Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 185 – Giugno 2014 – Anno Sedicesimo

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com
www.rudimathematici.com
RM182 ha diffuso 3'097 copie e il 03/06/2014 per Google eravamo in 11'200 pagine.

Siamo sempre stati degli apprezzatori del *retrofuturo*, e grande è la nostra invidia nei confronti dell'anonimo possessore di questa meraviglia della Huffmann Manufacturing Company (1956). Sulla canna, una radio AM a *tre valvole*, alimentata da una batteria sul portapacchi posteriore.

1. Fra Piumazzo e Sant'Anna Pelago

" 'Sulla strada' di Kerouac era molto bello letto in italiano con i nomi americani: 'Quella sera partimmo John, Dean ed io sulla vecchia Pontiac del '55 del padre di Dean e facemmo tutta una tirata da Omaha a Tucson'; porco cane! E poi lo traduci in italiano e in italiano dici 'Quella sera partimmo sulla vecchia millecento del babbo di Giuseppe e facemmo tutta una tirata da Piumazzo a Sant'Anna Pelago'. Non è la stessa cosa, gli americani ci fregano con la lingua."

(Intro a "Statale 17", Francesco Guccini dall' "Album Concerto" con i Nomadi)

Esiste un numero che non è molto noto ai matematici, per la buona ragione che è stato definito da un antropologo. Lo scienziato in questione è Robin Dunbar, e il numero, con non troppa originalità, si chiama appunto "Numero di Dunbar".

Come gli statistici amano ripetere, "*correlation does not imply causation*", ovvero una buona correlazione tra due eventi non implica necessariamente che i due eventi siano interdipendenti, che si influenzino a vicenda: può esserci una splendida correlazione tra l'andamento degli stipendi degli infermieri francesi e quello delle vendite dello zucchero filato nei luna-park australiani, ma trarre subito la conclusione che i lavoratori ospedalieri di Parigi corrano a spendersi la paga nei parchi divertimento di Melbourne e Sydney è decisamente rischioso. Resta però il fatto che gli statistici ripetono ossessivamente la frase proprio come un "caveat", a ricordare quanto sia facile cadere nell'errore professionale (non solo loro, ma di quasi tutte le categorie di ricercatori); in altre parole, è proprio nell'individuare delle correlazioni che si trova spesso la chiave per importanti scoperte scientifiche. Insomma, una correlazione, specie se imprevista, è spesso una pepita d'oro per i professionisti della ricerca.

Robin Dunbar, da bravo antropologo, si è occupato dei primati, conscio del fatto che studiare i parenti più stretti dell'Homo Sapiens Sapiens può essere di grande aiuto nello scoprire alcune peculiarità degli esseri umani. Confrontando le dimensioni dell'encefalo dei primati e le dimensioni dei gruppi sociali che questi costruivano, notò appunto una correlazione diretta: tanto più grandi erano i cervelli delle nostra amiche scimmie, tanto maggiori erano anche le comunità di cui facevano parte. In altre parole, Dunbar ipotizzò che il numero di "relazioni sociali stabili" che un individuo poteva mantenere fosse dipendente dal volume del suo cervello (o, meglio, dell'estensione della sua corteccia cerebrale[1]): come a dire che, in ultima analisi, il cervello dei primati ha un limite di immagazzinamento, e non può mantenere rapporti continuativi e intensi con più di tante persone.

[1] Per essere ancora più espliciti, l'idea è che sia strettamente coinvolta la memoria a lungo termine, che risiede in un'area ben precisa del cervello.

1 *Robin Dunbar*

Non si tratta di una banalità: da punto di vista della sociologia animale, la formazione di gruppi è un elemento determinante ai fini della sopravvivenza, e appartenere ad una banda di una mezza dozzina di elementi è ben meno rassicurante che vivere in una tribù che ne conta qualche centinaio. Ciò non di meno, riconoscersi come appartenenti allo stesso gruppo implica proprio la capacità di "riconoscersi", perché il patto di mutua assistenza che gli elementi di un gruppo si scambiano è una accordo cruciale per la sopravvivenza, anche individuale. È verosimile che il concetto di "traditore" sia particolarmente disprezzato in ogni cultura anche per ragioni ataviche, non solo socio-culturali.

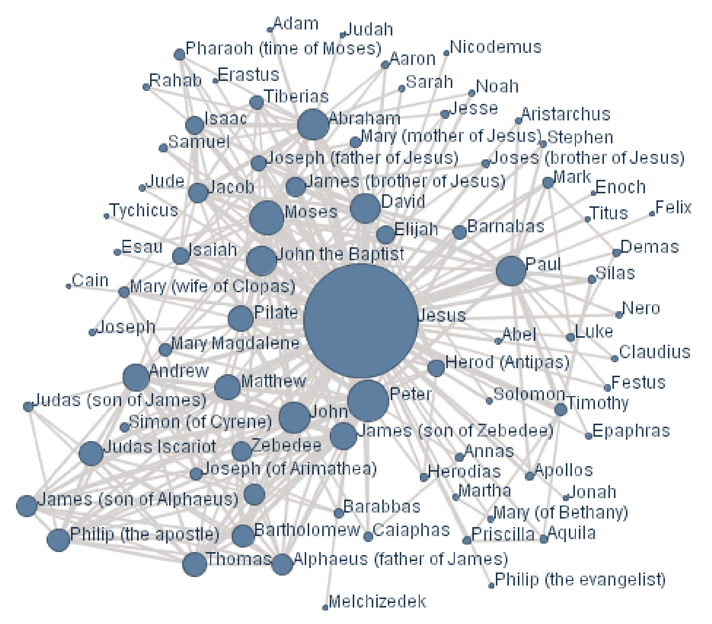
L'ipotesi di Dunbar asserisce pertanto che una relazione stabile richiede un carico ben determinato di corteccia cerebrale: questo non impedisce all'individuo di conoscerne più o meno superficialmente altri individui, e ovviamente di immagazzinare altre informazioni. In altri termini, non è materialmente possibile avere un numero infinito di amici intimi.

L'idea si è poi propagata, è cresciuta, e naturalmente è stata portata in ambito umano: una significativa estensione del concetto è stata avanzata dallo stesso Robin Dunbar, che ha asserito che l'invenzione del linguaggio ha consentito agli esseri umani un sostanziale incremento del numero di Dunbar, perché le relazioni sociali in assenza di linguaggio richiedono una elevata quantità di energia e tempo per essere mantenute, tramite gesti, segni di riconoscimento, vicinanza fisica e convivenza; energia e tempo che possono essere sensibilmente ridotti quando la comunicazione tramite linguaggio riesce a trasmettere gli opportuni segnali rassicuranti in maniera diretta e più efficace.

Dall'etologia all'antropologia, e poi ancora oltre: rapidamente si interessano al numero di Dunbar gli specialisti di psicologia evolutiva, poi gli statistici e perfino gli studiosi di gestione aziendale, e non dubitiamo affatto che in qualche modo siano affascinati dall'idea persino gli esperti di marketing e i creativi della pubblicità; perché il numero di Dunbar si candida ad essere un parametro importante di tutte le discipline che si interessano di reti sociali.

Il valore del numero di Dunbar non è perfettamente definito: si ritiene che sia ragionevolmente compreso tra 100 e 250, ma solitamente lo si assume essere molto vicino a 150. Conseguenza del valore non troppo elevato di questo parametro è il costituirsi di gruppi, a volte detti brutalmente cerchie (sulla calca del francese *cliques,* entrato anche nella lingua inglese, e da lì nel resto delle lingue del pianeta), insomma di aggregazioni limitate ma consolidate all'interno di insiemi connessi di dimensione molto più elevata.

Le reti sociali sono un concetto abbastanza chiaro e di vasta applicazione quando vengono chiamate in italiano, o più generalmente nella lingua madre del lettore; non appena si passa alla traduzione inglese assumono invece una natura assai più precisa e circoscritta (a meno che la lingua madre del lettore non sia sempre l'inglese): *social networks*.



