chiamato "*perspicillum*", parola latina che si può molto liberamente tradurre come "piccolo oggetto per vedere", ma ben presto il nome che prende piede è quello che unisce lo scopo dell'oggetto ("vedere con gli occhi", e quindi "occhiale") con la sua forma, che è palesemente nient'altro che una "canna": il cannocchiale[2].

Sia il cannone sia il cannocchiale hanno bisogno di una base solida e ben ferma; necessitano di essere puntati con almeno due gradi di libertà (e la "montatura altazimutale" è una delle più diffuse nei telescopi, oltre che nella definizione del puntamento dei cannoni), e conservano entrambi il principio geometrico di base, ovvero l'assunzione che la posizione della "canna" di entrambi segni la direzione tra l'uomo e il suo obiettivo. Entrambi hanno generalmente un "mirino", quando non è sostituito da sistemi di puntamento più sofisticati; entrambi conservano nel fondo della canna ("la culatta") la loro ragione d'essere: i proiettili o le immagini.

[2] Nel 1611, Federico Cesi, fondatore dell'Accademia dei Lincei e amico di Galileo, conia su base greca un nome più opportuno, che non avrà certo meno fortuna di "cannocchiale": ellenizzando il concetto di "strumento per guardare lontano", crea la parola "telescopio".

Non sono trascurabili però le differenze: quella etica e morale che contrappone un oggetto scientifico a un oggetto apportatore di morte e distruzione è talmente clamorosa che non vale probabilmente neppure la pena di sottolinearla. Ma ne esistono altre: il cannocchiale è uno strumento ricettore, e la sua canna, oltre che un criterio direzionale, è in fondo anche un "filtro" che serve a ricevere solo una parte della luce visibile, quella emanata appunto dal suo obiettivo luminoso. Per contro, il cannone è invece un oggetto che, ancorché ricevere qualcosa, è costruito appositamente per inviare all'obiettivo qualcosa, ed è un qualcosa di decisamente spiacevole[3].


2 *La "Grande Bertha" della Krupp*

Dal punto di vista matematico e geometrico, però, la differenza più significativa sta probabilmente nel fatto che, mentre il cannone e i suoi derivati (obice, mortaio, bombarda) relegano il segmento iniziale costituito dalla canna ad un elemento di linea curva – perché il percorso del proiettile è (fatte salve le complicazioni pratiche) sempre parabolico – il telescopio mantiene intatta la sua iniziale rettitudine teorica e cerca obiettivi sempre e soltanto prolungando teoricamente la sua canna lungo una linea retta. Per questa ragione è doppiamente sorprendente scoprire che due oggetti così diversi si siano trovati, in un giorno d'estate di cento anni fa, puntati l'uno contro l'altro con aspetto bellicoso; e che questo sia accaduto proprio quando, per la prima volta, un telescopio stava cercando di raggiungere il suo obiettivo seguendo una linea che retta non era.

Per comprendere come una situazione tanto sorprendente possa essersi realizzata, occorre tornare indietro di un secolo, e spostarsi all'interno della Germania del Kaiser Guglielmo II. La nazione tedesca è in clamoroso sviluppo economico e scientifico: le menti più brillanti d'Europa sono in gran parte all'interno dei suoi confini. Anche la più clamorosa anomalia sembra rientrata: un giovane fisico tedesco, nato ad Ulm nel 1879, aveva abbandonato la Germania in giovane età, per spostarsi prima in Italia e poi definitivamente in Svizzera; ma aveva mostrato, appena ventiseienne, di avere una delle menti più brillanti della storia del mondo, e nel 1914 si trovava di nuovo al lavoro entro i confini tedeschi.

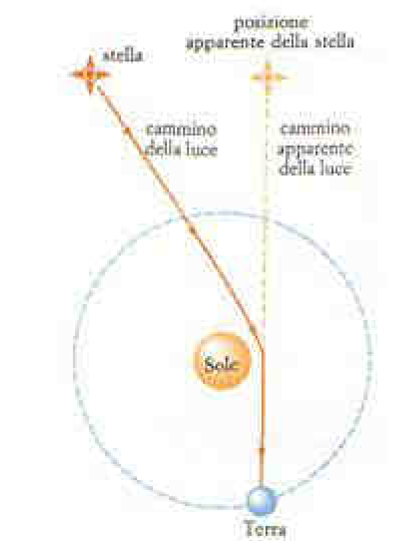
Si tratta naturalmente di Albert Einstein[4]: il suo carattere, la sua natura non erano certo tali da renderlo particolarmente sensibile ai principi nazionalistici o – peggio – patriottici; ma dopo la pubblicazione, nel 1905, di quattro straordinarie memorie sugli *Annalen der Physik*, non aveva avuto difficoltà a ottenere delle posizioni accademiche ben più prestigiose dell'impiego all'Ufficio Brevetti di Berna. Il 6 Aprile del 1914 era infatti giunto a Berlino, e pochi mesi dopo veniva accolto all'interno della Accademia Prussiana delle Scienze: dall'altro dei suoi trentacinque anni di età, era il membro più giovane della prestigiosa istituzione. Aveva pertanto già una fama consolidata, ma era ben lungi dall'essere il fisico conosciuto da chiunque, l'icona del "genio" per eccellenza che è oggi. La sua Teoria della Relatività era stata pubblicata, proprio nel 1905, nella sua forma "ristretta", o "speciale" che dir si voglia. Quasi dieci anni erano ormai passati, e la sua

[3] Esistono naturalmente delle eccezioni: ad esempio, i cannoni che sparano neve artificiale; ed è anche possibile che in qualche caso siano stati lanciati dei generi di conforto con oggetti che si possono in ultima analisi qualificare come "cannoni". Ma sono davvero eccezioni, purtroppo, e di ordine davvero infinitesimo.

[4] Di lui e della parte della sua storia che qui viene solo accennata si parla ampliamente in RM074.

naturale evoluzione, la Teoria della Relatività Generale, non era ancora pronta per la pubblicazione.

La differenza cruciale tra Relatività Ristretta e Relatività Generale sta nel fatto che la prima è essenzialmente cinematica, e non prende in considerazione i moti accelerati, e di conseguenza le forze. Il passaggio alla Generale richiede invece l'integrazione di tutti questi aspetti dinamici, cosa che di fatto si traduce in una nuova – e grandemente rivoluzionaria – teoria della gravitazione. Nel 1914 la Relatività Generale ha già preso una forma chiara e definita, anche se non è ancora stata pubblicata: è molto probabile che Albert Einstein avrebbe molto gradito avere la prova sperimentale di alcuni effetti che la sua teoria era in grado di prevedere. Se ci fosse stata la possibilità di osservare e sottoporre all'attenzione della comunità scientifica non solo un mastodontico e brillante costrutto teorico, ma anche i risultati di osservazioni che la comprovano sperimentalmente, l'effetto sarebbe stato indubbiamente maggiore.



3 *La deviazione del raggio di luce*

Una delle conseguenze della Relatività Generale è che un raggio di luce, quando passa vicino ad una grande massa, devia dalla sua traiettoria rettilinea[5]. Alle orecchie di un astronomo, questa affermazione si traduce in una osservazione misurabile: se una stella è prospetticamente prossima al Sole, la sua luce dovrebbe giungere sulla Terra con un angolo diverso dal solito, cioè da quando ci arriva senza passare vicino alla massa della nostra stella madre. C'è però un problema tecnico niente affatto trascurabile, ovvero che una stella fissa è ben difficilmente osservabile quando si trova prospetticamente prossima al Sole, per l'ottima ragione che la luce del sole è talmente intensa da impedire qualsiasi osservazione del genere. Per fortuna, questa difficoltà tecnica è superabile: in fondo, è sufficiente oscurare la luce del Sole. Gli astronomi hanno un'alleata insuperabile nella Luna, a questo proposito: con una certa frequenza (prevedibile fin dall'antichità), il nostro satellite ci fa la cortesia di porsi esattamente di fronte al Sole, e grazie ad un ancora inspiegato[6] colpo di fortuna, riesce a coprirlo con un'esattezza da certosino. Insomma, l'osservazione della deviazione dei raggi stellari che comproverebbe la validità della Relatività Generale è possibile: è sufficiente eseguirla durante un'eclissi totale di Sole.

Prima ancora della pubblicazione ufficiale della teoria, un giovane astronomo tedesco, Erwin Finlay-Freundlich, venuto a conoscenza del possibile esperimento, si offre di aiutare Einstein nel provare la validità della Relatività Generale. Nell'Agosto del 1914 era prevista un'eclissi totale di sole in Crimea, e l'occasione non poteva andare perduta. Comincia allora una densa collaborazione: Freundlich si impegna, progetta e costruisce un telescopio appositamente disegnato per la speciale osservazione, Einstein cerca fondi per la spedizione. I soldi faticano ad arrivare, e alla fine giungono da un ambito ben

[5] In realtà, come al solito, ciò che dice la teoria è un po' più complicato di come è stato da noi brutalmente riassunto. La Relatività Generale si limita a dire che la luce percorre sempre, in accordo con il principio di Minima Azione, il percorso più "breve", e in questo non è poi dissimile da quanto afferma anche la fisica classica. Il punto cruciale è che la "linea più breve" per la RG non è sempre la linea retta, ma più generalmente la "geodetica" dello spazio-tempo in cui la luce si muove. Questa geodetica – che in un teorico universo perfettamente euclideo coinciderebbe con la linea retta – è in realtà dipendente dalle masse gravitazionali che "curvano" lo spazio-tempo. Quindi, in ultima analisi, se un raggio di luce passa molto vicino ad una grande massa il suo percorso dovrebbe essere *misurabilmente* diverso da quello rettilineo.

[6] "Inspiegato" non tanto perché esista una causa non ancora scoperta; più semplicemente, perché è davvero considerevole il fatto – sacrosantamente casuale – che il diametro apparente della Luna coincida virtualmente alla perfezione con il diametro apparente del Sole.

diverso da quello che normalmente ci si aspetterebbe per una spedizione scientifica: il finanziamento giunge infatti dalla Krupp, l'azienda famosa per la sua capacità di fabbricare armi. Un ulteriore, imprevisto e imprevedibile, legame tra cannoni e cannocchiali.

Non è comunque un'impresa facile: oltre ai soldi, ci sono molti dettagli tecnici e teorici, per non parlare di quelli burocratici, da risolvere. Alla fine, comunque, Finlay-Freundlich riesce a partire. Il 19 Luglio del 1914 lascia Berlino, e una settimana dopo arriva a Feodosija, in Crimea; e qui incomincia immediatamente a sistemare le strumentazioni per le osservazioni durante l'eclissi.

Un'osservazione durante un'eclissi è sempre un tormento: gli astronomi viaggiano da un capo all'altro del mondo, preparano con mesi di anticipo viaggio ed esperimenti, e tutto – alla fine – deve svolgersi nel giro di pochi minuti. Pochi minuti che possono facilmente andare perduti: basta che faccia brutto tempo, o addirittura che una singola nuvola si frapponga tra il telescopio e il sole, e tutto va perduto. In Crimea, infatti, non c'è solo la spedizione tedesca di Freundlich: ci sono anche altre missioni, tra le quali una argentina: è arrivata dagli antipodi per provare a cercare Vulcano, un ipotetico pianetino vicinissimo al Sole, di cui qualcuno ha ipotizzato l'esistenza al fine di giustificare una strana anomalia nel comportamento del perielio di Mercurio. Abbastanza curiosamente, questa anomalia sarà spiegata, senza bisogno di chiamare in causa nessun pianeta aggiuntivo, proprio dalla Relatività Generale di Einstein.

4 *L'osservatorio di Finlay-Freundlich a Postdam: si chiama "Einsteinturm", la Torre di Einstein*

Gli astronomi a caccia di eclissi sono pronti alla disperazione causata da un semplice cielo nuvoloso. Gli astronomi a caccia di eclissi sono pazienti e pronti alla rassegnazione. Ma forse non sono preparati all'idea di sbattere il muso contro gli artigli della storia.