2 *La rete sociale di Gesù Cristo. Niente FB, a quei tempi (c'è chi l'ha ricostruita dal Nuovo Testamento, come Laurent Brouat)*

Il termine non tradotto ha assunto il significato preciso di "*struttura informatica che gestisce nel Web le reti basate su relazioni sociali*"[2]; è abbastanza curioso notare che, se tradotta in inglese, la definizione assumerebbe una strana natura circolare. Ancora più curioso, in realtà, è che il Numero di Dunbar, nato nell'ambito della ricerca sulle reti sociali (nel significato più ampio) sembra che potrebbe subire un deciso incremento proprio in questi nostri tempi a causa delle reti sociali (nel senso più ristretto e comune di social network): molti esperti ritengono infatti che lo straordinario e globale successo di Facebook, Twitter e compagnia bella possa giocare nell'economia delle reti sociali più o meno lo stesso ruolo che giocò, svariati millenni fa, l'invenzione del linguaggio articolato. C'è chi ritiene, insomma, che si stia rapidamente sfondando il "muro dei 150" proprio perché l'utilizzo diffuso e continuato dei social networks potrà costituire uno strumento fondamentale nella costruzione di relazioni sociali stabili[3].

Ci sarà presto, anzi probabilmente c'è già stato, chi dovrà farsi carico di scrivere una storia della Rete. Come in tutte le ricostruzioni storiche, ci sarà molto da ricordare, precisare e sottolineare. È indubbio che l'effetto principale del successo dei social network è quello di aver aperto l'accesso a Internet ad un gran numero di persone che in precedenza non aveva nessuna esperienza diretta con i computer. Il numero degli utenti della rete è cresciuto a dismisura, e gran parte di essi hanno tuttora una "cultura informatica" di base assai modesta, cosa che porta a curiose convinzioni errate. La mitizzazione di alcuni personaggi, ad esempio: senza nulla togliere a Steve Jobs, è abbastanza sorprendente sentire affermare da più parti che "è stato l'inventore di Internet", quando non direttamente l'inventore del computer tout court. È abbastanza frequente scoprire che molte persone non distinguono minimamente la differenza tra Facebook e Internet, ed è ormai assodato che gran parte degli utenti si sorprendono quando scoprono che Internet non è l'unica rete al mondo.

Forse è per questo che la maggior resistenza all'utilizzo dei social network è venuta da chi con la Rete era già familiare. In fondo, si tratta di naturale inerzia e altrettanto naturale difesa del territorio: chi frequentava la rete prima dell'esplosione di Facebook era verosimilmente giunto a farlo dapprima per ragioni professionali, ma senza dubbio aveva poi trovato tutte le possibilità di utilizzo di Internet a scopo sociale e ricreativo. Un mezzo di comunicazione così esteso era, già ben prima dell'avvento dei *social network*, uno straordinario amplificatore delle potenzialità di contatti, e per di più manteneva anche un

[2] Definizione di Wikipedia (italiana).

[3] È giusto precisare che l'eponimo del numero, Robin Dunbar, non è pienamente convinto di questa possibilità. Egli ritiene piuttosto che esistano altri livelli del suo numero: attorno ai 500 dovrebbe trovarsi il limite di quelli che potremmo chiamare "conoscenti", e verso 1500 il numero delle facce che siamo in grado di riconoscere. Verosimilmente, i social network potrebbero creare una sorta di livello indipendente e parallelo.

che di elitario: sembra quasi impossibile dirlo adesso, ma c'è stato un lungo periodo in cui riuscire a collegare un PC mettendolo in contatto con il resto del mondo era cosa riservata a pochi eletti; e, proprio per questo, i pochi eletti si riconoscevano automaticamente come simili.

3 *Avere un nome è un diritto (dalla Dichiarazione Internazionale dei Diritti del Fanciullo, illustrata da Quino)*[4]

Un altro elemento essenziale di quei primi tempi era una conseguenza diretta del duplice utilizzo – professionale e privato – delle comunicazioni via computer: la necessità dei nomi fittizi, di pseudonimi esplicitamente creati per costruire la propria identità "dilettevole", che era bene separare da quella formale e reale. Il nome da battaglia, o *nickname*, non era un'opzione: l'etichetta della rete (la "*netiquette*", termine ormai quasi dimenticato, proprio quando ce ne sarebbe più bisogno) di fatto lo imponeva[5]. Il grande scienziato doveva scegliersi un nome da battaglia, per dilettarsi in rete sugli aspetti non professionali: e poteva serenamente intrattenersi con studenti ventenni che, protetti dal semianonimato del web, potevano interagire col sommo senza timore (anche perché, normalmente, non sapevano neppure di star parlando con un pezzo grosso). C'era quindi una vita in rete esplicitamente di intrattenimento, le cui regole principali si basavano proprio sul fatto che "l'identità di rete" era ragionevolmente indipendente dall'identità del mondo reale.

4 *Il servizio per social networking più famoso al mondo, e il tipetto che l'ha inventato*

Chi entrava in rete si sceglieva un nome, e cominciava una sorta di vita alternativa fatta di bit. Gran parte del successo dei social network – e di Facebook in particolare – è dovuto alla rottura di questa separazione. Come lo stesso Zuckeberg ha spesso sottolineato, il successo di Facebook è dovuto al fatto di aver portato sugli schermi dei computer non persone speciali e bellissime, ma le persone che si conoscono. E per ritrovarle via web, è indispensabile poterle cercare con il nome con le quali le si conosce. Prima di Facebook, il mondo virtuale era pieno di nomi virtuali; dopo si è riempita dei nomi anagrafici, e il cambio è stato tutt'altro che di poco conto.

I nickname[6] sono ancora molto diffusi, ma è evidente che l'ingresso delle "vere identità" nel mondo virtuale della Rete è ormai un fatto compiuto. Per i nostalgici (e un po' ci

[4] "Io volevo chiamarmi Batman! E anche essere svizzero, per mangiare cioccolato tutto il giorno!"

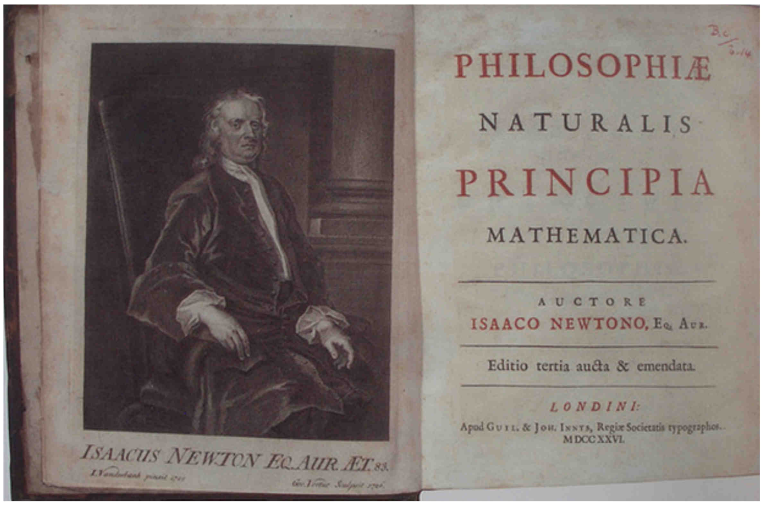
[5] Pur con tutti i rischi del caso: l'esistenza stessa dei troll (nel senso informatico del termine, non in quello mitico) è strettamente connessa alla possibilità di nascondersi dietro un nome di comodo.

[6] Senza voler guardare troppo al proprio ombelico, specialmente quando si parla di andamenti del tutto globali, anche Rudi Mathematici "imponeva" di fatto la scelta di un nickname ai lettori che mandavano soluzioni. Come al solito, per contraddistinguerci un po', avevamo però anche decretato che anziché "nickname" si parlasse di "allonimo". E già che ci siamo, ricordiamo anche che per quasi un decennio dei redattori di RM erano noti solo gli allonimi, non i nomi anagrafici. Le primule rosse della matematica ricreativa italiana del web, ci piaceva chiamarci…

riconosciamo nella categoria) suona un po' come un peccato veder superare quel momento topico della scelta del nome di battaglia. Era una sorta di battesimo, e rivelava spesso aspetti imprevisti del soggetto, affezioni particolari o speciali idiosincrasie. E, naturalmente, molto spesso i nickname venivano scelti in lingua inglese. La cosa non sorprende affatto: poche cose sono più liquide e versatili delle lingue, ed è inevitabile che la lingua dominante di un determinato periodo storico si espanda, tracimi e fecondi tutti gli idiomi con i quali interagisce. L'utilizzo dell'inglese è di gran lunga precedente alla diffusione della Rete, anche se è indubbio che quest'ultima abbia causato una accelerazione nella propagazione. La maggior parte dei termini tecnici dell'informatica sono entrati nel linguaggio comune, e vi sono entrati senza essere veicolati da traduzione: perfino il termine "calcolatore" è di gran lunga meno usato di "computer"[7]. C'è piuttosto da chiedersi come se la cavino americani e inglesi: per loro, i termini tecnici avranno ancora la possibilità di essere fraintesi con i termini colloquiali da cui hanno avuto origine, rischio di cui sono invece indenni i linguaggi che li hanno accettati come barbarismi riconosciuti. Gli italiani sentono chiara la distinzione semantica tra "reti sociali" e "social networks", e questa è solo una delle ultime voci nella lunghissima lista degli anglicismi adottati. Non c'è ormai nessuna speranza di confondere l'hardware con la ferramenta, in Italia, per non parlare dell'impossibile fraintendimento tra "byte" e "morso", tra "pezzetto" e "bit". E in un ambiente del genere, scegliere un nickname inglese è quasi obbligatorio.