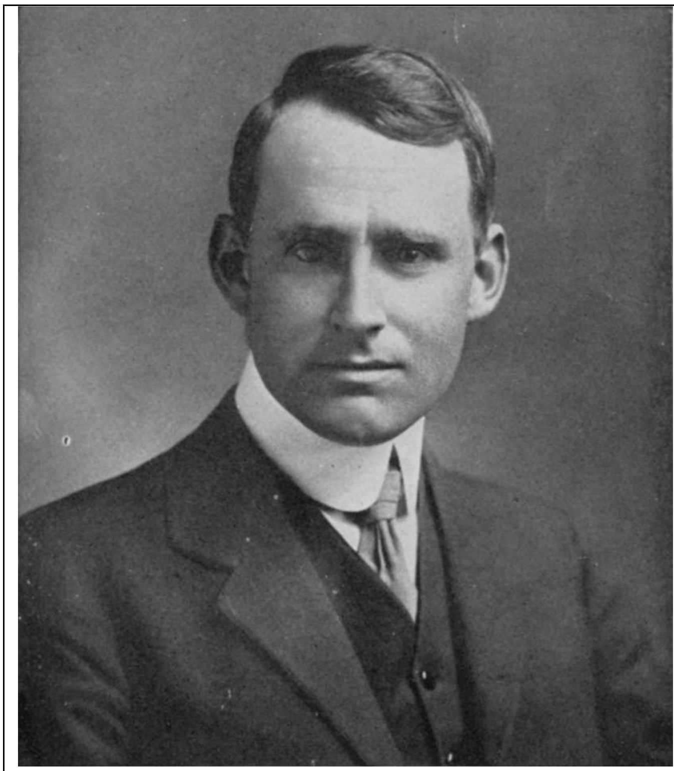
Abbiamo visto come Finlay-Freundlich, astronomo tedesco, si trovi in Crimea, territorio russo, all'inizio di Agosto 1914. Il 28 Giugno Gavrilo Princip aveva ucciso a Sarajevo l'arciduca Francesco Ferdinando, erede al trono austroungarico; tre settimane dopo l'Austria, alleata della Germania, aveva dettato un ultimatum alla Serbia, alleata della Russia; le diplomazie continentali avevano passato i giorni forse più intensi della loro storia, ma senza alcun risultato utile. In conclusione, all'alba del 1° Agosto 1914, Germania e Russia sono in guerra. Una squadra di soldati russi intercetta gli astronomi tedeschi, ufficialmente nemici[7], e li arresta. Probabilmente, avevano dei cannoni con loro: di certo, i tedeschi avevano degli strani marchingegni a forma di cannone, abbastanza insoliti da preoccupare i militari russi. La conclusione è inevitabile: la spedizione tedesca in Crimea finisce ben lontana dalle osservazioni dell'eclissi, e il sole, tanto per usare una battuta frusta e logora, in quel giorno fatidico Finlay-Freundlich potrà vederlo solo a scacchi.

La tragedia scientifica, fortunatamente, non si trasforma anche in tragedia umana. La Prima Guerra Mondiale farà vedere al mondo massacri mai visti prima sul pianeta, ma nell'Agosto del 1914 non è ancora così feroce, almeno sul fronte russo-tedesco. Gli astronomi tedeschi saranno fatti oggetto di scambio con degli ufficiali russi, e nel giro di

[7] Con un nome così (freundlich in tedesco significa amichevole) è quasi il colmo... altra battuta inevitabile.

un mese riusciranno a tornare in patria. Di certo, la Relatività Generale sarà costretta ad aspettare un'altra eclissi.

Ma la scienza sa essere paziente, soprattutto quando non può fare altrimenti. Il meccanismo perfetto delle orbite dei corpi celesti continua incurante delle pazzie degli uomini, e in un bel giorno del 1919, a guerra finita (anche se certo non dimenticata) un'eclisse africana riuscirà dove quella di Crimea ha fallito. Per l'ennesimo capriccio della storia, non sarà però un astronomo tedesco a ratificare l'esattezza della Relatività, ma un suddito della corona britannica.



5 *Arthur Stanley Eddington*

Arthur Stanley Eddington nasce a Kendal, in Inghilterra, il 28 Dicembre 1882. Perde il padre in tenerissima età, e passa l'infanzia in condizioni, se non proprio disagiate, certo tutt'altro che floride. Arthur comunque mostra una buona riuscita scolastica nei primi anni di scuola, al punto di vincere, non ancora sedicenne, una borsa di studio per accedere all'università. Dopo un primo anno di studio vario e multidisciplinare, si dedica essenzialmente alla fisica; le sue condizioni di povertà naturalmente permangono, ma è abbastanza bravo da riuscire a mantenersi vincendo ripetutamente delle borse di studio: riesce quindi a laurearsi con ottime valutazioni nel 1904.

Curiosamente, è dopo la laurea che sembra far fatica a trovare il suo campo: prova dapprima ad iniziare un progetto di ricerca al Cavendish Laboratory, ma non si torva a suo agio; tenta allora di dedicarsi alla ricerca matematica, ma anche qui sembra non avere il successo sperato. Prima della fine del 1905, per fortuna, trova la sua strada: da bambino adorava osservare le stelle, e si era perfino costruito da solo un telescopio quando aveva meno di dieci anni. Quando gli si presenta l'opportunità di entrare al Royal Observatory di Greenwich, il suo destino è felicemente segnato.

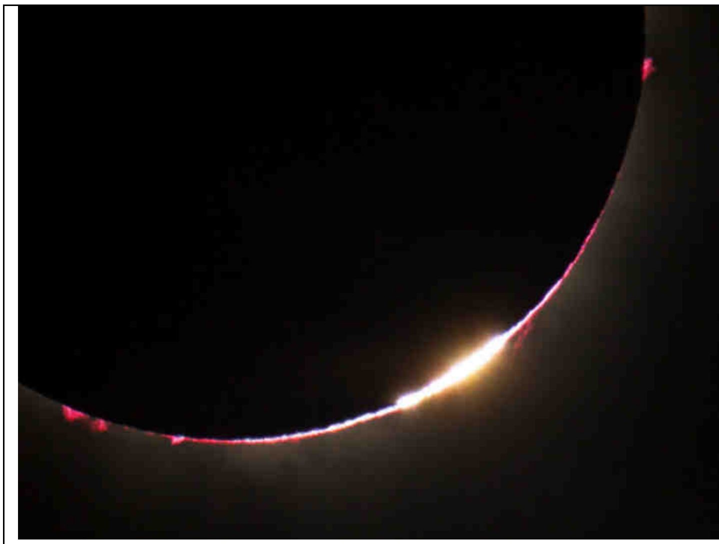
A Greenwich, Eddington si trova come un pesce nell'acqua: comincia a lavorare su ordinari problemi di astronomia, quali la determinazione di valori accurati della parallasse solare, il moto proprio delle stelle, la classificazione statistica degli astri. Nel 1914, anno fatidico sotto molti aspetti, diventa Direttore dell'Osservatorio. Quacchero osservante, si dichiara obiettore di coscienza e non partecipa in forma attiva alla Grande Guerra; e nel 1915, quando il mondo è davvero in fiamme, comincia ad interessarsi seriamente di Relatività Generale. Uno dei suoi argomenti preferiti è, guarda caso, proprio l'anomalo avanzamento del perielio di Mercurio.

È facile immaginare il seguito: giovane direttore di uno dei più prestigiosi osservatori astronomici del mondo, interessato alla Relatività Generale, Eddington organizza una spedizione all'Isola Principe, nell'Africa occidentale, con il preciso intento di mettere alla prova la deviazione dei raggi di luce prevista dalla teoria. Cinque anni dopo Freundlich, con lo stesso obiettivo; ma con una situazione al contorno decisamente diversa.

Parte nel Marzo 1919; l'eclissi era prevista alle due del pomeriggio del 29 Maggio. Per due mesi prepara l'accampamento e la strumentazione, in attesa dell'ora fatidica: e, naturalmente, quando il 29 Maggio finalmente arriva, il clima è fatalmente contrario. Piove. Anzi, più che piovere, è una vera e propria tempesta che flagella il campo in quella mattinata di primavera equatoriale.

Ma un dio pietoso e con simpatie per gli astronomi deve essersi mosso a compassione, da qualche parte nell'Olimpo: a mezzogiorno la tempesta cessa, smette di piovere. Un'ora e mezza dopo, tra le nubi che si diradano, gli astronomi inglesi riescono ad intravvedere uno spicchio di Sole. Eddington e i suoi corrono, preparano gli strumenti. Racconterà poi di non essere neppure riuscito a vedere davvero l'eclissi, preso com'era a cambiare le lastre fotografiche nei pochi minuti disponibili. Riuscì a prendere sedici fotografie, e in gran parte di esse le nuvole, che avevano benignamente lasciato libero il disco solare coperto dalla Luna, erano comunque ancora troppo vicine e coprivano le stelle che dovevano venire osservate. Solo le ultime foto della serie di sedici erano soddisfacenti per gli scopi prefissi dalla missione.

Ma sono sufficienti. Eddington si ferma ancora un po' all'Isola Principe, e comincia a valutare i risultati delle sue osservazioni. Il 3 Giugno annota sul suo diario di aver misurato in una foto la deviazione luminosa in accordo con la teoria di Einstein.


6 *Eclissi*

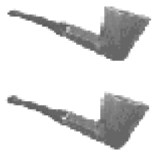
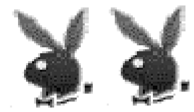
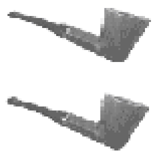
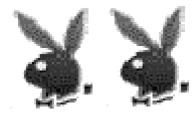
La Relatività Generale era dimostrata. L'osservazione rese famoso Eddington, ma assai più dell'inglese fu proprio Einstein a diventare una stella di prima grandezza della scienza: è da questo momento in avanti che inizia la sua popolarità in grado di varcare i limiti della notorietà accademica. Contava anche il fatto che, dopo la guerra, i fisici tedeschi erano messi un po' in disparte, e uno scienziato inglese che ratificava la rivoluzionaria teoria di un tedesco era un viatico importante per la diffusione globale della teoria stessa.

Eddington, da parte sua, rimase uno dei pochi esperti di Relatività Generale, almeno finché la RG non divenne patrimonio comune di fisici e astronomi. Scrisse il celebre "*Spazio, Tempo e Gravitazione*" che rimane ancora oggi uno dei testi più affascinanti per la comprensione dei punti essenziali della teoria. Continuò a lavorare, e a fare ricerca, e a scrivere testi. Morì a Cambridge nel 1944, ben prima del suo amico Albert, che pure era di tre anni più vecchio.

Destini ben diversi, quelli di Finlay-Freundlich e di Eddington: e probabilmente, la differenza principale non era tanto nelle capacità degli scienziati, quanto nelle circostanze storiche e politiche.

Insomma, i cannocchiali sembrano lavorare meglio quando i cannoni tacciono.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
VenghinoVenghino, SempreSiVince...			
Temporaneo bel tempo (nel giardino di Doc)			

2.1 VenghinoVenghino, SempreSiVince...

Qualche premessa:

1. Recentemente, Doc si è esibito nel suo *must*, per provare che la conoscenza della matematica non basta di fronte alla capacità di barare.
2. Il problema lo abbiamo trovato con N=2013, ma ci è sembrato troppo facile; comunque, se rispondete alla svelta potete aprire un banchetto e proporlo per i prossimi Capidanno[8], se trovate la formula generale.
3. A Doc, aduso ad aprire banchetti di taglia infima per proporre il "Gioco delle Tre Carte", abbiamo appena regalato un tavolo decisamente più ampio (e, data l'illegalità dei giochi da lui proposti, velocemente pieghevole e "intascabile": progetto di ***Sawdust***, quindi Eta Beta sta schiattando di invidia).

Bene, veniamo al gioco.

Doc ha appena raggranellato un numero N piuttosto grande di monete da un cent (come dicevamo, nell'esempio che abbiamo trovato non era una grossa cifra, ma voi state sulle generali), e li ha appena suddivisi in cinque mucchietti ciascuno ben visibile ai ~~polli~~ giocatori: il guaio è che è appena arrivato il VAdLdRM più giovane (il vecchio, come vi abbiamo spiegato l'altra volta, non ha tempo da perdere: "animali lunghi", come lo chiama Rudy, non è facile e pare si debba addirittura studiare).