L'effetto delle lingue dominanti sui nomi è in realtà ben più vasto, tutt'altro che limitato alla Rete: e a ben vedere è abitudine antica. L'inglese è lingua dominante da qualche decennio, forse da poco più di un secolo, se oltre a quello statunitense contiamo anche il predominio britannico della seconda metà del XIX secolo. Ma l'impero che più a lungo ha dominato i territori europei è durato assai più a lungo, e la sua lingua talmente diffusa e invadente da aver permanentemente contagiato, sebbene in misura e intensità diversa, praticamente tutti gli idiomi del continente.

Il Latino non è stato solo la lingua dell'Impero Romano: è stato per lunghissimo tempo la lingua franca, usata negli scambi commerciali anche ben lontani dal Lazio da cui prende il nome, e per secoli è rimasta l'unica "lingua dotta" ufficiale, anche quando il volgare e le altre lingue nazionali spiccavano il volo verso una dignità propria e indipendente.



5 *Isaaco Newtono (originario di Piumazzo o Sant'Anna Pelago)*

Accadeva così che, certo in ambito accademico, ma anche in quello politico e culturale in genere, i nomi anagrafici espressi in lingue volgari dovessero essere elevati, in qualche modo promossi al rango più nobile del latino. È per questa ragione che noi italiani ci troviamo nella stessa situazione degli anglofoni per quel che riguarda l'identificazione di alcuni nomi storici: in fondo, l'italiano non è altro che la prosecuzione moderna del latino, e un nome "latinizzato" suona del tutto familiare alle nostre orecchie. Alzi la mano chi, la prima volta che ha sentito pronunciare di nome di Copernico, non ha pensato istintivamente che si trattasse di un amico bolognese del

[7] Per non parlare della locuzione "cervello elettronico", che probabilmente non usa più neanche colui che l'ha coniata.

pisano Galileo. Magellano poteva benissimo essere genovese al pari di Colombo, per non parlare di tutta una pletora di filosofi, come i gemellini[8] Ruggero e Francesco Bacone[9].

Se è vero che per molti altri la latinizzazione era un po' troppo forzata (Newton, ad esempio, resiste indomito agli inevitabili tentativi di latinizzazione), per altri, pur di ottenerla, non si temeva di procedere ad una traduzione letterale del cognome, un po' come si gioca adesso nel tradurre Roberto Rossi in Bob Reds o Giovanni Russo in John Russian. Un bell'esempio che coinvolge almeno tre lingue è quello di Melantone, umanista tedesco che, dall'originario Philipp Schwarzerdt è arrivato alla forma latina Philippus Melanchthon, grazie al significato di "schwarz" ("nero") attraverso il greco (μέλας); ma non c'è che l'imbarazzo della scelta. Se si cerca in rete "Giovanni di Sacrobosco" si giunge facilmente a scoprire che il nome corrisponde ad uno studioso di Oxford[10] che più facilmente si presentava agli amici come John of Holywood. In questa folta schiera di illustri personaggi nobilitati dalla dotta latinizzazione del loro nome, non può passare inosservato il matematico e astronomo Regiomontano.

6 *Regiomontano*

Johann Müller Regiomontanus nasce a Königsberg il 6 Giugno 1436, e il mistero del suo nome è rapidamente svelato da questi pochi dati anagrafici. Königsberg significa infatti "Montagna del Re", ergo "regio monte", ed è presto spiegato come la latinizzazione abbia operato su Johann (anzi Iohannes): si è tralasciata la traduzione del cognome (forse perché Müller diventerebbe un troppo plebeo "mugnaio") e si è eseguita la mutazione del luogo: se si viene da Königsberg, da un monte regio, niente di più semplice che essere definito regiomontano.

A scanso equivoci: Königsberg è città grande e complessa, dalla geografia (e soprattutto dalla geografia politica) intrigante, non foss'altro per essere stata a lungo la città tedesca più orientale ed essere oggi la città russa più occidentale[11]; ma la Königsberg che ha dato i natali a Regiomontano è un'altra, più modesta: si trova nella Bassa Franconia (Baviera, diremmo oggi) e Johann è certamente il suo figlio più famoso.

Figlio di un mugnaio (al punto che quasi certamente il cognome Müller altro non è, in realtà, che la precisazione del mestiere di famiglia), Johann entra di diritto a far parte della schiera dei ragazzi-prodigio: riceve l'educazione primaria a casa, ma dev'essere stata di buona

[8] … che naturalmente non sono gemelli per niente, visto che si corrono tre secoli e mezzo…

[9] Un gioco divertente è quello di scegliere uno di questi personaggi, andare su Wikipedia, e provare un po' tutti i link a sinistra per le varie lingue, per scoprire quante versioni di ogni nome esistano…

[10] Ad Oxford studiò e lavorò (astronomia e astrologia soprattutto), ma non si sa con certezza dove sia nato.

[11] Ne abbiamo parlato spesso, perché ha dato i natali a molti personaggi famosi. Non ultimo il sommo David Hilbert, e infatti nel suo compleanno in RM060 Königsberg la fa da padrona. Già che ci siamo: il luogo esatto di nascita è poi Unfinden, piccolo villaggio prossimo a Königsberg.

qualità, visto che riesce ad entrare all'Università di Lipsia alla veneranda età di undici anni, nel 1447. Qui si dedica allo studio della dialettica, e nel 1450 procede verso l'Università di Vienna: è solo un ragazzino di quattordici anni, ma ha già ben chiaro quali sono i suoi interessi principali, la matematica e l'astronomia, ed è a Vienna che queste discipline sono meglio sviluppate. Qui deve accontentarsi del primo livello di laurea, perché il regolamento dell'università non prevede che il dottorato possa essere assegnato a studenti di età inferiore ai 21 anni: tornerà a ritirare il fatidico pezzo di carta nel 1457.

A Vienna lavora con il suo insegnante Georg von Peurbach, che è anche, con ogni probabilità, il più grande astronomo del suo tempo: uno che ha inventato diversi strumenti astronomici, e cerca riferimenti per lo studio del cielo nei testi classici di Tolomeo, ma anche in citazioni di Euclide e addirittura nelle "Bucoliche" di Virgilio. Dal canto suo, Peurbach trova in Johann il suo miglior allievo: insieme si mettono a cercare di capire perché Marte abbia un ritardo di due gradi rispetto alle Tavole Alfonsine[12].

Erano tempi in cui per poter svolgere con tranquillità il lavoro di scienziato occorreva avere dei santi in paradiso: Regiomontano fu abbastanza fortunato da ottenere come protettore uno che con i santi aveva una buona dimestichezza. Accadde che a quei tempi il legato papale presso il Sacro Romano Impero fosse il cardinal Bessarione, che era greco di origine e animato dalla volontà di propagandare gli studi classici greci in tutto l'Impero. Per di più, era un grande ammiratore di Teone di Alessandria, il papà di Ipazia. Nel 1450 Giorgio di Trebisonda traduce e commenta l'Almagesto di Tolomeo, e nel farlo non parla molto bene del commento che a suo tempo fece proprio Teone. Il cardinale si indispettisce, e incarica Peurbach di fare un compendio dell'Almagesto di Tolomeo: il suo intento era quello di difendere le posizioni di Teone, e per farlo con cognizione di causa aveva bisogno di capire al meglio l'Almagesto. Fatto sta che Peurbach non riesce a completare il compito, e incarica il suo miglior discepolo di finirlo. Così, Regiomontano si lancia nell'opera, e in breve completa sia *l'Epitome dell'Almagesto*, sia *La difesa di Teone contro Giorgio di Trebisonda*, opere che gli fanno guadagnare subito la stima e la protezione del cardinal Bessarione.

I cardinali, come le strade, portano tutti a Roma, e Regiomontano, al seguito del suo protettore, arriva nella città eterna nel 1461. Qui vive al seguito del cardinale, e visto che Bessarione è un erudito, prima ancora che principe della Chiesa, ne approfitta per istruirsi sui molti manoscritti della biblioteca, nonché direttamente da Bessarione, che come si è detto era un grande esperto della cultura classica greca.

Viaggiò poi verso Venezia, ma la morte di papa Pio II lo ricondusse a Roma, dove il suo protettore era chiamato per il conclave. Qui conobbe Martin Bylica, astronomo ungherese, che si trovava in Vaticano per le sue medesime ragioni. Divennero rapidamente amici, e probabilmente fu a causa dell'intercessione di Bylica se Regiomontano si ritrovò, qualche anno più tardi, alla corte di re Mattia corvino d'Ungheria, nella capitale ungherese Buda. Più ancora dell'astronomia, Regiomontano era appassionato di libri, e anche alla corte magiara si immerse nella lettura di testi antichi e quasi sconosciuti. Ciò nonostante, non riuscì a trovare il testo completo dell'opera che più ricercava, l'*Aritmetica* di Diofanto: ne conobbe solo l'inizio, e aveva lasciato detto ai suoi conoscenti che se mai fosse riuscito a trovare l'opera intera la avrebbe tradotta con gioia.

Erano tempi curiosi, l'aurora della scienza moderna, prima ancora dell'alba vera e propria. Regiomontano era un dotto curioso, e i suoi contributi furono importanti in molti campi, anche se nessuno appare rivoluzionario. Ma il suo lavoro sui triangoli, *De Triangulis omnimodis*, scritto soprattutto ad uso degli astronomi, fu essenziale per gli studiosi contemporanei e futuri. Una sua osservazione sulla strana variazione del diametro apparente della Luna, rispetto a quanto ci si poteva attendere dall'astronomia

[12] Le Tavole Alfonsine prendono il nome da Alfonso X, re di Castiglia, che mise al lavoro i suoi studiosi affinché compilassero delle tavole astronomiche affidabili e utili per la navigazione. Si basavano anch'esse sull'Almagesto di Tolomeo.

tolemaica, è stata probabilmente una delle cause più forti che hanno indotto Copernico ad ideare il suo sistema del mondo.

Il suo indefesso lavorare sui triangoli ha gettato il seme che poi è pienamente maturato nella moderna trigonometria: i suoi due libri sulle Tavole delle Direzioni sono, in buona sostanza, due volumi di tavole dei seni. Ma non lavorava solo con libri e penna: costruì astrolabi, sfere armillari e altri strumenti di precisione, registrò le sue osservazioni sulle eclissi lunari, ipotizzò un metodo per risolvere il sempiterno problema della longitudine basandosi proprio su osservazioni lunari.

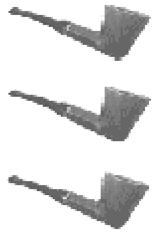
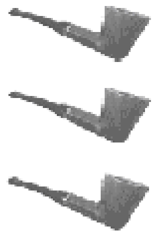
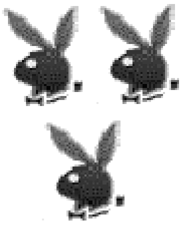
I caratteri mobili inventati da Gutenberg sono del 1454, Regiomontano ne intuisce subito le potenzialità, al punto da costruirsi in casa una tipografia: si rendeva conto di quanto progresso sarebbe stato possibile se i testi scientifici potevano essere riprodotti facilmente e in un numero sufficiente di copie.

Johann ritornò a Roma nel 1475, questa volta chiamato direttamente da papa Sisto IV: al pontefice era già chiara la necessità di una riforma del calendario, e incaricò Regiomontano di eseguire tutti i calcoli necessari per attuarla. Non ne ebbe il tempo, perché la morte lo colse pochi mesi dopo. Probabilmente morì di peste, scatenatasi a Roma dopo una devastante inondazione del Tevere; ma c'è anche chi sospetta che morì di morte violenta, forse ucciso dai figli di Giorgio da Trebisonda, visto che Regiomontano aveva annunciato la prossima pubblicazione di un ulteriore libro in cui mostrava tutti gli errori che il rivale aveva commesso nella sua traduzione dell'Almagesto.

Così, la riforma del calendario dovette aspettare ancora più di un secolo, prima di vedere la luce: e sarà Luigi Lilio, incaricato di Gregorio XIII, a fare i calcoli necessari per depennare dieci giorni di troppo nel 1582[13].

[13] Sappiamo che non è molto elegante fare troppa autopromozione, ma proprio fra pochi giorni (verso la metà di Giugno 2014, per intenderci) uscirà un e-book dal titolo "Di 28 ce n'è 1", per i tipi di 40K-Unofficial (http://www.bookrepublic.it/books/publishers/40k-unofficial/), scritto dai vostri affezionati Rudi Mathematici. Una cosuccia breve, ad un prezzo di copertina altrettanto breve. Potremmo indulgere a un po' di pubblicità, per soddisfare la nostra vanità. Se esagereremo, fatecelo notare…

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Ho troppe idee			
Resistere, resistere, resistere!			

2.1 Ho troppe idee

Non nel senso che sono tranquillo per i problemi sino al prossimo millennio (anche ne avesse 23'676, lo scrivente – *Rudy speaking, clearly* – non sarebbe *lo stesso* tranquillo): nel senso che per questo problema ho avuto un mucchio di idee di ambientazione, e non so decidermi: nel dubbio, propendo per la più arzigogolata, che tra l'altro permette di *non* de-matematizzare il problema. Se non vi interessa, saltate la parte indentata, ma sentitevi liberi, nel caso, di non essere d'accordo e di esprimere la vostra opinione in modo altisonante, becero e offensivo: tanto, non rispondo.

Un mucchio di inizi, come al solito.

> Se avete letto gli ultimi PM sino all'ultima riga (*seeh... come no!)*, sapete che mi sono ritrovato in Grecia (sottoinsieme "Atene", sotto-sottoinsieme "dentro le Mura di Temistocle") per un paio di giorni. La cosa ha evidentemente sollecitato il mio interesse per la geometria euclidea in senso stretto (quella col compasso che vi pizzica le dita se vi viene in mente di alzarlo dal foglio) e aumentato il rispetto per le abilità alpinistiche degli ateniesi (fatevela voi, in un giorno solo, Acropoli-Filopappo-Licabetto *senza mezzi meccanici*).
>
> Tornato a casa, *Madame d'Alembert*, con l'utilizzo di arti marziali particolarmente sanguinarie e metodi palesemente vietati dalla Convenzione di Ginevra, mi ha costretto a mettere ordine nel *Math Manor*, e ho ritrovato il libro "Oltre il Compasso", regalo di un'certo ingegnere[14]: era finito nascosto dietro i conti da pagare, quindi praticamente invisibile per l'eternità, salvo giustappunto catastrofi planetarie.
>
> Qualche giorno dopo, usciva una Prestigiosa Rivista di Divulgazione Scientifica (nata nel nostro stesso millennio, in entrambe le versioni) con un articolo di Piergiorgio Odifreddi nel quale veniva trattato il metodo "riga & compasso" (con le originali e auliche definizioni degli strumenti) e i motivi per i quali ai geometri successivi i sunnominati strumenti cominciavano a stare stretti *[Oeu, PGO, ma sforzarsi un filino e andare oltre le 3K battute? Invidioso che noi abbiamo più spazio? :-)]*.

[14] Non fate i sofisti, per restare in zona. È "un'ingegnere", quindi ci vuole l'apostrofo, da qualche parte.

A tutto ciò, si aggiunga il fatto che sto rileggendo per la terza volta il bellissimo libro "La rivoluzione dimenticata", di Lucio Russo *[...sto addirittura cominciando a capirci qualcosa: bella gara, tra lui e il Boyer, come libro dell'estate],* quindi alla geometria "classica" sono piuttosto sensibilizzato.

E, a questo punto, nelle mie peregrinazioni in rete, mi ritrovo un problema catalogato *molto difficile*. Ve lo dico dopo (è il *problema*), prima un altro *incipit*.

> Sapete tutti quanto mi sia antipatica la Formula di Erone: il motivo per il quale la tollero è che, negli studi degli anni successivi (zona quarta scientifico, per intenderci), la scoperta della Formula di Brahmagupta la rende vagamente comprensibile... Ma siamo sicuri che questi concetti fossero simpatici anche ad Euclide? No, dico, ma negli *Elementi*, quante volte compare, il *perimetro* di una figura? Non è che non piaceva neppure a lui, e appena poteva ne faceva a meno?