A Fred viene chiesto di comunicare al colto e all'inclita un numero compreso tra 1 e N; a questo punto, Doc preleva dai cinque mucchietti un certo numero d di monetine per costruirne un *sesto*, in modo tale che sommando le monetine di *un certo numero* (decide Doc, tra uno e sei, evidentemente) di mucchietti, si ottenga esattamente *il numero comunicato da Fred.*

Fred vince il numero d di monetine spostate; considerato che, evidentemente, Fred vuole massimizzare d e Doc vuole minimizzarlo, riuscite a trovare una strategia per i nostri due eroi?

Attenti che sono perfettamente ~~logici~~ sobri: dall'estate passata, quando si impegnano bevono solo analcolici (questa ve la spieghiamo quando torna il bel tempo: coinvolge l'ex Luogo da Cui, la mamma di Rudy e Guglielmo Tell).

[8] Sì, il Calenda è in ritardo, al momento. Ma ci stiamo dando da fare. E secondo me si dice *Capidanno*, non *Capodanni* [RdA].

2.2 Temporaneo bel tempo (nel giardino di Doc)

Visto che lo scorso numero è venuto smilzo, ci sentiamo chiamati in causa e la tiriamo lunga, anche se in realtà era colpa vostra: risolvere i problemi, no, eh?

Siccome è smesso di piovere (dovrebbe ricominciare entro venti minuti), tecnicamente è tornato il bel tempo, quindi vi spieghiamo almeno una parte del *rovello* del problema precedente. Rudy, Doc e Fred tirano con l'arco nel prato antistante casa di Doc: data la loro abilità, ci si limita a una birra all'inizio, poi si va avanti ad analcolici (Rudy sta cercando di disegnare le magliette degli "Arcieri del χ'n VIII", dall'analcolico preferito dai tiratori), anche perché alla fine Rudy deve ricondurre a casa Fred e – visto che già è incavolato perché Fred (che ha cominciato a tirare a settembre, l'arco era il regalo per la scampata bocciatura) tira meglio di lui – meglio se non beve.

In merito, abbiamo un problema che *non è il problema*: una delle linee di tiro è *nel giardino* di Doc, ed è da 12 metri: potremmo portarla a 18 (minima distanza di gara) se Doc sfoltisse (senza abbattere) un albero, ma questa è *fatica*, quindi tiriamo nel *prato davanti* dove abbiamo a disposizione una linea da 18: qui il problema è che dietro il bersaglio c'è un campo di granturco, e se manchiamo il paglione dobbiamo cercare la freccia nel campo. Data l'inettitudine degli arcieri coinvolti, secondo vi conviene potare l'albero o continuare così? Cercate di convincere Doc, qualunque sia la vostra risposta (nel secondo caso, mandiamo sempre lui a cercare le frecce).

Veniamo al problema: colto da improvviso raptus giardinotecnico rigorosamente teorico (tra un po' gela, non se ne parla neanche di piantare alberi!), il nostro Doc ha individuato nel giardino un'area triangolare che vorrebbe "definire sui bordi" (che così dentro ci tiriamo con l'arco) con piante di tipo diverso: optato per delle betulle nei vertici (che si vedono bene e non servono a niente), adesso vorrebbe definire un po' meglio i lati, e all'uopo ha calcolato *altezze* e *bisettrici* riferite ad ogni angolo: segue dialogo.

Rudy: "Mi sa che se tracci con degli alberi queste linee, col cavolo che si tira: hai presente il concetto di *ceviana*? Hanno la pessima abitudine di traversare l'intero triangolo, quasi sempre"

Doc: "Perfettamente presente, tant'è che volevo mettere sei alberi nei *piedi* delle suddette a definire i lati, e li ho anche calcolati. Trovi i paletti che li indicano, e il triangolo è tale che tutti e sei i punti sono distinti. Pensavo a un bosso al piede delle altezze e a un ligustro al piede delle bisettrici, per mantenere la varietà. Vai e scava"

Ora, a scavare non ho problemi (anche perché bosso e ligustro basta posarli per terra che si radicano da soli), ma sapete benissimo che a disegno sono un incapace, quindi a occhio non so distinguere i due punti su un lato, visto che Doc ha usato per tutti i punti paletti uguali. E sapete anche che il giardino i Doc è decorato dal busto di un BE (Benevolo Euclide, quindi solo riga e compasso, nel senso classico dei termini) e dalla statua a figura intera di un MAM (Molto Arrabbiato Mascheroni: quindi *niente compasso,* per fargli dispetto).

Adesso, i problemi sono due: se non ce la fate con il secondo, limitatevi al primo, che mi dicono essere più facile.

Solo con la riga, riuscite a trovare dove va il bosso e dove il ligustro?

Ci sono dei tizi che sostengono il problema sia risolvibile con *tre soli tracciamenti di righe*: secondo voi, hanno ragione?

Poi, una domanda facile che mi è venuta in mente mentre scrivevo il tutto (no, non ho la soluzione, e neanche la risposta): quali triangoli *non possono esistere*[9] nel giardino di Doc? Esiste una "formula semplice" per trovarli?

---

[9] Riconosco che la domanda è posta nel peggiore dei modi possibili, e a me vengono in mente due casi: bosso e/o ligustro (attenti...) non sui lati ma su loro estensioni o picchetti segnaposto coincidenti. Insomma, vorremmo una cosa "ben formata", nel senso di trovare, su ogni lato, "betulla-un coso-l'altro coso-betulla". Sentitevi liberi, se rispetto all'impossibilità preferite esplorare l'esistenza, di trovare quali triangoli mostrino invece delle regolarità (ad esempio, tutti i cespugli equispaziati, o cose del genere).

Tranquilli, tanto fino a primavera di arco non si parla. Inoltre, data la nostra abilità, meglio se foderiamo il tutto (non solo il triangolo, l'intero tetraedro) di gommapiuma fermafrecce, quindi il problema è puramente teorico.

3. Bungee Jumpers

Trovate la soluzione generale dell'equazione: $x^3 + px + q = 0$.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Dicembre.

Da dove scrivo io la nebbia e il buio danno una bella rappresentazione dell'inverno ormai meteorologicamente presente, ed è difficile sorprendersi che la stagione delle nebbie da queste parti sia quella a tasso più alto di suicidi. Per mia fortuna attorno a me esiste tutto un mondo pieno di creazioni fantastiche, solidi ideali, laghi ghiacciati senza attrito, e tutti i contributi dei nostri lettori, che scaldano il cuore.

A questo proposito, il mese scorso ho lamentato l'assenza di soluzioni, e più di uno di voi ha precisato che la soluzione l'aveva inviata… siamo quindi tutti preoccupati della scarsa affidabilità della nostra posta elettronica. Naturalmente abbiamo dato tutta la colpa al nostro unico e grande Postino, che non fa il suo dovere nel mandare ricevute di ritorno, ma che ci volete fare, siamo tutti e tre con l'acqua alla gola per il nostri altri lavori, senza nemmeno contare gli eventi matematici, e facciamo un po' quello che possiamo.

A proposito di eventi, anche se sono sempre in ritardo ad aggiornarle, tenete d'occhio le pagine del Memento (http://www.rudimathematici.com/memento/mementodb.php), i miei compari a dicembre continuano a fare conferenze, una il dodici, chissà se riusciremo ad uscire in tempo per segnalarvela?

Sarà anche per la quantità di impegni, si trova sempre qualche errore in RM, e siamo orgogliosi e contenti di dirvi che qualcuno si è premurato di segnalarceli:

> Leggendo il numero RM177 a pagina 13 (problema 1) ci siamo accorti che c'è qualcosa che non va, in particolare, secondo i nostri calcoli il verso della disuguaglianza è invertito (come controesempio basta prendere $a_1=2$, $a_2=3$).
>
> Sicuramente è un refuso di stampa, che però si ripete anche nella dimostrazione a "pagina 46", nell'uso della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, inoltre è errato l'uso dell'ultima parentesi.

Bravi ***Laura*** e ***Marco***, ovviamente avete ragione, continuate così. Purtroppo avete vinto "solo" un abbonamento a vita a RM, ma quello che più conta è la nostra riconoscenza.

Passo subito alle soluzioni, spero che RM sia per voi antidepressivo e festivo, non dimenticate che a dicembre arriva poi anche il nostro famoso calendario, e siate allegri e felici...

4.1 [177]

4.1.1 Una serie di classici

Ecco, il problema degli Urubori continua a far pensare i nostri lettori. Ricopiamo il riassunto dal numero precedente, così sapete di che cosa parliamo:

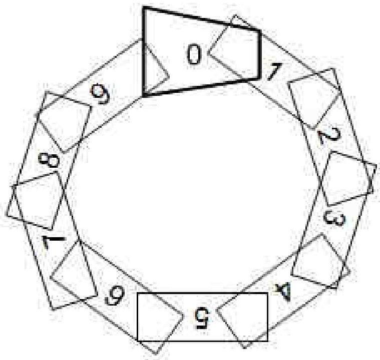
> *Gli Urobori si nutrono di sé stessi, e mangiando segmenti con sopra un determinato numero generano un altro segmento con sopra un numero, ma tutto da un'altra parte. Ogni segmento, a partire dalla testa, indica quanti segmenti con il numero di indice ha mangiato al giro prima: per capirci, l'Uroboro in figura (quella trapezoidale è la testa) ha mangiato zero segmenti contenenti* 0, *un segmento contenente* 1, *due segmenti contenti* 2, *eccetera: per la semplicità costruttiva, è noto come Vulgaris.*

Voi sapete che il vostro U. Vulgaris è alla sesta (ri)generazione: considerato che si è "mangiato tutto", quindi, per cinque generazioni, ha continuato a mangiare sé stesso e, con il metodo indicato, ha generato i nuovi segmenti. Ecco i problemi:

Ma come era fatto, l'Uroboro iniziale?

Riuscirò mai a trovare l'Uroborus Ectalis perfectus (sarebbe quello con i numeri da 0 *a* 99*, in ordine), e in quel caso, da cosa nasce?*

Esiste l'Uroborus Periodicus, ossia quello che ripete la numerazione dopo un certo numero di (ri)generazioni? Non necessariamente quella del Vulgaris, chiaro.



7 *U. Vulgaris (il trapezio è la testa)*

Sentitevi liberi di espandere l'analisi: non credo esistano l'U. Rationalis, U. Realis, U. Complexus, ma, se trovate il modo di farli riprodurre, loro di sicuro si divertiranno da matti: la mente vacilla, di fronte agli U. Quaternarius, U. Octonarius e U. Sedenionensis.

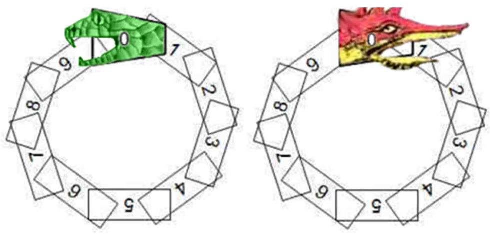
Il mese scorso abbiamo solo pubblicato i commenti dubbiosi di ***Carlo***, e non è che questo mese siamo da meno. Ci ha infatti scritto ***Br1***:

Questa è una *non-risposta* al quesito del mese scorso. Ho visto in RM178 che non sono stato l'unico a rimanere sia affascinato quanto perplesso dal quesito di RM177; l'alone di indeterminatezza mi pare abbia contagiato noi tutti poveri solutori (o aspiranti tali) dei problemini proposti…

La mia interpretazione del quesito sugli Urobori è che occorra non tanto risolvere il quesito in sé; bensì cercar di capire cosa questo richieda…

Mentre leggevo per la prima volta il testo del problema, la prima domanda che mi sono posto è stata: ma l'U. Vulgaris di *figura 1* è levogiro, o invece destrogiro?

Cioè, il prossimo segmento di sé stesso che il nostro *U. Vulgaris* volesse incorporare, sarebbe quello contenente 9, o invece 1?



8 *Levogiro o destrogiro?*

La seconda domanda è: ma, dato un qualsiasi Uroboro, il numero di segmenti che lo compone è costante, o no? Vi sono *classi* di Urobori di diversa lunghezza? Nello scenario dubitoso fornito da ***Carlo*** (come si legge in RM178) il suo Uroboro variava in lunghezza da 4 a 4 poi a 2 e quindi a 5 ed infine a 2 segmenti… È concessa questa variazione?