Bene, avete un *tot* di in(d)izi. Scegliete quello che preferite, e cuciteci il problema.

Dato il triangolo *ABC*, trovare *[con riga e compasso "classici"? Questa è un'aggiunta mia]* il punto *P* tale che i perimetri dei triangoli *ABP*, *BCP*, *CAP* siano uguali.

...Potevamo stupirvi con tiri con gli archi ed effetti speciali, ma causa compleanni, puntimaupunti, dentisti e seconde edizioni paterne, qui siamo a digiuno di chinotto da un mucchio di tempo.

2.2 Resistere, resistere, resistere!

...tanto, vincerà lei: è una battaglia persa in partenza.

La moglie di Rudy, chiaro. L'ultima idea è che vorrebbe tenere un cane.

E non uno di quei simpatici cagnoloni di taglia medio grossa (ve lo ricordate *Balto*, il cane del padre di Rudy circa del peso di Rudy?), ma uno di quegli aggeggi isterici suppergiù delle dimensioni di Virgilio il gatto.

Al momento Rudy ha posto due obiezioni: in primis che Virgilio è ormai abituato ad essere l'unico non umano in casa, e l'arrivo di qualcos'altro rischia di causargli dei traumi non indifferenti; in secundis che non ha nessuna intenzione di portare a spasso il cane per fargli fare i bisogni (avendo convissuto con un cane in città per un lungo periodo della sua vita giovanile, Rudy sa benissimo come vanno a finire queste cose).

Soprattutto la seconda ragione sta fornendo l'opportuno materiale di resistenza, ma non sappiamo quanto potrà durare. Forse ve l'abbiamo già raccontato, ma la moglie di Rudy anni fa ebbe a dire "Esco a comprare il prosciutto", e un paio d'ore dopo ci presentò la nuova Opel Agila che aveva deciso di acquistare passando davanti al concessionario: anni dopo (questa volta per variare la scusa era il formaggio) la stessa scena ebbe a ripetersi con la Toyota Yaris che al momento fa bella mostra di sé in strada (e niente formaggio).

Capite quindi come ad ogni uscita della signora *d'Alembert* il vostro umile narratore sia colto dal terrore di veder arrivare un volpino isterico o un cocker di quelli che si mangiano le orecchie scambiandole per una bistecca: non solo, ma quando si reca dal capo (quello del lavoro-che-paga) Rudy è obbligato a passare davanti a uno di quei prati dedicati alla passeggiata del cane che lo mettono nel terrore del ritrovarsi un ulteriore pensionante in casa la sera.

Negli anni, abbiamo appurato che l'ipotizzare eventi in questa sede ha l'interessante risultato di esorcizzarne la realizzazione nel mondo reale: nella segreta speranza che anche qui questa legge empirica funzioni, ipotizziamo un renitente Rudy che "passeggia" un *taboi*[15] in una tranquilla e solatia giornata di giugno *[Seeh... come no... Compiti del genere verranno sicuramente rifilati in uggiose e gelide serate decembrine (RdA)].*

[15] Trattasi del termine torinese (vi ricordiamo che la "o" si legge "u") indicante un cane di taglia piccola e razza incerta (o, come diceva un amico d'infanzia di Rudy, "*ncrosià anche con ai binari dal tram":* incrociato anche con i binari del tram). Il termine, inizialmente sprezzante, è diventato oggi indice di vago affetto. Ma non perdiamoci nei sentimentalismi

Giunto al Parco dell'Equilatero, che prende il nome dal fatto di essere un triangolo equilatero di lato 350 metri, Rudy sgancia l'alieno (essendo "di razza, anzi quattro o cinque", qualche sua antenata di facili costumi ha sicuramente avuto una *liaison* con un *calot* barsoomiano) e si reca all'unica panchina disponibile; il Genio del Canile ("non è scemo: ha ben due neuroni, uno dei quali inibitore") parte verso un lato del triangolo e ne afferma la sua proprietà marcandolo opportunamente: quindi, si reca verso un altro lato sul quale ripete la stessa operazione e, preso da ebrezza di conquista, si lancia a ripetere l'operazione sul lato restante; fiero del lavoro compiuto, si reca al punto di partenza, recupera il guinzaglio abbandonato per terra e quindi va verso Rudy (il quale era appena riuscito ad accendere la pipa) con l'aria da "...e adesso, tutti a casa a svuotare le ciotole!".

Siccome qualche caratteristica dell'umano il cane tende ad acquisirla e per l'intelligenza proprio non c'era spazio, il coso *[No, Rudy si rifiuta di dargli un nome]* ha ereditato la pigrizia, e Rudy nota che la bestia ha fatto il percorso *minimo*, percorrendo in totale 1275 metri.

Adesso, siccome vorremmo suscitare anche in voi un certo disamore per il pulcioso, arriva la domanda, anzi due: dov'erano, all'interno del triangolo, il guinzaglio (dove è stato liberato l'essere immondo) e la panchina (dove Rudy aspetta la sua Nemesi)?

Beh, una caratteristica positiva 'sto coso ce l'ha: è onesto, o forse anche la sua pigrizia ha dei limiti: infatti, le tre operazioni di marcatura sono effettivamente tre operazioni distinte, sui tre lati. Secondo Rudy, è talmente scemo che non ci arriva, all'idea di andare in un angolo marcando quindi due lati in un colpo...

3. Bungee Jumpers

Provare che qualsiasi potenza intera del numero $\sqrt{2}-1$ può essere espressa nella forma $\sqrt{N}-\sqrt{N-1}$, dove N è un intero.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Giugno.

Non so voi, ma io sono un po' provata dal tempo, quello atmosferico e quello che passa, insomma, in tutti i sensi. Scrivo questo pezzo in un bel pomeriggio assolato, ma a dire il vero ha piovuto tanto, ultimamente, specialmente su qualsiasi attività io abbia intrapreso negli ultimi mesi. In queste condizioni mi preparo a prendermi qualche giorno di meritata vacanza nelle vicinanze di una spiaggia assolata, un po' in anticipo sulle classiche ferie estive italiane, e, di riflesso, aggiungo ai bagagli il solito k-way, che servirà, accidenti, anche stavolta.

Se voi invece aspettate luglio e agosto per le vostre meritate vacanze, sappiate che noi contiamo di esserci anche allora, perché ci siamo sempre, anche se ultimamente sempre in ritardo.

Siccome dubito che il Capo abbia tempo di proporvi il solito Summer Contest, vi ricordo che (r)esistono recentemente un certo numero di problemi che non sono ancora stati risolti da nessuno. A parte quelli calendaristici (praticamente a quelli pensa solo ***Sawdust***, quindi lui lo sa quali ha lasciato), ci sono anche i seguenti:

RM	Pag	Titolo Problema
157	12	Tre per due
165	10	Solito TrePerDue
171	10	Cappotto
172	12	Fred si sta montando la testa
181	12	Supertask!
183	9	Si riparte con il tiro con l'arco!
184	11	Tiro di campagna

Datevi da fare, usate le indicazioni per andarvi a prendere i vecchi numeri in archivio (http://www.rudimathematici.com/archivio/archiviodb.php) e risolvete, il mese prossimo ho così più materiale per questa rubrica. E sì, lo so bene che a maggio siamo usciti dopo la metà del mese e non avete fatto in tempo a mandare le vostre soluzioni, ma noi proviamo a recuperare i nostri ritardi, le soluzioni per "Tiro di campagna" il mese prossimo valgono lo stesso.

Bene, e ora vediamo che cosa è arrivato.

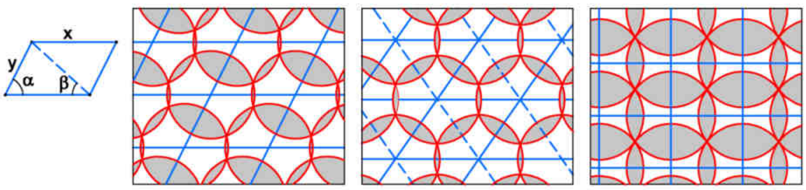
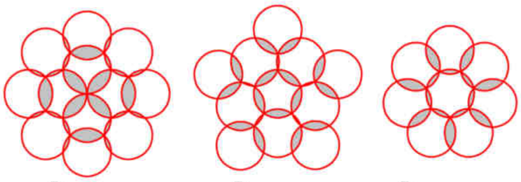
4.1 [184]

4.1.1 I guardiani del bosco matematico

Ecco il problema di maggio di cui abbiamo ricevuto soluzione:

> *Il "Bosco Matematico" è un perfetto quadrato boschivo pianeggiante, con alberi tutti della stessa altezza e superficie pari a* 100 *chilometri quadrati. Per evitare incendi, sono state installate delle torrette antincendio: lo spazio di osservazione di ogni torretta deve essere un cerchio di* 3 *chilometri di raggio. Qual è il numero minimo e la posizione delle torri per coprire l'intero quadrato?*

La soluzione è di ***trentatré***, ed a lui lasciamo la parola senza por tempo in mezzo.

> Ricoprire una figura qualsiasi con cerchi uguali equivale a immergerla in un ricoprimento R_N composto di N cerchi. Vincoliamo R_N alle proprietà a) è limitato da un perimetro il cui interno è completamente coperto, b) per il punto di incontro di due cerchi, esclusi quelli sul perimetro, passa almeno un altro cerchio.
>
> Si possono ottenere ricoprimenti regolari R^* estesi a tutto il piano, da cui estrarre R_N di ogni dimensione, è partire da tassellature del piano con poligoni semplici, ponendo nei vertici i centri dei cerchi, e scegliendo il raggio minimo che garantisce la copertura.
>
> I casi semplici derivano dallo schema A di fig. 1; in rosso i cerchi, in blu la tassellatura, in grigio le sovrapposizioni. Specializzando i parametri x, y, α, β si hanno
>
> B $\alpha = \beta$: triangoli isosceli (equilateri se $\alpha = \beta = 60°$)
>
> C $\alpha = 90°$: rettangoli (quadrati se $x = y$).
>
> Non ho incluso la comune tassellatura con esagoni perché alcuni cerchi sono coperti totalmente da altri; togliendoli si ricade in C.
>
> 
>
>
> Fig. 1 — *A* parallelogrammi — *B* triangoli isosceli — *C* rettangoli
>
> Un altro tipo di ricoprimento D, che si può estendere a tutto il piano, si ha partendo da un punto (0) o da un cerchio (1) e da successivi anelli di cerchi, posti in modo da garantire le proprietà a) e b). In fig. 2 alcuni esempi. La simmetria radiale può essere modificata spostando i cerchi di ogni anello.
>
> 
>
> D_{048} — D_{155} — D_{17}
>
> Fig. 2

Normalizziamo i ricoprimenti assumendo sempre cerchi di raggio =1, cambiando cioè la scala del problema con il campo di lato $L = 10/3$.

Indichiamo gli R_N estratti dai tipi precedenti con $T_{abc\ldots}$, dove $T \equiv B, C, D$ è il tipo, a,b,c sono le righe (o gli anelli) di cerchi ed $N = a + b + c + \ldots$. Gli R_N adottati dipendono dalla forma da coprire (il quadrato); se ne potrebbero scegliere altri, ma dubito si possano migliorare i risultati – che in ogni modo non hanno la pretesa di dimostrazioni esatte.

Gli schemi verificati con 6 o 7 cerchi sono in fig. 3.

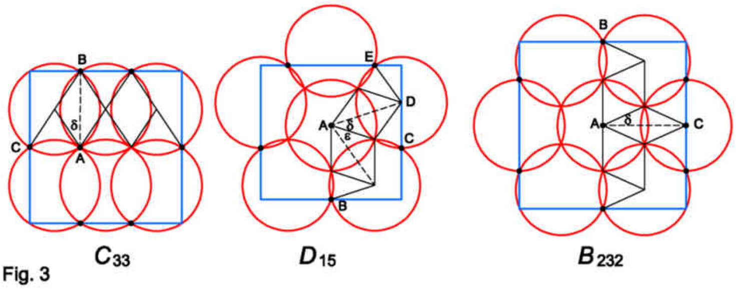


Fig. 3

Il segmenti fra i centri e le intersezioni (in nero) hanno tutti lunghezza unitaria. Gli angoli liberi δ, ε consentono di trasformare il rettangolo di lati *X*, *Y* in un quadrato massimo di lato *Q*. I calcoli danno

C_{33} - 6 cerchi

$$X = 3AC = 6\sin\delta,\ Y = 2AB = 4\cos\delta$$

con $X = Y,\ \sin^2\delta + \cos^2\delta = 1$ si ha il quadrato $Q = 12/\sqrt{13} = 3.328 < L$

D_{15} - 6 cerchi

con simmetria centrale ($\delta = \varepsilon = 36°$), $AD = AE = 2\cos 36°$

$$X = 2AD\cos 18° = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} = 3.078 < L$$

$$Y = AB + AE\cos 36° = (5 + 3\sqrt{5})/4 = 2.927 < L$$

- modificando gli angoli (non riporto la dimostrazione) si ha un quadrato massimo $Q = 3.0255 < L$.

Il campo non è coperto con 6 cerchi.

B_{232} - 7 cerchi

- con simmetria centrale ($\delta = 30°$, cioè *B* equilatero) il rettangolo è

$$X = 4\cos 30° = 2\sqrt{3} = 3.464 > L$$

$$Y = 2 + 4\sin 30° = 4 > L$$

- modificando δ

$$X = 2AC = 4\cos\delta,\ Y = 2AB = 2 + 4\sin\delta$$

con $X = Y,\ \sin^2\delta + \cos^2\delta = 1$ il quadrato è $Q = 1 + \sqrt{7} = 3.646 > L$.

Il campo si può coprire con 7 cerchi.

Usando solo gli schemi *B* e *C* si ricava il valore *N* minimo per coprire il campo con altri raggi *r* del problema originario

r	$L=10/r$		N	Q		N	Q
3	$10/3=3.333$	B_{232}	7	3.646	C_{44}	8	3.578
2.5	4	B_{333}	9	4.187	C_{333}	9	4.246
2	5	B_{3432}	12	5.316	C_{555}	15	5.145
1.5	$20/3=6.666$	B_{45454}	22	6.959	C_{55555}	25	7.071
1	10	$B_{6\times 8}$	48	10.207	$C_{8\times 7}$	56	10.536

La prima riga è la soluzione *N*=7 già trovata; nella seconda gli schemi *B* e *C* danno lo stesso risultato di 9 cerchi. Per cerchi piccoli conviene lo schema *B*.

Aggiungo alcune note.

1) la soluzione C_{33} non copre il campo con 6 cerchi solo per una frazione minima; per risparmiare una torretta basterebbe limitare il campo al lato $3\cdot 12/\sqrt{13}=9.9846$ km – una riduzione di 0.308 kmq su 100 – o meglio togliere dal campo le quattro porzioni non coperte negli angoli – per circa 180 mq (in fondo pochi alberi).

2) per i ricoprimenti del piano $R*$ valgono le

- dalla proprietà b) si può dimostrare che ogni $R*$ è rigido, nel senso che lo spostamento anche infinitesimo di un cerchio genera una lacuna;

- nei casi *A*, *B*, *C*, *D* non si hanno sovrapposizioni multiple, cioè ogni parte del piano è coperta da non più di due cerchi; questo vale per ogni $R*$ con solo tre cerchi per intersezione

- l'intersezione di tre cerchi uguali è il centro del circocentro – con lo stesso raggio – del triangolo formato dai tre centri;

- in due cerchi che si intersecano i centri e le intersezioni sono i vertici di un rombo equilatero di lato unitario; l'insieme di questi rombi è una tassellatura *M* del piano. Poiché i lati sono tutti uguali, *M* (e quindi $R*$) dipende solo dagli angoli dei rombi, e ogni angolo è un grado di libertà. Il caso *A* ha due gradi di libertà, *B* e *C* ne hanno uno, *D* può averne diversi (p.es. D_{15} ne ha 4, o 2 se simmetrico). Le dimostrazioni precedenti fanno uso di queste proprietà;

- per ogni $R*$ si può definire un parametro *k* di copertura pari al rapporto fra area dei cerchi e del piano (1–*k* è nelle figure la quota grigia sul totale); nello schema *B* equilatero il valore $k=2\pi/\sqrt{27}=1.209$ è in assoluto il minimo possibile; questo spiega perché, con cerchi piccoli, lo schema *B* è il più vantaggioso.

3) naturalmente si può tentare di coprire figure diverse dal quadrato; un problema molto difficile è coprire con cerchi uguali un cerchio più grande.