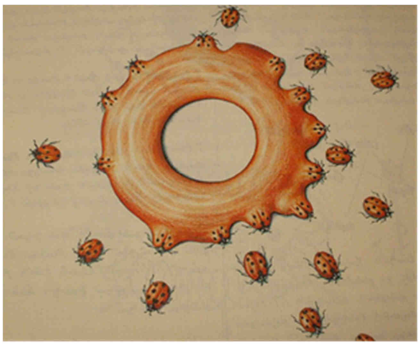
Poi… L' U. Vulgaris della solita *figura 1* viene dichiarato come un esemplare che ha compiuto 5 *generazioni*. Sommando le precedenti *mangiate di segmenti* mostrate in figura si ottiene 45. Quindi 9 azzannate di coda per generazione… Ma non dovrebbero essere 10? Come si configura una *(ri)generazione*? Quali passi esegue l'Uroboro per passare da una *(ri)generazione* alla successiva?

Quand'ero studente (tanti anni fa…), mi divertivo coi colleghi di Università a commentare gli *esempi scurificatori…* Presentati come illuminanti casi che avrebbero dovuto (nell'onesta intenzione dei docenti) chiarire a noi pargoletti trepidanti i misteri fisico-matematici… E invece confondevano le idee e ci mandavano in tilt…

2. Riuscirò mai a trovare l'Uroborus Ectalis perfectus (sarebbe quello con i numeri da 0 *a* 99*, in ordine), e in quel caso, da cosa nasce?*

Ma, i numeri nei segmenti, sono solo da 0 a 9, o comprendono tutti gli interi? Se un Uroboro si magna un segmento contenente, chessò, il numero 7; e se il suo settimo segmento conteneva 9, questo diviene 10? Qual è il settimo segmento? È poi proprio *lui* quello giusto da modificare? Se, dopo una magnata, compare un numero maggiore dell'ultimo massimo precedentemente presente, appaiono d'improvviso tutti i segmenti intermedi, con valore 0? L'Uroboro si espande di conseguenza?

3. Esiste l'Uroborus Periodicus, ossia quello che ripete la numerazione dopo un certo numero di (ri)generazioni? Non necessariamente quella del Vulgaris, chiaro.

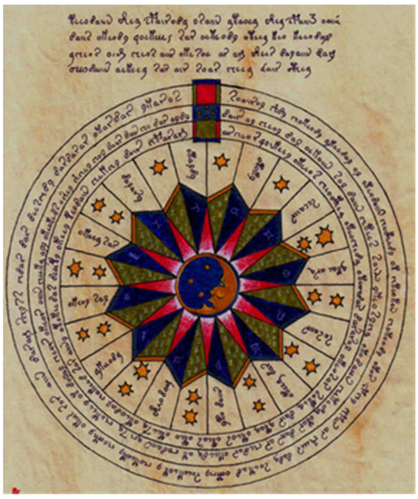


9 *Codex Seraphinianus*

Ma se ad ogni passo il nostro Uroboro si mangia *comunque* un qualche numero, non dovrebbe poi incrementare di un'unità il corrispettivo segmento (qualunque esso sia, e non si sa bene quale)? La sequenza non dovrebbe essere quindi strettamente crescente? Come potrebbe mai essere *periodica*? Oppure si *resetta* ogni tanto? Con che regole?

Comunque, il quesito dell'Uroboro lo vedrei bene collegato al Codex Seraphinianus…

O, in alternativa, al manoscritto di Voynich.



10 *Manoscritto di Voynich*

Cioè, al massimo dell'incomprensibilità e della fantasia…

Naturalmente sia ***Carlo*** sia ***Br1*** hanno ragione da vendere, ma chi scrive queste righe non sa da che parte cominciare per rispondere, a meno che il Capo si decida a fare una qualche dichiarazione non oso esprimermi in nessuna direzione.

Però vi passo le altre "coincidenze uroboriche" di ***Br1***, visto che mi hanno molto divertito:

> (…) vi scrivo ancora sugli urobori; ma non perché io ne abbia cavato qualcuno dal buco (ci ho pensato su ancora per un po', quindi ho lasciato perdere...), bensì perché sono capitate un paio di piccole coincidenze in merito, che mi sembrano divertenti e quindi passo a raccontarvi.
>
> Pur essendo io un lettore quasi compulsivo nonché onnivoro, nel mio più che cinquantennale percorso letterario non avevo mai, fino ad un paio di mesi fa, letto alcunché di Fruttero & Lucentini. Poi, credo fosse più o meno metà ottobre, mi son lasciato irretire da un offerta low cost, e mi sono portato a casa "Enigma in luogo di mare". Beh, mi è piaciuto moltissimo, tanto che ad inizio novembre, in piene meditazioni uroboriche, ho poi bissato acquistando "A che punto è la notte".
>
> Beh, la prima coincidenza (debole) sta nel fatto che il romanzo si svolge interamente a Torino, in probabile ragione del fatto che Fruttero era torinese di nascita, mentre Lucentini a Torino visse e morì. E Torino è la città nota sede dei Rudi...
>
> E poi, seconda coincidenza, stavolta forte (anzi fortissima), il romanzo è totalmente pervaso di uroboricità:

11 *Coincidenze?*

> pag. 285: "La setta degli Ofiti venerava il serpente ciclico... l'Ophis, appunto, l'animale pneumatico per eccellenza... raffigurato nell'atto di mordersi la coda e

inghiottire se stesso: simbolo del Creato che si riassorbe e annulla in quel vuoto, in quel Logos negativo e astratto, che per la gnosi è pienezza suprema."

pag. 295: "Santamaria capì alla prima occhiata: il segno tracciato rozzamente tutto attorno al foglio voleva raffigurare un serpente, il grande cerchio del serpente gnostico occupato a mangiarsi la coda. All'interno del cerchio, la stessa mano incompetente o impaziente aveva disegnato con la stessa matita blu una casella centrale contrassegnata col numero 1, e una raggera di caselle più piccole numerate fino a 36. La costellazione degli Eoni. Il Pleroma"

.. e poi molti altri riferimenti, che vi risparmio...

E infine, a chiudere il cerchio (giuro che me ne sono accorto solo alla fine!), risfogliando RM177 ho visto fiammeggiare sullo schermo del PC il nome del traduttore della lunga citazione che introduce il quesito degli urobori: F. LUCENTINI...

Quello che ***Br1*** forse non sa, è che il Capo è un Torinese tra o più orgogliosi, e che F&L sono tra i suoi autori preferiti. Coincidenze o no, si dovrà ora decidere a darvi qualche spunto, ed infatti, mentre lavoravo a queste pagine, ci scrive:

...diciamo che ci siamo cascati tutti, autore incluso?

Allora, con calma.

Ho recuperato la prima edizione di un libro di matematica ricreativa, nella quale era presente (con i "soli numeri", senza serpenti in giro) il problema presentato: di soluzione, non se ne parlava, evidentemente.

Comunque, secondo quanto presentato, il nostro Uroboro avrebbe l'aria abbastanza *logaritmica*, nel senso che al giro precedente sui vari segmenti doveva avere un qualcosa come *quarantacinque* cifre a formare *dieci* numeri (quindi diciamo un qualchecosa dalle parte delle migliaia per ogni segmento) e, nel giro precedente, una *decina di migliaia* di cifre per fare i dieci numeri del serpente precedente. Problema che ha chiaramente dei problemi di margine, volendo pubblicare anche solo la risposta e non la soluzione.

La sorpresa nasce con la *seconda* edizione del libro: il problema è profondamente modificato! Segue testo (nostra traduzione):

Il settore esterno del cerchio è diviso in 13 *settori* [e non 10] *e contiene i numeri da* 0 *a* 12. *I* 4 *cerchi concentrici interni sono anche loro suddivisi in* 13 *settori, dei quali non sappiamo i numeri. Si devono usare i numeri del primo cerchio per trovare quelli del secondo, e così via, secondo il metodo di seguito.*

Il numero da mettere nel primo settore del secondo cerchio [dall'esterno!] *indica il numero totale di* 0 *che si troveranno nei settori del secondo* [...e non del primo, come scritto nella prima edizione!] *cerchio. Il settore al di sotto dell'*1 *del primo cerchio dovrà contenere il numero di* 1 *del secondo* [...aridanghete...] *cerchio, e avanti in questo modo. Completato il secondo serpente, si procede a calcolare il terzo, eccetera.*

Alla fine, secondo il Nostro, dovremmo arrivare ad un serpente (nella nostra terminologia) che riproduce sempre lo stesso insieme di numeri, quindi diventa, in un certo senso (a noi il termine pare sbagliato, ma...) *ciclico*: quanti passaggi dovete fare, prima di avere questa ciclicità?

Siccome a questo punto non mi fidavo, sono andato a vedere la soluzione: mah, secondo me è *sbagliata*.

Adesso non lamentatevi: chi aveva comprato il libro, ha dovuto aspettare *tre anni* per avere il problema giusto, voi ve la cavate in un paio di mesi.

Il Capo come al solito è fumoso, ma magari qualcuno lo capisce (certo non io). Andiamo avanti.

4.1.2 Una Grande Rivista (o un Piccolo Archivio)

Per scoprire che cosa ha a che fare il titolo con il problema, mi sa che vi tocca andare a riprendervi RM177, che il numero di premesse incapsulate del Capo non sono riuscita a seguirlo nemmeno io. Però il testo verteva di spartimento di torte, che è un bel divertimento tra i matematici:

> *I nostri protagonisti sanno dell'esistenza di due torte. Alberto taglia sia la prima sia la seconda, Fred sceglie un pezzo della prima torta e chi sceglie il pezzo più grosso della prima sceglie per secondo sulla seconda torta. Alberto deve tagliare la seconda torta dopo aver fatto tutte le operazioni (scelta di Fred compresa) sulla prima: due torte, sul tavolo, non ci stanno. Considerato che ciascuno dei due vuole il massimo di torta, come deve tagliare Alberto la prima e la seconda torta?*
>
> *E se le torte sono tre, Alberto continua a tagliare, ma Fred avrà la prima scelta due volte, mentre Alberto l'avrà una sola: per intenderci, Alberto taglia, e Fred decide se scegliere per primo o per secondo (e il primo che sceglie prende la fetta grossa); poi Alberto taglia la seconda torta, e anche qui Fred sceglie se scegliere per primo o per secondo (idem); infine, Alberto taglia l'ultima torta, e qui la scelta di chi sceglie per primo è obbligata.*
>
> 1. *Come può Alberto assicurarsi nei due casi la massima razione di torta?*
> 2. *Generalizzazioni (n torte, k giovini, tagliano in più di uno...)*
> 3. *Tornando ai due, esiste un modo per garantire ai due estremamente golosi e estremamente logici la stessa dose di torta?*

Bene, il mese scorso mi lamentavo dell'assenza di soluzioni, ma ***Alberto R.*** ne aveva mandata una che si è persa nei meandri della posta elettronica. Grazie al reinvio ve la posso passare con tutti i suoi commenti:

> <u>Caso delle due torte.</u>
>
> Siano x, y le fette più piccole di ciascun taglio; $(1–x)$, $(1–y)$ le più grandi.
>
> Sono possibili 2 percorsi:
>
> Percorso 1 (Con il quale Fred accumula un totale $T_1 = x + 1/2$)
>
> - Alb taglia
> - Fred non sceglie, quindi resta con x
> - Alb taglia a metà (perché sa che Fred sceglierà)
> - Fred prende 1/2
>
> Percorso 2 (Con il quale Fred accumula un totale $T_2 = 1 – x$)
>
> - Alb taglia
> - Fred sceglie $(1–x)$
> - Alb, sapendo che Fred non può più scegliere, taglia una fettina omeopatica (praticamente y=0)
> - Alb prende 1 ed Fred resta con la microfetta y=0
>
> In sostanza Fred sceglierà il maggiore tra T_1 e T_2 che, però, dipendono entrambi da x che Alb sceglierà in modo da rendere minimo il più grande tra T_1 e T_2.
>
> La simpatica regoletta del *minimomassimo* (evidente anche senza dimostrazione) afferma che se $f(x)$ è una funzione crescente di x e $g(x)$ è una funzione decrescente di x, la funzione $h(x)$, definita come $h(x) = \max[f(x), g(x)]$, ha un minimo $h(x_0)$ in x_0 soluzione dell'equazione $f(x) = g(x)$. [Esiste naturalmente anche la regola duale del *massimominimo*, ma adesso non ci serve].
>
> La regola del *minimomassimo* è applicabile al nostro caso perché T_1 è funzione crescente di x e T_2 è funzione decrescente di x.
>
> Dalla $T_1 = T_2$ si ricava $x = 1/4$, quindi $T_1 = T_2 = 3/4$ è la quota conquistata da Fred, mentre Alb si sbafa i restanti 5/4 di torta.
>
> <u>Caso delle tre torte</u>

Siano x, y, z le fette più piccole di ciascun taglio; $(1–x)$, $(1–y)$, $(1–z)$ le più grandi.

Sono possibili tre percorsi, a seconda che Fred scelga-di-non-scegliere al primo, al secondo o al terzo taglio:

Percorso 1 (Con il quale Fred accumula un totale $T_1 = x + 1$)

- Alb taglia
- Fred non sceglie, quindi resta con x
- Alb taglia a metà (perché sa che, poi, sarà Fred a scegliere)
- Fred prende 1/2
- Alb taglia a metà (perché sa che, poi, sarà Fred a scegliere)
- Fred prende 1/2

Percorso 2 (Con il quale Fred accumula un totale $T_2 = 1 – x + y + 1/2$)

- Alb taglia
- Fred sceglie $(1–x)$
- Alb taglia
- Fred non sceglie quindi resta con y
- Alb taglia a metà (perché sa che, poi, sarà Fred a scegliere)
- Fred prende 1/2

Percorso 3 (Con il quale Fred accumula un totale $T_3 = 2 – x – y$)

- Alb taglia
- Fred sceglie $(1–x)$
- Alb taglia
- Fred sceglie $(1–y)$
- Alb, sapendo che Fred non può più scegliere, taglia una fettina omeopatica (praticamente z=0)
- Alb prende 1 e Fred resta con la microfetta $z = 0$

Applicando la regola del *minimomassimo* a T_2 e T_3 (l'uno crescente e l'altro decrescente in y) si ottiene $y = 1/4$. Applicando poi la stessa regola a T_1 e T_2 (l'uno crescente e l'altro decrescente in x) si ottiene $x = 3/8$. In definitiva Fred prende 11/8 e Alb 13/8.

<u>Ulteriori domande.</u>

La generalizzazione a n torte e k giovani mi sembra intrattabile. Peraltro bisognerebbe stabilire, per ogni torta, quali dei k giovani hanno diritto di scelta e l'ordine con cui le scelte stesse devono essere espresse, generando una miriade di casi e sottocasi.

Invece la più modesta generalizzazione a n torte e due giovani può essere risolta (presumo) con la ripetuta applicazione della regola del *minimomassimo*.

Infine la domanda se "esiste un modo per garantire ai due, estremamente golosi ed estremamente logici, la stessa dose di torta" mi ha lasciato perplesso per la sua banalità: basta attribuire a Fred tanti diritti di scelta quante sono le torte che Alb dovrà tagliare!

PS: Non amo i dolci, ma per risolvere il problema ho dovuto immedesimarmi nel mio omonimo che ingurgitava enormi fette di schifosissime torte. Mi è passato l'appetito. Vi prego, la prossima volta che proporrete la ricerca di una strategia intesa a massimizzare un'abbuffata, mettete in palio tagliatelle ai tartufi, grigliate di pesce, beccacce alla cacciatora o tordi allo spiedo. Ci conto. Grazie.

Povero Alberto… certo che RM è cresciuto con i due protagonisti, che ora hanno un'età in cui le tagliatelle ai tartufi potrebbero interessare. Da buona correttrice di bozze farò presente al generatore massimo di problemi.

4.2 [178]

4.2.1 Braccia (fortunatamente) sottratte all'agricoltura

Bene, finalmente siamo arrivati ai problemi di questo mese.

Ecco il testo del primo:

> *Un tubo per innaffiare, su una lunghezza di un metro, si è ritrovato una serie di buchi, in posizione al centimetro 100/i per i = 1, 2, 3, ..., e adesso si tratta di aggiustarlo. Abbiamo un pezzo di nastro adesivo della lunghezza di 25 centimetri. Conoscendo la posizione di ognuno dei buchi, aggiustare il tubo tagliando il nastro nel minor numero possibile di pezzi, e sapendo che i buchi vengono chiusi se il nastro arriva esattamente su di essi. Si può anche generalizzare per diverse lunghezze del nastro adesivo, diverse distribuzioni dei buchi,…*

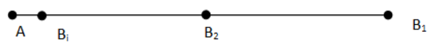
Gli "aiutini" del Capo anche in questo caso non erano molto chiarificatori: ci scrive ***Alberto R.***:

> Tagliamo i 25 cm di nastro in 5 pezzi, uno da 21 cm e 4 da 1 cm.
>
> Con il pezzo più lungo copriamo tutti i buchi nelle posizioni $100/k$ cm, con $k \geq 5$.
>
> Con i restanti 4 pezzetti tappiamo i buchi in posizione 100/4, 100/3, 100/2 e 100/1.
>
> Dunque 5 pezzi sono sufficienti. Sono anche necessari? A lume di naso direi di sì, ma sono generoso e lascio ad altri il piacere di dimostrarlo.
>
> PS: La battuta su Dedekind (con riferimento al suo assioma di continuità?) non l'ho capita.

Ci stiamo affezionando ai suoi PS… il Capo dice che il riferimento era al "taglio alla Dedekind", visto che il nastro adesivo copre il buco se ci arriva giusto. Mah.

Vediamo che cosa scrive ***Mirhonf***:

> Fissata l'origine del riferimento in A, il primo foro si trova in B_1 a distanza 100 cm da A; il secondo in B_2 a 50 cm da A, …, l'i-esimo in B_i a $100/i$ cm da A.



Distanza da A:	
B1	100
B2	50
B3	33,33333
B4	25
B5	20
B6	16,66667
B7	14,28571
B8	12,5
B9	11,11111
B10	10
B11	9,090909
B12	8,333333
B13	7,692308
B14	7,142857
B15	6,666667
B16	6,25
B17	5,882353
B18	5,555556
B19	5,263158
B20	5

> I buchi B_i si addensano, per i che cresce, verso A. Avendo a disposizione un nastro da 25 cm, dobbiamo necessariamente tagliare una striscetta piccola a piacere (1° taglio) per coprire B_1, e rimangono 25–ε cm per coprire tutti i B_i, per $i>1$. Allora è necessario tagliare un'altra striscetta piccola a piacere per coprire B_2 (2° taglio), e rimangono ancora 25–ε cm per coprire tutti gli altri B_i, $i>2$, insufficienti per coprire i 33,3 cm rimanenti. Allora è necessario tagliare un'altra striscetta piccola a piacere per coprire B_3 (3° taglio), e rimangono ancora 25–ε cm per coprire tutti gli altri B_i, $i>3$, insufficienti per coprire i 25 cm rimanenti. Allora è necessario tagliare un'altra striscetta piccola a piacere per coprire B_4 (4° taglio), e rimangono ancora 25–ε cm sufficienti per coprire i 20 cm rimanenti. In tutto sono necessari 4 tagli.
>
> Più in generale, se L è la lunghezza del tubo forato, se i buchi si trovano in $B_i = L/i$, fissata l'origine del riferimento in A, il primo foro si trova in B_1 a distanza L da A; il secondo in B_2 a distanza L/2 da A, …, l'i-esimo in B_i a distanza L/i da A; sia l la lunghezza del nastro.
>
> Se $l \geq L$, non è necessario alcun taglio per tappare tutti i buchi;
>
> Se $\frac{L}{i+1} < l \leq \frac{L}{i}$ allora saranno necessari i tagli per tappare tutti i buchi, poiché i saranno i termini L/i maggiori di l.
>
> Note L ed l, il numero minimo di tagli da fare per tappare tutti i buchi è tale che $l \leq \frac{L}{n} \Rightarrow n \leq \frac{L}{l} \Rightarrow n = \left\lfloor \frac{L}{l} \right\rfloor$.
>
> Se ad esempio L=100 cm e l=9 cm, applicando la suddetta formula, n è la parte intera di 100/9, quindi n=11. Infatti, gli 11 tagli servono a tappare i buchi da B_1 a

B*11*. Il nastro rimanente è lungo 9–ε cm che riesce a coprire gli 8,33333… cm in cui sono contenuti tutti i restanti B$_i$.

Se i buchi si trovassero in P_i=L/(2i), i>0, se L=100, la posizione dei punti sarebbe la seguente:

P_1	50
P_2	25
P_3	16,66667
P_4	12,5
P_5	10
P_6	8,333333
P_7	7,142857
P_8	6,25
P_9	5,555556
P_{10}	5
P_{11}	4,545455
P_{12}	4,166667

In questo caso in realtà, la lunghezza del tratto forato è di L/2 e come nel caso precedente, se $\frac{L}{2(i+1)} < l \le \frac{L}{2i}$ allora saranno necessari i tagli per tappare tutti i buchi, poiché i saranno i termini L/(2i) maggiori di l. Come sopra, note L ed l, il numero minimo di tagli da fare per tappare tutti i buchi è tale che $l \le \frac{L}{2n} \Rightarrow n \le \frac{L}{2l} \Rightarrow n = \left\lfloor \frac{L}{2l} \right\rfloor$.

Se ad esempio L=100 cm e l=9 cm, applicando la suddetta formula, n è la parte intera di 100/18, quindi n=5. Infatti, i 5 tagli servono a tappare i buchi da P_1 a P_5. Il nastro rimanente è lungo 9–ε cm che riesce a coprire gli 8,33333… cm in cui sono contenuti tutti i restanti P_i.

Se i buchi si trovassero in D_i=L/(2i–1), i>0, se L=100, la posizione dei punti sarebbe la seguente:

D_1	100
D_2	33,33333
D_3	20
D_4	14,28571
D_5	11,11111
D_6	9,090909
D_7	7,692308
D_8	6,666667
D_9	5,882353
D_{10}	5,263158
D_{11}	4,761905
D_{12}	4,347826

Se $\frac{L}{2i+1} < l \le \frac{L}{2i-1}$ allora saranno necessari i tagli per tappare tutti i buchi, poiché i saranno i termini L/(2i–1) maggiori di l.

Note L ed l, il numero minimo di tagli da fare per tappare tutti i buchi è tale che $l \le \frac{L}{2n-1} \Rightarrow n \le \frac{1}{2}\left(\frac{L}{l}+1\right) \Rightarrow n = \left\lfloor \frac{1}{2}\left(\frac{L}{l}+1\right) \right\rfloor$.

Se ad esempio L=100 cm e l=9 cm, applicando la suddetta formula, n è la parte intera di ½*(100/9+1), quindi n=6. Infatti, i 6 tagli servono a tappare i buchi da D_1 a D_6. Il nastro rimanente è lungo 9–ε cm che riesce a coprire i 7,6923… cm in cui sono contenuti tutti i restanti D_i.

Se i buchi si trovassero in B_i=L/(2^{i-1}), i>0, se L=100, la posizione dei punti sarebbe la seguente:

B_1	100
B_2	50
B_3	25
B_4	12,5
B_5	6,25
B_6	3,125
B_7	1,5625
B_8	0,78125
B_9	0,390625
B_{10}	0,195313
B_{11}	0,097656
B_{12}	0,048828

Se $\frac{L}{2^i} < l \le \frac{L}{2^{i-1}}$ allora saranno necessari i tagli per tappare tutti i buchi, poiché i saranno i termini L/(2^{i-1}) maggiori di l.

Note L ed l, il numero minimo di tagli da fare per tappare tutti i buchi è tale che $l \le \frac{L}{2^{n-1}} \Rightarrow n \le \log_2 \frac{L}{l} + 1 \Rightarrow n = \left\lfloor \log_2 \frac{L}{l} + 1 \right\rfloor$.