Il Capo si è subito ricordato che il punto finale (3) della soluzione di ***trentatré*** è stato proposto in un interessante problemino alla "Fiera di James Hugh Riley & Co." da Martin Gardner, che dimostra che il nostro ***trentatré*** non manda mai niente di banale… ma non ci offenderemo se aveste ancora da dire in proposito. Mentre chiudevamo il numero sono arrivate ancora un paio di soluzioni, ma noi proviamo a chiudere qui e a non ritardare oltre, pubblicheremo il mese prossimo.

5. Quick & Dirty

Vi abbiamo detto che Rudy e Doc in gioventù hanno (vanamente) cercato di imparare a giocare bene a bridge. Per risolvere questo problema le uniche cose che vi serve sapere è che si gioca in quattro, il compagno è quello davanti a voi e si distribuiscono tutte le carte di un mazzo di cinquantadue; le altre regole ve le studiate da soli. Secondo voi, è più probabile che voi e il vostro compagno abbiate tutte le carte di picche o che nessuno di voi due abbia carte di picche?

6. Pagina 46

Per prima cosa, notiamo che:

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^1 = \sqrt{2}-\sqrt{1}$$
$$\left(\sqrt{2}-1\right)^2 = 3-2\sqrt{2} = \sqrt{9}-\sqrt{8}\,.$$

Procediamo ora per induzione: ipotizziamo che

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^{2k-1} = A-B\sqrt{2} = \sqrt{A^2}-\sqrt{2B^2}$$

possa essere messo nella forma $\sqrt{N}-\sqrt{N-1}$, ossia che A^2 - $2B^2=1$: mostreremo che, sostituendo *k* con $k+1$, l'espressione:

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^{2k+1} = A'-B'\sqrt{2}$$

può essere posta nella stessa forma, ossia che $A'^2-2B'^2=1$.
Possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{2}-1\right)^{2k+1} &= \left(\sqrt{2}-1\right)^{2k-1}\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)^2 = \quad ;\\ &= \left(A-B\sqrt{2}\right)\cdot\left(3-2\sqrt{2}\right)=\\ &= (4B+3A)-(3B+2A)\sqrt{2}\end{aligned}$$

di conseguenza,

$$\begin{aligned}B' &= 3B+2A,\\ A' &= 4B+3A\end{aligned},$$

e

$$\begin{aligned}A'^2-2B'^2 &= (4B+3A)^2-2(3B+2A)^2 = \quad ,\\ &= 16B^2+24AB+9A^2-18B^2-24AB-8A^2 =\\ &= A^2-2B^2=1\end{aligned}$$

che è quanto intendevamo dimostrare.
Quindi, se il numero $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2k} = C-D\sqrt{2}$ può essere messo nella forma $\sqrt{N}-\sqrt{N-1}$, allora anche il numero $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2k+1} = C'-D'\sqrt{2}$ può essere espresso in questa forma. Per induzione, segue l'assunto.

7. Paraphernalia Mathematica

Prima le cose serie, quindi una premessa alla premessa.

> Stiamo remando di brutto per continuare la serie "Oltre Platone", ma non pare ne sentiate molto la mancanza: questo pezzo rappresenta una divagazione sul tema, visto che secondo (alcuni di) noi ad alcune cose è stato dato uno spazio ingiustamente limitato.

Il titolo di questo PM rappresenta una definizione da una tipologia di parole crociate per la quale sentiamo molto la carenza, o meglio assenza totale: se qualche anima pia facesse un intero gioco (di quelli "senza schema", che devi metterci tu le caselle nere) basato su giochi di parole come questo, ambientati in un mondo matematico (certo, questo lo è: altrimenti, cosa ci farebbe qui?), saremmo veramente felici: conoscendo i nostri tempi, ne risolveremmo probabilmente uno l'anno, quindi non dovrebbe presentare un grosso sforzo mantenere la periodicità. Bene, se volete provare a risolvere una definizione (lo scrivente *[Rudy speaking]* la vede bene dalle parti del 7 orizzontale) di questo tipo, la trovate come titolo: non sbirciate il resto, altrimenti è troppo facile.

7.1 Tipica Leonardesca

Arriva, adombrata, la soluzione.

Questa volta vi raccontiamo una storia che comincia con una passeggiata sui ponti di Königsberg. Siccome l'inizio, come per tutte le favole, lo conoscete già, sorvoliamo.

La grande idea di Eulero, nel trattare il problema, è stata quella di *prescindere dalla metrica*: considerare solo i punti e le linee che li univano, trasformando il tutto in un *grafo*.

Ricordate tutti la definizione (matematicamente corretta) di grafo: è un insieme di oggetti, detti *nodi*, uniti a due a due da un altro insieme di oggetti detti *archi*. Nel seguito chiameremo gli oggetti di questi due insiemi rispettivamente *vertici* e *spigoli*.

Non è difficile (se vi chiamate Eulero o se avete letto qualcosa in merito) dimostrare che potete *visitare l'intero grafo* passando una ed una sola volta per ogni spigolo solo se esistono al massimo *due* vertici con un numero dispari di spigoli. Il numero di spigoli su un vertice si chiama *grado*, e siccome il problema dei ponti ha quattro vertici di grado dispari, la passeggiata non si può fare e il problema, con grande delusione degli albergatori e dei peripatetici di Königsberg, è risolto.

Comunque, il grafo dei ponti non sarà utile per le passeggiate, ma ha un'altra interessante caratteristica: potete infatti evitarvi la scarpinata e disegnarlo su un foglio di carta *senza che gli spigoli si incrocino*: questa non è una caratteristica comune a tutti i grafi, come ben sa chi alle elementari abbia provato a risolvere il problema di Gas-Luce-Acqua per Rossi-Verdi-Bianchi[16]. Quello che forse qualcuno di voi non sa è che non solo non è risolubile in R^2 (il foglio di carta), ma non è risolubile neanche in S^2 (la superficie della sfera, vi ricordate che i topologi in questo caso mettono una dimensione in meno dei geometri?), mentre sulla superficie di un toro la cosa è possibile, come chiunque di voi può verificare domattina al bar con una ciambella, sei stuzzicadenti e un po' di filo (se il barista vi lascia).

Insomma, se un grafo è non planare, esistono delle superfici *[sempre? Provate a trovare un modo...]* sulle quali il grafo diventa planare: in questo modo la nostra superficie risulta divisa dagli spigoli in una serie di zone che chiameremo *facce*: abituati a spingere lo scetticismo sino all'estremo limite, qui i matematici chiedono la dimostrazione che il numero delle facce sia ben definito: la cosa si può fare, ma se ci tenete ve la cercate voi (*forse* aiuta citofonare a Jordan, ma non ne siamo sicuri).

Armati di questi tre poderosi oggetti, definiamo la ***Caratteristica di Eulero***:

$$\chi(G) = V - E + F.$$

[16] Caso mai non lo sapeste (e vi interessasse) lo ha inventato ***Dudeney***.

E adesso la più bella formula della matematica diventa:

Se G è planare e connesso, allora $\chi(G)=2$.

Tutto qui.

Una delle grandi bellezze della matematica consiste nel trovare similitudini tra campi apparentemente lontani tra di loro: e il genio di Eulero si mostra anche nel riuscire ad applicare concetti che, come dicevamo, trascendono dalla metrica in un campo in cui la metrica è tutto, quello dei poliedri.

Sappiamo, da una lettera a ***Goldbach*** (sì, *quel* Goldbach) del 1750, che Eulero conosceva la formula V – S + F = 2, come verifica su tutti i casi incontrati: abbiamo però certezza della sua dimostrazione per i poliedri convessi solo da uno scritto del 1752.

Rudy ha ripetuto più e più volte che quella che è (secondo lui) la "più bella formula della matematica" ha le "più brutte dimostrazioni della matematica": Eppstein, nel tentativo di trovarne una decente (anche secondo Rudy), al momento ne ha raccolte diciassette, ma nessuna di queste, francamente, ci soddisfa. Questo, per il semplice motivo che sono *limitate*: se dobbiamo fermarci alla mera e tridimensionale realtà, tanto vale fermarsi alla dimostrazione di Eulero, che (forse) riesce a brillare contemporaneamente per semplicità, eleganza e mal di testa: il "forse" tra parentesi della frase precedente nasce dal fatto che in rete abbiamo trovato solo vaghi accenni[17] e la ricostruzione che segue è tutta nostra.

Prendete un poliedro comunque irregolare, purché convesso, e consideratene la singola faccia k-gonale.