Se ad esempio L=100 cm e l=9 cm, applicando la suddetta formula, n è la parte intera di $\log_2$(100/9)+1, quindi n=4. Infatti, i 4 tagli servono a tappare i buchi da B_1 a B_4. Il nastro rimanente è lungo 9–ε cm che riesce a coprire i 6,25 cm in cui sono contenuti tutti i restanti B_i.

Lo stesso ragionamento vale per tutte le successioni di punti monotone, sia crescenti che decrescenti, purché convergenti.

F_1	50
F_2	66,66667
F_3	75
F_4	80
F_5	83,33333
F_6	85,71429
F_7	87,5
F_8	88,88889
F_9	90
F_{10}	90,90909
F_{11}	91,66667
F_{12}	92,30769

Nella tabella a sinistra, i buchi Fi si trovano in 100i/(i+1). Seguendo un ragionamento analogo a quanto visto sopra, se $\frac{L(i+1)}{i+2} < L - l \le \frac{Li}{i+1}$ allora saranno necessari i tagli per tappare tutti i buchi, poiché il primo buco si trova in L/2 e per i che cresce Fi si avvicina sempre più a L. Note L ed l, il numero minimo di tagli da fare per tappare tutti i buchi è tale che L–l≤ $\frac{Ln}{n+1} \Rightarrow n \ge \frac{L}{l} - 1 \Rightarrow n = \left\lceil \frac{L}{l} - 1 \right\rceil$. Se come sopra L=100 e l=9 cm, applicando la suddetta formula, n è la parte intera 100/9–1, quindi n=10. Infatti, i 10 tagli servono a tappare i buchi da F_1 a F_{10}. Il nastro rimanente è lungo 9–ε cm che riesce a coprire i 100–91,66667=8,44444 cm in cui sono contenuti tutti i restanti F_i.

Nella tabella a destra, i buchi G_i si trovano in $20(i+1)/i$, quindi partono da G_1=40 sino a L=20. Seguendo un ragionamento analogo a quanto visto sopra, se $G_{i+1} - L < l \leq G_i - L$ allora saranno necessari i tagli per tappare tutti i buchi. Note L ed l, il numero minimo di tagli da fare per tappare tutti i buchi è tale che $l \leq L\frac{n+1}{n} \Rightarrow n \geq \frac{L}{l} \Rightarrow n = \left\lceil \frac{L}{l} \right\rceil$. Se L=20 e l=9 cm, applicando la suddetta formula, n è la parte intera 20/9, quindi n=2. Infatti, i 2 tagli servono a tappare i buchi G_1 e G_2. Il nastro rimanente è lungo 9–ε cm che riesce a coprire i 26,66666–20=6,66666 cm in cui sono contenuti tutti i restanti G_i.

G1	40
G2	30
G3	26,66667
G4	25
G5	24
G6	23,33333
G7	22,85714
G8	22,5
G9	22,22222
G10	22
G11	21,81818
G12	21,66667

Esempio di successione non monotona ma convergente.

$$P_i = \begin{cases} \frac{20i}{i+1}, i \text{ } dispari \\ \frac{20(i+1)}{i}, i \text{ } pari \end{cases}$$

La successione dei punti converge a 20, ma i P_i dispari vi convergono dal basso, i P_i pari vi convergono dall'alto. Tutti i punti sono compresi tra P_1 e P_2. Quindi se avessi a disposizione un nastro di lunghezza $l \geq 20$ non dovrei effettuare tagli. L'intervallo tra P_i e P_{i+1} è sempre più piccolo. Considerando per semplicità di calcolo, che la distanza tra un punto di posto pari ed il precedente è maggiore che tra lo stesso e il successivo, calcolo la suddetta distanza per i+1 pari:

P1	10
P2	30
P3	15
P4	25
P5	16,66667
P6	23,33333
P7	17,5
P8	22,5
P9	18
P10	22
P11	18,33333
P12	21,66667
P13	18,57143
P14	21,42857
P15	18,75

$$P_{i+1} - P_i = \frac{20(i+2)}{i+1} - \frac{20i}{i+1} = \frac{40}{i+1}.$$

Quindi, noto l, se $l < \frac{40}{n+1} \Rightarrow n = \left\lfloor \frac{40}{l} - 1 \right\rfloor$.

Così se l=9cm, n è la parte intera di (40/9–1)=3. Infatti, tagliate 3 striscette per tappare P_1, P_2 e P_3, i restanti 9–ε cm sono sufficienti a coprire i punti rimanenti compresi tra P_4 e P_5, infatti 25–16,6666…=8,4444…<9–ε.

Se l=8 cm invece, otteniamo n=4. Infatti $P_4 - P_5$>8–ε. Dobbiamo effettuare un altro taglio per coprire P_4 e risulta $(P_6 - P_5)$=6,77777….<8–ε.

Se l=4 cm, otteniamo n=9. Infatti, coperti tutti i punti da P_1 a P_9 restano 4–ε cm sufficienti a coprire tutti gli altri P_i: infatti risulta $(P_{10} - P_{11})$=3,77777….<4–ε.

I nostri lettori non si smentiscono mai. ***Sawdust***, per esempio, è mancato per un mese, ma si è subito fatto risentire:

Ho solo il dubbio seguente riguardo alla posizione dei fori: i fori sono sui centimetri interi, quindi arrotondati dalla divisione, o solo sui punti che dalla divisione ritornano interi (e quindi escludendo i=3, 6, 7, 8, ….?

Comunque il risultato cambia di poco:

- nel primo caso basta un pezzo di nastro da 24 cm per chiudere tutti i fori compresi tra il centimetro 1 e il centimetro 25 (con $i \leq 100$), e col centimetro restante diviso in 3 parti si rattoppano i fori corrispondenti a i=1, 2 e 3. Se i può essere >100, ma il giardiniere deve proprio aver avuto una bella ostinazione a insistere così selvaggiamente su quell'unico centimetro iniziale, allora basta una pezza da 20 cm per tappare tutti i fori corrispondenti a $i \geq 5$, e dai 5 cm rimanenti si ricavano 4 pezze per i fori corrispondenti a i=1, 2, 3 e 4.
- Nel secondo caso resterebbero solo i fori ai centimetri 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 e 100 (qui escludendo a forza il centimetro 0 corrispondente a $i=\infty$), e allora la striscia da 24 cm chiuderebbe i buchi corrispondenti a i=4, 5, 10, 20, 25, 50 e 100 mentre 2 toppe da 0,5 cm riparerebbero i danni per i=1 e 2.

Direi che siamo tutti d'accordo. O no? Scriveteci.

4.2.2 Sul confine dei due mondi

Siamo finalmente arrivati all'ultimo problema. Il Capo è di nuovo al taglio delle torte (ha ragione ***Alberto***, la situazione sta diventando noiosa) proviamo a riscrivere il problema senza dolci:

> *Come inscrivere un n-agono regolare di area massima in un m-agono regolare?*

Il problema era posto nel caso particolare di m=4 e n=6, ma il caso si chiedeva se esistessero soluzioni generali, anche nel caso $m<n$. Poi il Capo proponeva un secondo problema:

> *Vorremmo una pizza esagonale (non necessariamente regolare) avente diametro – definito come la massima distanza tra due vertici del poligono – unitario: potreste calcolare come dovrebbe essere quella di area massima?*

Il grandissimo ***trentatre*** risponde al primo problema, ma ci sembra non esattamente a quello che aveva richiesto il Capo:

> Il problema ne comprende tre:
>
> 1 – tagliare un quadrato in pezzi con cui comporre un esagono (da cui sei fette uguali)
>
> 2 – inserire in un quadrato un esagono di area massima
>
> 3 – in generale inserire un poligono regolare di N lati e area massina in un altro di K lati.
>
> La fig. 1 riporta la soluzione del problema 1, con una nota scomposizione in 5 pezzi; e a destra la soluzione del problema 2: il rapporto delle aree è $(6\sqrt{3}-9)/2=0.696$.
>
> La questione 3 riprende un vecchio problema (RM116 2.1 – *Keplero era uno sprecone*). Le risposte date allora riguardavano solo valori particolari di N.

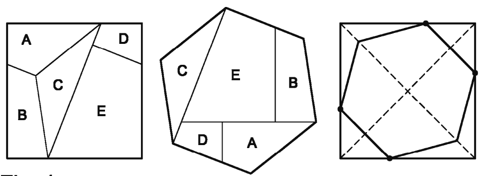


Fig. 1

> Ho provato a risolvere, per ogni N, un caso speciale: poligono regolare P di N lati con inscritto un poligono P^* di N+1 lati (quadrato dentro triangolo, pentagono dentro quadrato, ecc.).
>
> Se m è il rapporto fra il lato di P^* e quello di P, si cerca la posizione reciproca dei due poligoni e il valore m massimo. Riporto i risultati.
>
> Per ogni N dividiamo P^* (il poligono *interno* di N+1 lati, in rosso), a partire da un dato vertice, in triangoli come in fig. 2.

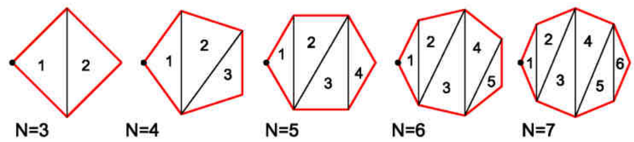


Fig. 2

> Sia t = (N–1)/2 se N è dispari, t = (N–2)/2 se N è pari. I triangoli adiacenti t, t+1 formano un trapezio i cui quattro vertici sono i vertici di P^* che sono in contatto con i lati di P nella soluzione massima.

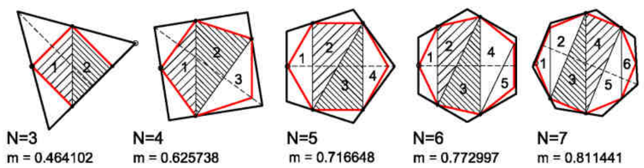


Fig. 3

> In fig. 3 il trapezio e i triangoli sono tratteggiati, ed è indicato il valore massimo di m. L'asse di simmetria del trapezio è anche asse di simmetria di P e P^*, e la condizione di contatto dei quattro vertici determina univocamente la posizione reciproca dei due poligoni.
>
> Per ogni N il rapporto m fra i lati è dato da

$$N \text{ dispari: } \frac{1}{m}=\frac{s}{s^*}=\frac{\sin\varepsilon}{\sin\varepsilon^*}\cdot\frac{\sin(t\varepsilon^*)}{\sin(t\varepsilon)}+\frac{\sin(\varepsilon/2)}{\cos\varepsilon}\cdot\frac{\sin(3\varepsilon/2)}{\sin(t\varepsilon)}$$

$$N \text{ pari: } \frac{1}{m}=\frac{s}{s^*}=\frac{\sin\varepsilon}{\sin\varepsilon^*}\cdot\frac{\sin(t\varepsilon^*)}{\sin((t+1)\varepsilon)}+\frac{\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon}\cdot\frac{\sin(\varepsilon+\varepsilon^*/2)}{\sin((t+1)\varepsilon)}$$

dove s, s^*: lati di P, P^*, $\varepsilon=\pi/N$, $\varepsilon^*=\pi/(N+1)$.

La dimostrazione è complicata; la riporto in breve.

In fig. 4 tutti gli stati possibili per N = 4. P^* è fisso, mentre P cambia come dimensione e orientamento.

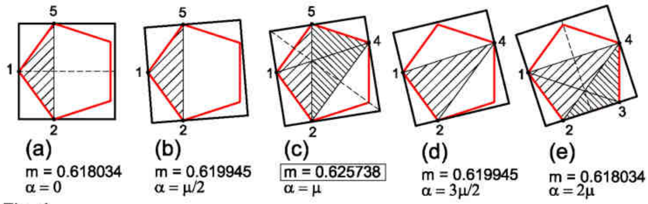


Fig. 4

Sia $S(a,b,c,...;\ \alpha)$ uno degli stati, con $a,b,c...$ vertici P^* in contatto con i lati di P, e sia l'angolo di rotazione $\alpha = 0$ nello stato (a). Per ogni valore di α la posizione di P è unica; α è dato in multipli di $\mu=\varepsilon^*-\varepsilon=\pi/(N(N+1))$.

Gli stati con $\alpha=0$, $\alpha=\mu$ presentano un asse di simmetria comune a P e P^*.

Partendo da (a) = $S(125;\ 0)$ e ruotando P, il triangolo (125) persiste fino a (c) = $S(1245;\ \mu)$ quando il vertice 4 entra in contatto con P. Continuando la rotazione il vertice 5 è interno (altrimenti 4 esce da P) e si passa al triangolo (124) in (d) che persiste fino a (e) = $S(1234;\ 2\mu)$. Aumentando ancora α si ritorna, a parte riflessioni e rotazioni della figura, a (d), ecc.

Lo stato (a) esiste per ogni N, e il comportamento è analogo.

Riassumendo:

1) – il numero K di vertici di P^* sui lati di P può essere solo 3 opp. 4; ogni stato K = 3 persiste in un intervallo $n\mu\le\alpha\le(n+1)\mu$; ogni stato K = 4 esiste solo per un preciso valore $n\mu$;

2) – i valori massimi di m corrispondono agli stati K = 4, cioè agli stati simmetrici; lo schema di fig. 2 è solo un modo di rappresentare (salvo rotazioni o simmetrie) tutti questi stati;

3) – vanno dedotte le formule per m

4) – m massimo è dato dai due triangoli adiacenti che formano il trapezio centrale, cioè $(t, t+1)$ con $t = (N-1)/2$ con N dispari, e $t = (N-2)/2$ con N pari.

Punto 1) – è evidente dal processo di fig. 4.

Punto 2) – gli stati K = 3 si riducono al problema di inscrivere uno nell'altro due triangoli di forma data (dati dai tre vertici di P^* e dai lati di P in contatto).

In fig. 5, la posizione e dimensione di (ABC) inscritto in (DEF) è determinata solo dalla rotazione reciproca dei triangoli. La trasformazione fra tutti i possibili (ABC) presenta un punto fisso U, e – in coordinate polari (ρ,ϑ) centrate in U – trasforma ogni punto del piano con $\rho=\rho_0/\cos(\vartheta-\vartheta_0)$. La trasformazione è conforme e tutti i punti del piano si spostano su rette. Il triangolo minimo $(A_0B_0C_0)$ è dato dai piedi delle ortogonali da U ai lati di (DEF).

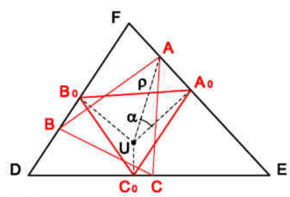


Fig. 5

Quindi negli stati K = 3, m può avere solo un minimo, e il massimo è in uno degli estremi del campo di esistenza dello stato, cioè in uno stato K = 4.

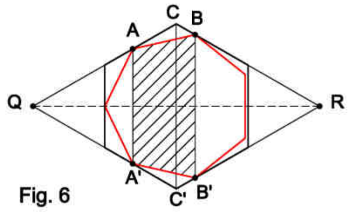


Fig. 6

> Punto 3) – in uno stato simmetrico (v. fig. 6) tutti gli angoli della figura sono definiti, e gli elementi di P si ricavano in funzione di quelli di P^* e degli angoli. Dai triangoli simili (QAA') e (QCC') si ottiene $CC'/AA' = f$ con f che dipende solo dagli angoli.
>
> Se d_k sono, in ordine di grandezza, le diagonali di un poligono regolare di N lati (con d_1 lato del poligono) valgono le $d_p / \sin(p\varepsilon) = d_q / \sin(q\varepsilon)$ per ogni p, q, con $\varepsilon = \pi / N$.
>
> In figura le lunghezze AA' e CC' sono diagonali di P^* e di P; cioè $AA' = d^*_n, CC' = d_k$ con n e k dati, e quindi $d_k / d_n^* = f$ da cui
>
> $\frac{1}{m} = \frac{s}{s^*} = \frac{d_1}{d_1^*} = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\varepsilon^*} \cdot \frac{\sin(n\varepsilon^*)}{\sin(k\varepsilon)} \cdot f$ in funzione dei soli angoli.
>
> Punto 4) – calcolando gli indici n, k, f per ogni stato simmetrico di N, dal confronto si ottiene lo stato con m massimo, che corrisponde al trapezio centrale, e quindi al parametro t indicato; fra i trapezi possibili questo è anche quello di altezza (distanza fra i lati paralleli) massima.

La soluzione è comunque bella e noi non ci disperiamo, perché di certo arriveranno altri contributi. ***Sawdust***, per esempio, si occupa solo della seconda parte:

> Penso che, stabilita la distanza massima tra 2 vertici, inevitabilmente l'esagono con la massima superficie sia quello regolare.

E con questo chiudo qui, per quest'anno. Vi arriverà ancora il calendario, ma le mie prossime righe sono programmate a gennaio, e con il solito ritardo sarà gennaio inoltrato.

Tanti auguri a tutti per questi giorni di festa.

5. Quick & Dirty

Il ristorante più vicino a casa di Rudy costa poco, ma il servizio è (a voler essere gentili) fetente. L'ultima volta gli è arrivato un caffè con dentro delle strane cose galleggianti e la prudenza lo ha spinto a chiederne la sostituzione. Arrivato il nuovo caffè, lo appoggia alle labbra e comincia a strillare che è lo stesso di prima, ripulito in qualche modo. Come ha fatto a capirlo?

6. Pagina 46

Cerchiamo i due numeri a e b che soddisfano l'equazione:

$$x^3 + px + q = x^3 + a^3 + b^3 - 3abx .$$

Per fare questo, dobbiamo risolvere in a e b le due equazioni in due incognite:

$$a^3 + b^3 = q , \qquad ab = -\frac{p}{3},$$

che equivalgono a:

$$a^3 + b^3 = q , \qquad a^3b^3 = -\frac{p^3}{27}.$$

Si verifica facilmente che a^3 e b^3 sono radici dell'equazione quadratica $z^2 - qz - \frac{p^3}{27} = 0$

e di conseguenza si ha:

$$a = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} , \qquad b = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} .$$

Possiamo svolgere l'equazione come:

$$x^3 + px + q = x^3 + a^3 + b^3 - 3abx = (a + b + x)(a^2 + b^2 + x^2 - ab - ax - bx).$$

Quindi la soluzione dell'equazione cubica si riduce alla soluzione dell'equazione di primo grado:

$$a + b + x = 0,$$

da cui otteniamo:

$$x_1 = -a - b,$$

ossia:

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}},$$

e dall'equazione quadratica:

$$x^2 + (a + b)x + a^2 + b^2 - ab = 0,$$

da cui segue che:

$$x_2 = \frac{a+b}{2} + \frac{(a-b)\cdot\sqrt{3}}{2}\cdot i,$$

$$x_3 = \frac{a+b}{2} - \frac{(a-b)\cdot\sqrt{3}}{2}\cdot i,$$

dove a e b sono state determinate precedentemente.

A margine, notiamo che questa espressione ci permette di risolvere la generica equazione di terzo grado:

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0,$$

cui ci si può sempre ricondurre dividendo tutti i termini per l'eventuale coefficiente del termine di terzo grado se questo è diverso da 1.

Infatti, è possibile la sostituzione:

$$x = y + c$$

e si ottiene:

$$y^3 + 3cy^2 + 3c^2y + c^3 + A\cdot(y^2 + 2cy + c^2) + B\cdot(y + c) + C = 0,$$

ossia

$$y^3 + (3c + a)\cdot y^2 + (3c^2 + 2Ac + B)\cdot y + (c^2 + Ac^2 + Bc + C) = 0.$$

Da questo, se imponiamo $c = -A/3$, ossia $x = y - A/3$, giungiamo alla:

$$y^3 + \left(\frac{3A^2}{9} - \frac{2A^2}{9} + B\right)\cdot y + \left(-\frac{A^3}{27} + \frac{A^3}{9} - \frac{AB}{3} + C\right) = 0,$$

che ha la stessa forma di quella data nel problema, per:

$$p = -\frac{A^2}{3} + B, \qquad q = \frac{2A^2}{27} - \frac{AB}{3} + C.$$

7. Paraphernalia Mathematica

Questa volta la premessa è che lo scrivente (Rudy) è estremamente insoddisfatto: nonostante se ne sia già parlato, riteniamo che un argomento emozionante come lo *smallworld* (e i *sei gradi di separazione*, e il *diametro di Internet* pari a 19, eccetera) dovrebbe appassionare la comunità matematica e lanciare ricerche e scoperte entusiasmanti. Tutto questo non sta succedendo: fermamente convinti che si possa fare di meglio, proviamo ad appassionarvi con qualche ragionamento sapientemente caotico e critico (ma le criticità le risolvete voi, vero?).

7.1 Cinematica del pettegolezzo

...ma una notizia un po' originale
non ha bisogno di alcun giornale
come una freccia dall'arco scocca
vola veloce di bocca in bocca...
Fabrizio DE ANDRÉ, "Bocca di Rosa"

Il pettegolezzo è una delle più alte espressioni della democrazia, e uno dei suoi più potenti strumenti di realizzazione.
Serge d'ALEMBERT (il padre di Rudy), nell'altro millennio

Come dicevamo prima, siamo insoddisfatti per quanto si sta facendo nel mondo matematico (tutti inclusi, da Barabasi a noi) per lo studio delle reti *smallworld*: secondo noi, la ricerca (almeno, dopo il 2004) sta procedendo in modo piuttosto "stanco", nonostante quest'anno ci siano buoni motivi per avviare cose serie nel ramo[10]. Non solo, ma il fatto di essere "sempre nell'attesa" di qualcosa, fa sì che da una volta all'altra si dimentichino i *fondamentali*, che quindi ripetiamo ogni volta: va detto che, ripetendoli ogni volta in forma diversa, abbiamo il vantaggio di generalizzare più facilmente la visione.

Bene, si parte.

Le *Reti del Mondo Piccolo* (SWN, "Small World Networks", nel seguito), sono definite come delle "vie di mezzo" tra due diversi tipi di rete, quella *di reticolo* e quella *casuale*: la prima ha un grado di raggruppamento[11] ben definito, mentre la seconda, da un altro punto di vista, presenta una distanza media tra i nodi molto bassa (dell'ordine del logaritmo del numero dei nodi, da cui deriva la battutaccia dei "sei gradi di separazione" tra George Bush e Osama bin Laden) e la probabilità che due vicini di un nodo siano vicini tra di loro è proporzionale all'inverso del numero dei nodi: nelle reti SWN si vorrebbero mantenere queste caratteristiche interessanti, senza sconfinare nei casi estremi di eccessiva o nulla regolarità; e se la definizione vi sembra fumosa, avete pienamente ragione. Fortunatamente, esiste un metodo per costruire queste reti che può darci anche una misura di *quanto* siano casuali.

Per costruire un SWN partiamo da un grafo a reticolo, perfettamente ordinato; per ogni arco del grafo, con una probabilità p, effettuiamo le seguenti operazioni:

1. Eliminiamo l'arco
2. Ricostruiamolo unendo due vertici del grafo scelti a caso.

La cosa è meno stupida di quanto sembra: la prima operazione distrugge la regolarità del grafo di partenza, mentre la seconda assicura l'unione tra elementi che normalmente sarebbero molto lontani tra loro. Evidentemente, se p=0 avete il grafo ordinato iniziale, mentre se p=1 avete un grafo completamente casuale: le "vie di mezzo" danno origine ai grafici SWN.

La cosa potrebbe sembrare piuttosto balorda e il risultato essere catalogato genericamente come grafo casuale, ma alcune proprietà vengono, in un qualche modo,

[10] Il centenario della nascita di Erdős, giusto per dire la più facile.

[11] Qualcuno trova una traduzione migliore per *clustering*?

conservate: ad esempio, il fatto che ogni volta che viene eliminato un segmento ne venga costruito un altro in un altro punto distrugge evidentemente il valore di connettività del grafico, ma, se consideriamo che l'arco cancellato era agganciato a due vertici e che quello creato è agganciato a due vertici, un valore che si conserva sicuramente è quello di *connettività media*, che sarà uguale alla connettività del grafo originale.

"Rudy, quando arrivano i pettegolezzi?" Adesso, un attimo. Qui, l'idea è di considerare il fenomeno come un tipo particolare di *epidemia*[12], circostanziato da tre possibili stati nei quali può trovarsi uno degli *N* ~~cittadini~~ ~~personaggi~~ nodi del grafo:

1. Non conosce il pettegolezzo e non sa della sua esistenza
2. Conosce il pettegolezzo ed è interessato a trasmetterlo
3. Conosce il pettegolezzo, ma non gliene importa nulla e non intende trasmetterlo

Il modello in oggetto, se andate a rivedervi il PM accennato in nota, si chiama SIR, ossia "Suscettibile, Infetto, Refrattario" (l'ultimo l'avevamo chiamato "Guarito", ma il concetto è sostanzialmente lo stesso: sia pettegolezzo o epidemia, diventate per qualche ragione immuni).

Come scateniamo il pettegolezzo? Facilissimo: all'inizio, abbiamo una persona *Infetta* e tutto il resto della popolazione *Suscettibile*; quando la stragrande maggioranza (termine volutamente ambiguo) della popolazione conosce il pettegolezzo, questi diventano *Refrattari* (...ma gli anacoreti, sono considerati refrattari? Anche se non sanno niente di Paris Hilton?).

Non abbiamo nessuna intenzione di provare ad applicare gli altri modelli alla SWN; vi diamo l'analisi di questo, e ricordatevi di quelli che vi hanno dato l'idea quando vi daranno la medaglia (Fields se fate alla svelta, Wolf se vi serve più tempo: alla peggio, rivedetevi i problemi di Erdős, quelli valutati una ventina di dollari l'uno).

Vabbè, vediamo come funziona il sistema: un elemento i viene scelto casualmente e viene infettato (AKA "sa il pettegolezzo"); a questo punto, contatta un elemento j tra i suoi vicini: se j è nello stato "suscettibile", allora i lo "infetta" (gli racconta il pettegolezzo) e j diventa "infetto" (e quindi *vuole* raccontare il pettegolezzo); se, al contrario, j è già infetto o refrattario, allora i perde interesse alla trasmissione del pettegolezzo e diventa refrattario.

Lavorando un po' più sul processo evolutivo, possiamo dire che partiamo da una popolazione in cui gli individui infetti aumentano e, anche se a un rateo minore, aumentano anche gli individui immuni (OK, "refrattari"). In questo modo, il contatto tra individui infetti e individui infetti o refrattari aumenterà, e quindi la popolazione infetta tenderà a diminuire, fermando (virgolette d'obbligo) "l'evoluzione" o, se preferite, "la diffusione" del pettegolezzo.

Questo sembra un ambiente nel quale sia quasi impossibile eseguire dei calcoli sensati, ma ***Sudbury*** ha dimostrato, sotto assunzioni abbastanza sensate, che la percentuale degli individui refrattari per popolazioni infinite raggiunge un valore massimo dato dalla formula:

$$r^* = 1 - e^{-2r^*}$$

Che si risolve facilmente con $r^* \approx 0.796$. E questo significa che circa il 20% della popolazione non conoscerà mai il pettegolezzo.

Il sistema delineato qui sopra, però, non tiene conto di una struttura *socialmente plausibile*, ossia, nella nostra accezione, non tiene conto delle SWN. Per introdurre questo concetto nel modello, riprendiamo il metodo di costruzione delle SWN: partiamo da un grafo in cui ogni nodo ha connessioni con *2K* vicini, per dividerli, consideriamone *K* come connessioni *orarie* e le altre come connessioni *antiorarie*. A questo punto, ognuna delle

[12] Matematicamente impeccabile, ma non credo mio padre sarebbe stato d'accordo sullo specifico modello scelto: di *epidemie*, comunque, avevamo già parlato tempo fa, nel PM "Dagli all'untore!" (RM131, dicembre 2009). Qualcuno ha voglia di provare con *gli altri* modelli?

connessioni *orarie* di ogni nodo i viene ricollegata con probabilità p ad un nodo j che non appartiene ai vicini di i. Per "semplificare" (...scusi?...) le cose, eliminiamo i legami doppi e i casi nei quali la nostra rete diventa disconnessa, ossia quando in realtà di reti ce ne ritroviamo più di una.

In una situazione del genere, ***Zanette*** ha dimostrato che esiste un valore critico p_c della probabilità di riconnessione; infatti, se $p < p_c$, il numero degli individui refrattari N_r alla fine dei tempi diventa *indipendente dalla popolazione totale*: questo significa che, al tendere ad infinito della popolazione, il numero delle persone che ricevono il pettegolezzo tende a essere una costante indipendente dalla dimensione della rete, ossia resta circoscritto ad una piccola popolazione (tutti vicini tra loro) e gli altri ne ignorano l'esistenza[13]. Di converso, se $p > p_c$, allora è il *rapporto tra i refrattari e il totale della popolazione* che tende a una costante[14]: quindi, comportamento completamente diverso in funzione delle *relazioni* nella rete.

E qui, comincia la pigrizia dei ricercatori, secondo noi. Infatti, gli studi (o meglio, le simulazioni) sono di solito eseguiti per piccoli valor di K (2, di solito: il che significa una connettività media dalle parti di 4); quindi, i dati sono secondo noi estremamente insoddisfacenti.

Per $p < p_c$, il nostro pettegolezzo rimane localizzato a causa dell'alta interconnettività della rete e dell'assenza di "scorciatoie" verso gli altri agglomerati; di converso (e qui cominciano le cose interessanti), se $p > p_c$ la distribuzione diventa *bimodale*: e va bene per i due massimi, ma il problema è che *in mezzo esiste un minimo!* Il che può causare dei discreti guai, nella diffusione del pettegolezzo; la cosa sembra essere portata avanti da *due diversi tipi di diffusione*: una "normale", come abbiamo visto prima, e una che approfitta del fatto che esistono connessioni tra i diversi cluster, contribuendo al diffondersi del tutto.

Se ci limitiamo ai modelli con K=2, sono possibili delle caratterizzazioni complete del comportamento[15]: all'inizio tutta la popolazione è *Suscettibile*, tranne un singolo individuo che è *Infetto*; ad ogni passo quindi possiamo avere le seguenti variazioni:

1. Il numero degli *Infetti* cresce di 1, a spese della popolazione *Suscettibile*.
2. Il numero degli *Infetti* decresce di 1, incrementando i *Refrattari*.

Evidentemente, nel primo caso l'Infetto ha beccato un Suscettibile mentre nel secondo caso ha pinzato un Infetto (o un Refrattario).

E qui, opinione personale, cominciamo a scivolare sugli specchi su cui cerchiamo di arrampicarci: infatti, per p molto diversi dal valore critico e per bassi valori dei Refrattari, scopriamo (oh, stupore!) che ci si ritrova nelle condizioni del cammino casuale accennato nella nota, insomma, non stiamo costruendo niente di nuovo, prima o poi torniamo nell'origine, troviamo la macchina e tutto il costrutto della SWN si riduce ad una passeggiata disordinata ma analizzabile: qui, l'unico risultato interessante sembra essere l'esistenza di una componente di *legge di potenza* nella distribuzione. Ad un'analisi molto "rude", potevamo anche aspettarcelo: quando i numeri sono "casuali ma non troppo", come sembrano essere i legami nelle SWN, a noi per prima cosa viene in mente una sola parola: "Benford"[16]!

---

[13] ...come quando vi dicono un sito di scaricamento di film illegali: voi lo dite ai vostri amici, questi lo dicono ad altri... Ma dopo un po' la notizia si perde, e continuate tutti a scaricare alla faccia della SIAE. Logicamente, non è mai successo a nessuno, e qui stiamo parlando di situazioni puramente teoriche.

[14] Attenzione alla differenza: nel primo caso, è costante il *numero* delle persone che sanno il pettegolezzo, nel secondo caso è costante il *rapporto* tra chi sa il pettegolezzo e il numero di nodi. Insomma, la differenza tra i *nerd* e *Striscia la Notizia:* tutto questo sia detto senza offesa nei confronti di entrambi: i secondi, hanno *molte* più connessioni, ma se tornate all'esempio della nota sopra e considerate dei "piccoli gruppi", certe realtà sopravvivono senza causare eccessivi danni (anche perché trovare il "Courant & Robbins" in inglese gratis raramente attrae folle di *groupies* quattordicenni).

[15] Che mostrano, tra l'altro, insospettate connessioni con alcuni vecchi problemi: chi se lo ricorda, quello della passeggiata da sbronzi con la ricerca della macchina parcheggiata esattamente davanti?

[16] Per i suoi legami con Brasca, Levi e Clinton, vi rimandiamo al PM in merito su RM034.

Adesso, non vorremmo pensaste che siamo così critici nei confronti dei lavori fatti sinora nelle SWN da pensare che andrebbero tutti mandati su un Small World a zapparlo tutto: siamo consci che questi risultati (che noi abbiamo descritto tagliando brutalmente per i campi) hanno una notevole importanza, ma ci pare che la ricerca sia, al momento, bloccata da alcuni *constraint* epistemologici: siccome non si riesce a sviluppare una teoria generale, allora ci si limita ad analizzare i casi "semplici" in modo numerico, e si cerca di inferire i comportamenti dai risultati. E questo metodo, francamente, a noi piace piuttosto poco: tutto il lavoro fatto sopra, si conclude con un'analisi del tipo "...e all'aumentare di K [il numero dei vicini diviso due, vi ricordiamo] si ha che il valore critico p_c diminuisce, e quindi la percentuale finale di Refrattari aumenta...". No, dico, ma grazie... Bastava contare i lettori di questo PM sino a questa frase, per accorgersene (diffondete la notizia, o vi dichiariamo Refrattari).

Comunque, non tutte le notizie sono brutte: qualcuno si è messo ad analizzare i (o *le*: dipende se ci aggiungete o no la "*N*" di "reti" al fondo) DSW, ossia i *Piccoli Mondi Dinamici*: in sostanza, quelli nei quali partite da un reticolo regolare ma, invece di tracciare dei legami rigidi (anche se "casuali") tra le componenti, ad ogni momento decidete quale dei vostri $2K$ vicini "infettare" (nel senso buono del termine) con una probabilità $1-p$, mentre con la "solita" probabilità p decidete chi infettare a spasso per il reticolo[17].

"Scusa, ma la cosa non complica il tutto, che già era non analizzabile?" Beh, sì e no. Tanto per cominciare, la cosa dal nostro punto di vista è un po' più simile al mondo reale (quello nostro, almeno: speriamo anche per voi), nel quale oltre alle interazioni "prefissate" dei vostri amici su *feisbuc* avete anche delle interazioni casuali con i vicini di casa[18] (e, se in un certo momento interagite con i vicini, palesemente non chattate con l'Australia); e qui, qualche risultato interessante lo si è ottenuto: ***Zanette***, ad esempio è riuscito a dimostrare che, almeno nei casi completamente analizzabili[19], *le DSW si riducono a delle SWN.*

Insomma, i dati al momento sono questi:

1. Se siete degli asociali (su internet), siete condannati all'estinzione
2. Se siete dei cluster (su internet), siete condannati all'estinzione
3. Se siete una via di mezzo (su internet), siete condannati all'estinzione
4. Potete cancellare le parole tra parentesi in tutte le frasi precedenti

Oh, al confronto il secondo principio della termodinamica è un ottimista... Qualcuno ha voglia di fare i conti? Secondo noi, esiste un K per cui Francine e Jacques la sfangano e vivono felici e contenti[20].

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[17] Non stiamo a dire (e quindi ve lo diciamo, ma in nota) che la seconda parte sono le SWN viste al piano di sopra: il modello è perfettamente equivalente.

[18] *Comunicazione personale*: "Voialtri due fagnani, durante l'ultima mia riunione di condominio dovrebbero essersi iscritti in due, voi cosa facevate, intanto?".

[19] Per citare un disegnatore di fumetti della nostra infanzia (Walt Kelly, Pogo), "siamo fieri che il ragazzo abbia imparato a contare fino a *due*": ci stiamo riferendo al K utilizzato, visto che è lo stesso dei conti fatti prima.

[20] Con il K di Murger, in *Scene della vita di Bohème,* non ce la fanno. Datevi da fare, che quel capitolo a Rudy non è mai piaciuto.