Prendendo un punto all'interno del k-agono (che per comodità chiameremo "centro del k-agono") potete dividere il k-agono in k triangoli irregolari: se ora prendete un punto (che per comodità chiameremo "centro del poliedro") all'interno del poliedro, potete unire i vertici di ognuno dei k triangoli al centro del poliedro, ottenendo k tetraedri (comunque irregolari): ognuno di questi tetraedri ha 4 vertici, 4 facce e 6 spigoli.

Adesso, mettiamo i tetraedri del k-agono assieme per ottenere una piramide a base k-gonale: se continuiamo a considerarla formata da tetraedri, avremo $4k$ vertici, $4k$ facce e $6k$ spigoli, ma alcuni di questi nel poliedro originale "spariscono". Non solo, ma qualcuno lo stiamo contando troppe volte. Per fare qualche esempio, ci sono $2k$ facce, a contatto tra loro, che tengono assieme i tetraedri e non danno contributo alcuno alla piramide; i vertici sul k-agono li stiamo contando doppi; gli spigoli che uniscono il centro del k-agono con i suoi vertici sono doppi anche loro, e quello che va dal centro del k-agono al centro del poliedro lo stiamo contando k volte e non va proprio considerato. Insomma, dovete buttare via un mucchio di cose, ma alla fine riuscite ad ottenere la formula di Eulero per la piramide.

Ora, "integrate" (si può dire?) il tutto sul vostro poliedro, avente V vertici, S spigoli e F facce: trasformate tutte le facce in insiemi di triangoli in funzione dei loro lati, contate i tetraedri che potete ottenere e togliete quelli che state contando multipli o che erano stati aggiunti per costruzione, *et voila*, la formula di Eulero per le tre dimensioni e i poligoni convessi, se avete tolto tutto e solo quello che dovevate togliere, vi compare per incanto davanti.

Secondo noi è una dimostrazione carina, almeno, come dicevamo, sin quando ci si limita alla realtà: il guaio, in questo caso, è che rappresenta di sicuro un problema la sua estensione alle dimensioni superiori... Qualcuno vuole provarci? Se il tutto fosse poi basato sul simbolo di Schläfli, potremmo addirittura offrirvi una birra grande vicino a casa di Doc (dove vi portano in tavola una spina che contiene cinque litri e ve la spillate voi: tranquilli, vi aiutiamo).

Da questo metodo dimostrativo dovrebbe anche trasparire il motivo per cui potete trattare solo i poliedri *convessi*: se il vostro aggeggio ha un "buco" da qualche parte,

---

[17] Se la trovate, potremmo ringraziarvi. E se la trovate *in latino*, potrebbe "ringraziarvi" anche Fred, rimasto colpito (si nota, la mancanza dell'avverbio di modo "piacevolmente"?) dal *Methodus facilis calculandi angulorum sinus ac tangentes tam naturalis quam artificialis*. No, non lo ha ancora tradotto.

perdereste l'unicità del "centro del poliedro", e la cosa diventerebbe più complicata *[...ma forse fattibile... Tagliando il poliedro bucato in modo da ottenerne due (o più) convessi, sapendo che per ciascuno di questi vale la formula e considerando che state contando doppi alcuni pezzi... No, io non ci provo (RdA)].*

E anche da questa, come dall'*altra [Quella "meno bella" (RdA)]* formula di Eulero, si ricavano concetti che già conosciamo. Ad esempio:

Esistono al più cinque solidi platonici.

Infatti, possiamo considerare un poliedro regolare con V vertici, S spigoli e F facce come un grafo planare su una sfera, in cui ogni faccia è un poligono regolare: sia n il numero degli spigoli (*e dei vertici*) di ogni faccia, e sia d il grado di ogni vertice. A questo punto, possiamo dire che:

$$nF = 2S = dV.$$

da queste uguaglianze si ricava:

$$S = \frac{dV}{2} \text{ e } F = \frac{dV}{n}.$$

Applicando la formula di Eulero,

$$V + \frac{dV}{n} - \frac{dV}{2} = 2 \Rightarrow V \cdot (2n + 2d - nd) = 4n.$$

Imponendo n e V positivi, e quindi $2n + 2d - nd > 0$, ossia $(n-2)(d-2) < 4$, vediamo che i soli casi possibili per $\{n, d\}$ sono $\{3, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{3, 5\}$, $\{4, 3\}$ e $\{5, 3\}$. Come volevasi dimostrare.

È facilissimo, da una bella formula, ricavarne di brutte, ma in qualche caso anche le brutte formule si rivelano utili, ad esempio, un importante risultato è che:

Se G *è planare e connesso con* $V \geq 3$, *allora* $\frac{3}{2}F \leq S \leq 3V - 6$.

(e se già vi dà fastidio il "6" in questa formula, aspettate a vedere cosa arriva dopo). La cosa si dimostra (ma non lo facciamo) passando per un'altra importante disuguaglianza, quella che dice $3F2S$, molto utile in svariati casi: notiamo, di passaggio, che il segno di uguaglianza vale se e solo se ogni faccia è un triangolo.

Comodissimo, un metodo per verificare al volo se un grafo è planare o no. Vale la pena di tenerlo a tiro. Giusto per allenarvi, potreste dimostrare che un pentagono con tutte le diagonali non è planare *[Farebbe comodo, soprattutto per quelli di noi meno dotati per la visualizzazione, un metodo per tracciare un grafo planare senza intersezioni, magari partendo dalla matrice di incidenza... (RdA)].*

Sempre tra i teoremi che non dimostriamo, e sempre partendo dalla formula di Eulero, si vede che:

Se G *è planare, allora ha un vertice di ordine* 5 *o inferiore.*

A questo punto, dovremmo definire gli 0-*simplessi* (che chiamavamo vertici), gli 1-*simplessi* (che erano gli spigoli*)*, i 2-*simplessi* (sì, quelle, bravi) e, da questo, ricavare la definizione di *simplesso*, per poi passare a forme più complesse *[pun intended]*, ma preferiamo l'utilizzo dei termini *celle* e *politopi* (non sono precise, ma noi ci troviamo meglio: liberi di sostituire, se preferite).

Se S è un politopo n-dimensionale composto da S_k k-celle, allora:

$$\chi(S) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i S_i.$$

Insomma, se vi piacciono i modi complicati per dire le cose, *la caratteristica di Eulero è una invariante topologica.*

Questo pezzo sta diventando troppo lungo, ma vorremmo fornire ancora un campo di applicazione della nostra formula preferita.

Un grafo è *colorato* se è stato assegnato un colore a ogni vertice in modo tale che due vertici uniti da uno spigolo non abbiano mai lo stesso colore. E, se la cosa non vi è chiara, provate a pensarlo per il grafo in cui rispetto al grafo originale avete sostituito vertici con facce e facce con vertici. Dovrebbe ricordarvi qualcosa.

Proprio, il teorema dei quattro colori, al momento (a parte una dimostrazione sulla quale molti stanno sollevando sonori dubbi) dimostrato solo per via informatica: quello che fa specie, da queste parti, è che ci si aspetterebbe che un problema del genere sia molto più difficile da dimostrare per un grafo non planare, in realtà, è più semplice! Il "trucco" consiste nel trovare una superficie sulla quale il nostro grafo sia planare, ma prima una premessa.

Uno dei parametri dello scrivente per valutare l'estetica di una formula che non contenga diseguaglianze è il vedere quanto siano grandi eventuali numeri interi coinvolti: crediamo di avervi già detto che l'equazione di stato per i gas reali (contiene un 27) non ci è mai piaciuta, ma da qualche parte in fisica atomica (struttura della materia) esiste una formula con dentro un 80. Bruttissima.

Dicevamo, bisogna trovare una superficie sulla quale il grafo sia planare: a questo punto, basta applicare l'orribile ***Teorema di Heawood***, per cui *se* S *è una superficie con caratteristica di Eulero* $\chi \leq 0$*, allora un grafo su* S *può essere colorato con al più:*

$$N_\chi = \left\lceil \frac{7+\sqrt{49-24\chi}}{2} \right\rceil .$$

colori: qui, le parentesi di Gauss indicano l'estremo *superiore* (problemi tipografici, scusate).

E il motivo per cui "nella realtà" si resta fregati, è proprio quel "minore o uguale a zero" della caratteristica di Eulero: sulla sfera (o sul tetraedro, o icosaedro, o qualsiasi oggetto con, giustappunto, $\chi=2$) non se ne parla!

Fieri di aver ricavato, dalla più bella formula della matematica, un'ottima candidata per la più brutta formula della medesima, vi lasciamo a commutare vertici, spigoli, facce e celle.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms