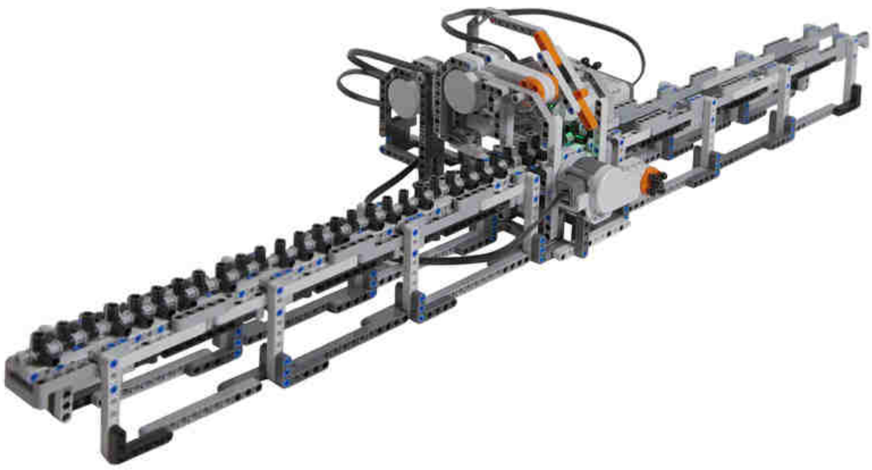
Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 196 – Maggio 2015 – Anno Diciassettesimo



Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM193 ha diffuso 3'224 copie e il 13/05/2015 per Google eravamo in 9'780 pagine.

Per prima cosa, provate a immaginare cosa possa essere l'oggetto in copertina. Sviluppate le più sfrenate ipotesi, poi chiedetevi cosa potrebbe esserci in un sito che si chiama http://www.legoturingmachine.org/.

1. L'igiene del mondo

> *"Noi vogliamo glorificare la guerra – sola igiene del mondo – il militarismo, il patriottismo, il gesto distruttore dei libertari, le belle idee per cui si muore e il disprezzo della donna."*
>
> (Filippo Tommaso Marinetti *Manifesto del Futurismo*, punto 9, 5 febbraio 1909)

Giusto un secolo fa, il Piave mormorava.

I fiumi mormorano spesso, e in condizioni normali pochi suoni sono più rasserenanti dello sciabordio delle acque di un corso d'acqua. Il mormorio del Piave, però, non era un canto pacifico, anzi: era piuttosto un *sonus belli*, come ricorda la più celebre delle canzoni guerresche italiane, quella "Leggenda del Piave" che inizia proprio con "... mormorava calmo e placido al passaggio dei primi fanti il ventiquattro maggio".

L'Italia entra in guerra, nella Grande Guerra, proprio lunedì 24 maggio 1915. Tanto per contraddire almeno in parte le affermazioni della canzone, il fiume che recita in quell'alba il ruolo da protagonista non è il Piave: il confine italo-austriaco che le truppe italiane superano nella primavera del 1915 corre lungo le Alpi Giulie, mentre il Piave è placido fiume interno, nella pianura veneta. Il crinale di quelle Alpi separa le piccole valli disegnate da torrenti italiani, come il Natisone, dalla più ampia valle slovena (e perciò austro-ungarica), percorsa dal fiume Sontig, come lo chiamano gli austriaci, o Soča, come lo chiamano gli sloveni. Noi, italiani, lo chiamiamo Isonzo.

1 *Il Piave eroico*

Prima del sorgere del sole, piccoli gruppi di soldati italiani si avventurano oltre il confine, che in quel giorno di tarda primavera di cent'anni fa erano tutt'altro che ben difese: poche guardie di frontiera, nessuna divisione di Vienna pronta a respingere gli attaccanti italiani. E i primi alpini, i primi bersaglieri, raggiungono presto la bella valle, ed entrano nelle cittadine lungo il fiume: anche nella piccola Kobarid, come la chiamano gli sloveni, o Karfreit, per dirla come i tedeschi; gli italiani che ne conoscono il nome sono davvero pochi, nel maggio del 1915, ma nel giro di un migliaio di giorni non ci sarà abitante del bel paese che non riconoscerà il suo nome: Caporetto.

Ma il 24 maggio del 1915 Caporetto è ancora tutt'altro che famosa, e viene invasa da sparuti militi italiani senza fatica e senza battaglia. Gli sloveni della valle si sentono in fondo più vicini culturalmente ai montanari italiani della Slavia Friulana, come quelli che vengono appunto da San Pietro al Natisone, che ai sudditi germanofoni di Francesco Giuseppe e di sua moglie Sissi, forse. O, ancora più probabilmente, in quelle verdi valli la guerra non è ancora arrivata per davvero: saranno i reticolati a fermare poi i soldati italiani, e a trasformare ben presto le avanzate di fanteria in guerra di posizione, in mesi di trincee statiche abitate da uomini e fango.

La geografia politica muta facilmente, ed è solo per pigrizia mentale che si tende a immaginare i confini disegnati dagli uomini come perenni e stabili. L'Italia del 1915 è diversa da quella che uscirà dalla guerra nel 1918, e cambierà ancora dopo il 1945: l'Isonzo, oggi come un secolo fa, entra in Italia solo a Gorizia, ma tra le due guerre è fiume interamente italiano: e la quasi totalità degli sforzi bellici nazionali si concentrano qui, con undici sanguinose – e sostanzialmente inutili – battaglie. La dodicesima battaglia è quella risolutiva, per quel fronte, ed è appunto quella che lo sposta brutalmente dal fiume mezzo italiano e mezzo sloveno all'italianissimo Piave: i tedeschi, tra i quali spicca un giovane Erwin Rommel, scendono a dare una mano agli alleati austriaci e sfondano a Caporetto, e percorrono un gran pezzo d'Italia prima di assestarsi sul Piave.

2 *Multietnica Austria-Ungheria*

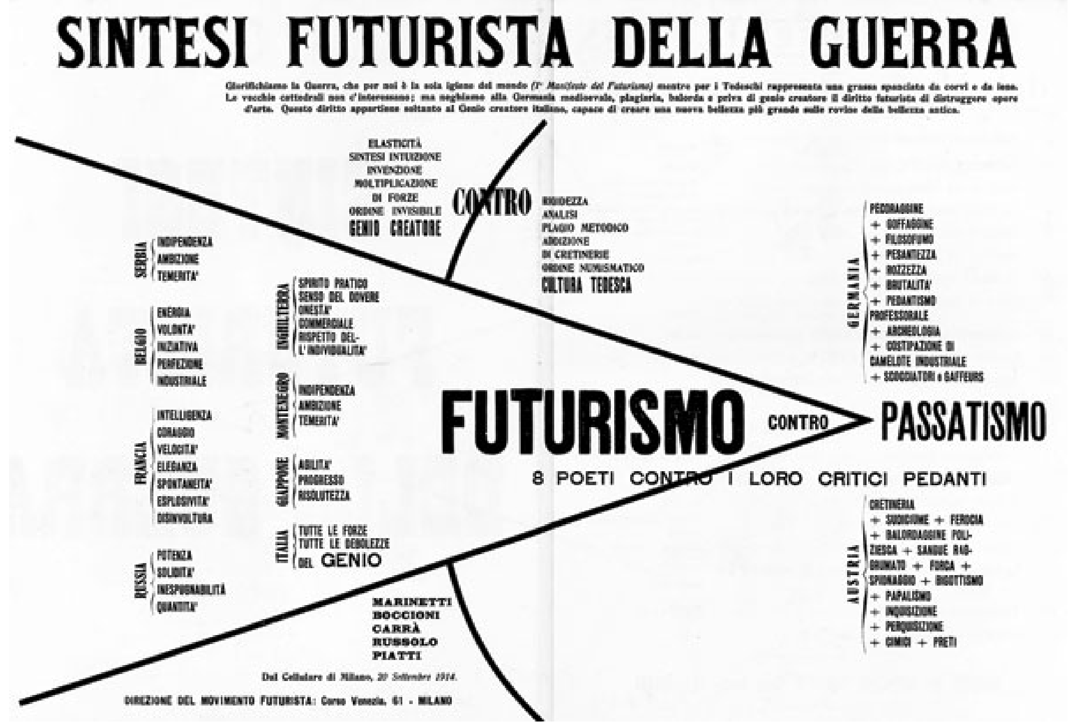
E il Piave diventa fiume cruciale proprio nell'autunno del 1917, mentre non lo è certo ancora nel maggio del 1915. E a dirla tutta, prima del maggio 1915 molti italiani sono già in guerra: l'Italia di oggi annovera nei suoi confini terre che allora non erano ancora italiane. Trentini, altoatesini, triestini sono già stati chiamati al massacro universale dall'imperatore d'Austria, già ne vestono la divisa e sono mobilitati da qualche parte in Europa, perché l'impero austroungarico è davvero grande, ha molti confini ed è indubbiamente multinazionale. Quando, nel 1916, la *Strafexpedition* porterà l'offensiva austroungarica sugli altipiani veneti, non saranno chiamati i trentini e gli altoatesini a combattere contro gli italiani, ma militi prevalentemente bosniaci: un grande impero multinazionale deve anche saper posizionare con accortezza i soldati, per evitare inutili e problematici rigurgiti di abominevole fratellanza.

Le guerre sono complicate, ma non è certo la complessità il loro difetto peggiore. È la loro spettacolare facilità di accensione, nonostante sia acclarato oltre ogni minimo dubbio che sono la peggiore catastrofe immaginabile. Eppure, nonostante tutto, le guerre scoppiano, e marcano con metodica precisione le tappe della storia, che non a caso spesso viene confusa con un banale elenco cronologico di bellici massacri.

Il caso dell'Italia nella Prima Guerra Mondiale è particolarmente istruttivo, dal punto di vista del mero bilancio costi/benefici. La guerra europea si accende nel luglio del 1914, per cause e ragioni che sono ancora dibattute dagli storici, e che probabilmente non saranno mai spiegate appieno: l'assassinio dell'arciduca Francesco Ferdinando porta alla dichiarazione di guerra dell'Austria alla Serbia, e poi tutto il gioco perverso di alleanze e contro-alleanze estende subito il conflitto a gran parte dell'Europa, e l'Europa, all'inizio del XX secolo, era la padrona del mondo, cosa che rende subito la guerra – appunto – mondiale. L'Italia, potenza giovane che solo da poco ha trovato l'unità nazionale, esaspera il suo ruolo nel gioco delle alleanze in maniera estrema: oscilla fino all'ultimo tra la Triplice Alleanza e la Triplice Intesa, trova scappatoie contrattuali e diplomatiche per rispettare o meno impegni e accordi precedenti, e in buona sostanza finisce con l'essere corteggiata da entrambe le parti in campo. Come una fanciulla contesa si ritrova, ad un certo punto, sommersa da promesse e da lusinghe anche solo per non entrare in guerra a fianco dell'una o dell'altra parte. Secondo molti studiosi, l'Italia nel 1915 avrebbe potuto ottenere vantaggi economici e territoriali analoghi, se non superiori, a quelli che alla fine le furono concessi come "nazione vincitrice" semplicemente restando neutrale: e la cosa non appare paradossale, visto che gran parte dei disastri che si accavallano in Italia dopo il 1918 sono riconducibili al sentimento condiviso da gran parte della nazione di aver avuto una "vittoria mutilata".

Benefici, quindi, nessuno: e non solo perché è eticamente vergognoso chiamare "benefici" qualsiasi tipo di bottino di guerra. Perdite, difficilmente calcolabili, come sempre: forse 650.000 soldati, e quasi altrettanti civili. Più di un milione di morti, più del 3% della popolazione intera. La Seconda e terribilissima Guerra Mondiale conterà più vittime quasi ovunque, ma non in Italia, che pure quella guerra ha perduto: le statistiche nazionali registreranno solo circa la metà delle vittime, come raccontano nelle piazze di tutte le città i monumenti ai caduti, con le loro liste ben più lunghe sotto le date 1915-1918 che sotto quelle 1940-1945.

Perché c'è questo, di semplice e incontrovertibile: in guerra gli uomini muoiono.



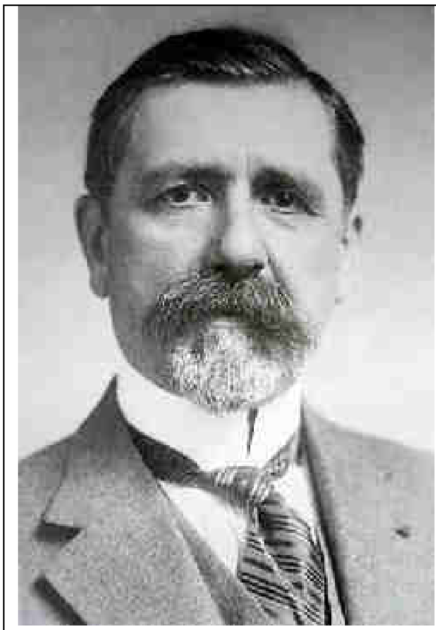
3 *Sintesi Futurista della guerra*

Ma ci saranno sempre anche coloro che troveranno buone ragioni, per ricorrere alla violenza: e citeranno la legittima difesa, soprattutto. Oppure la salvaguardia di valori vitali, il mantenimento delle radici culturali, poi la conservazione della propria identità. E si procederà sempre più in alto, in una continua escalation di pseudovalori, che inevitabilmente richiederà di perdere il senso di fratellanza con il proprio vicino, di avocarsi una maggiore dignità umana, una migliore etica, una mentalità superiore, fino a giungere al presunto diritto divino di scannare chiunque non sia considerato identico a sé.

Lo mostra bene l'estratto del *Manifesto del Futurismo* di Filippo Tommaso Marinetti, messo in apertura a quest'articolo: sarà certo scorretto, ingiusto, sbagliato giudicare in tempi diversi e con diversi principi culturali qualcosa che deve essere invece contestualizzato, compreso nella sua intenzione provocatrice, ribelle, forse perfino artistica. E infatti è così che si studiano oggi quei pensieri, quelle forme artistiche e perciò rivoluzionarie, creatrici e distruttrici al tempo stesso. Non si può accusare troppo Marinetti e il Futurismo di essere figli dei propri tempi, perché è certo questo che sono, per quanto esasperati ed esasperanti come sono certo le avanguardie. E allora sarà probabilmente giusto usarli per leggere in loro un pezzo di cultura del 1909, dell'Italia e dell'Europa che, chissà quanto consapevolmente e perché, non vedeva l'ora di fare la guerra. Ma è altrettanto vero che anche chi giudica non può estrarsi da sé, non può giudicare se non con i propri connaturati e consolidati valori: la contestualizzazione non può essere mai davvero piena e totale, quando si vivono tempi e luoghi diversi. Ed è per questo che, sospendendo almeno per un attimo la fatica obbligata del critico imparziale, è inevitabile concludere che gran parte dei punti di quel Manifesto non possono essere rubricate altrimenti che sotto la voce "Colossali Idiozie".

Perché in guerra si muore: si muore male, e si muore giovani.

I giovani abitano le scuole, prima della vita. Le università sono riempite da questi strani esseri umani, non più adolescenti e ancora non del tutto adulti, che sono il coacervo delle passioni e dell'entusiasmo di una nazione e del pianeta intero. La vitalità di una società può essere misurata certo in molti modi, ma una metrica fondata sulla ricchezza e reattività della popolazione studentesca universitaria è forse una delle migliori.


4 *Emile Borel*

La vedova del grande matematico Emile Borel, Camille Marbro[1], raccontava di come suo marito non riuscisse più a sopportare la tetra tristezza della Ecole Normale di Parigi dove insegnava, nel 1918, giungendo infine al punto di dimettersi dalla carica di preside. La Normale di Parigi, all'inizio degli Anni Dieci, era abitata da personaggi come Henri Poincaré[2], Henri Picard, Henri Lebesgue[3], Jacques Hadamard, e soprattutto era percorsa da centinaia di giovani promesse della matematica, gli studenti dell'Ecole. Gli iscritti alla Normale nei quattro anni che precedono il fatale 1914 erano 280: di questi, ne vengono chiamati al fronte 241, e più di cento non torneranno indietro. I professori, più vecchi, resteranno in cattedra, ma piangeranno gli affetti più cari: Picard, Hadamard, Borel piangeranno tutti almeno un figlio caduto in guerra. La Normale – ma con essa certo anche tutti gli altri grandi istituti di Francia e d'Europa – è stata davvero ripulita dall'igiene del mondo cantata da Marinetti, e resta popolata solo da fantasmi[4].

Non è possibile, non lo è mai, anche solo azzardare un bilancio della perdita culturale causata dalla scomparsa precoce di tante menti brillanti. Se la matematica è, come crediamo che sia, una costruzione intellettuale grandiosa e condivisa da tutta l'umanità, possiamo forse consolarci pensando che l'edificio matematico ha continuato e continuerà a crescere anche senza i contributi di molti geni matematici falciati dalle mitragliatrici e crocifissi sul filo spinato, ma la verità è che non lo sapremo mai, se è davvero così. Per contro, sappiamo per certo che le cannonate e le trincee hanno di certo ucciso delle menti geniali, come quella di René Gateaux.

[1] Pseudonimo di Marguerite Appell, oltre che moglie di matematico, era anche figlia di matematico: suo padre era Paul Appell.

[2] Celebrato in "Matematica per porcini", RM075, Aprile 2005

[3] Ne parliamo in "Peccati originali", RM173, Giugno 2013.

[4] *"I fantasmi della Normale*" ("The ghosts of the Ecole Normale") è anche il titolo della pubblicazione di **Laurent Mazliak** che è la fonte principale da cui abbiamo tratto le informazioni per scrivere questo "compleanno". L'articolo originale è reperibile in rete (http://www.proba.jussieu.fr/~mazliak/Gateaux.pdf), e naturalmente è molto, molto più interessante e completo di quanto possa esserlo questo nostro piccolo plagio. Mazliak insegna all'università Pierre e Marie Curie, dove ha ottenuto da studente il dottorato in matematica. Si è occupato di probabilità, e più recentemente di storia della matematica, anche con l'aiuto di Rossana Tazzioli, professoressa dell'università di Lille, nonché una tra i migliori storici italiani di matematica.


5 *René Gateaux*[5]

René Eugène Gateaux nasce il 5 Maggio 1889 in un piccolo paese tra lo Champagne e le Ardenne che sembra essere predestinato a generare matematici: Vitry-le-François. La cittadina non arriva a contare neppure ai giorni nostri quindicimila abitanti, ma è qui che vede la luce anche Abraham de Moivre, nel 1667, e François Jacquier nel 1711. René non è di famiglia particolarmente agiata, e quando il padre Henri muore nel 1905 a soli 44 anni, è immaginabile che il sedicenne René, suo fratello dodicenne Georges e la madre Marie Alexandrine passino dei momenti veramente difficili.

Gateaux è, molto probabilmente, uno studente brillante fin dall'adolescenza: per quanto non si abbiano notizie precise sulla sua carriera scolastica prima del suo arrivo a Parigi, si possono dedurre alcune cose sulla sua vita dal primo documento scritto di pugno dal giovane medesimo. Si tratta della lettera con la quale Gateaux richiede l'ammissione alla sezione scientifica della Ecole Normale di Parigi. La domanda è relativa all'anno 1906, ed è prematura, perché René ha ancora solo diciassette anni: proprio per questo si immagina che il giovane liceale di Reims[6] sia con ogni probabilità uno studente molto brillante nelle materie scientifiche.

Non sarà ammesso alla Normale nel 1906, ma potrà varcare la sacra soglia nel 1907, dopo un ulteriore anno nelle Classi Preparatorie. E a proposito di sacro, è proprio mentre studia alla Normale che Gateaux si apre con fervore al Cattolicesimo: è cosa che appare abbastanza inusuale, per un francese che frequenta una scuola che, per molti versi, è proprio un tempo del laicismo: ma la conversione di René è senza dubbio autentica e significativa, nella breve vita del giovane.

Gateaux completa i suoi studi alla Normale nel 1910, ottenendo l'abilitazione all'insegnamento, pur senza un piazzamento particolarmente onorevole: si posizionerà all'undicesimo posto su sedici laureati, e questo di fatto gli impedisce di poter dedicarsi esclusivamente alla ricerca.

A René si prospetta insomma una carriera di ordinario insegnamento: di lì a poco, nel 1912, otterrà infatti la cattedra del liceo di Bar-Le-Duc, un centro[7] non troppo distante dai suoi luoghi natii: prima però deve ottemperare agli impegni verso lo stato, andando a prestare il servizio militare.

[5] Questa è probabilmente la sola foto esistente di René Gateaux: persino il celebre archivio della Saint-Andrews University, che regolarmente saccheggiamo per informazioni e fotografie dei matematici, non riporta alcuna immagine nella biografia dedicata a Gateaux. Noi l'abbiamo trovata in rete in una pagina che annuncia una conferenza su Gateaux tenuta a Luxembourg-Kirchberg da Laurent Mazliak, lo studioso di cui abbiamo parlato nella nota precedente. Nel suo articolo (cit.), Mazliak ringrazia un sacerdote dell'Arcidiocesi di Parigi per aver individuato l'unica immagine in cui Gateaux è pienamente riconoscibile: supponiamo che si tratti di questa che noi, rudemente come al solito, rubiamo e pubblichiamo.

[6] Altra informazione deducibile dal documento: più esplicitamente, si capisce anche che René apparteneva alle cosiddette "Classi Preparatorie" del Liceo di Reims, e queste "classi" erano corsi elitari che i licei organizzavano proprio per consentire ai migliori studenti l'accesso alle grandi e prestigiose scuole nazionali francesi, come la Scuola Normale Superiore o il Polytechnique.

[7] Anche Bar-Le-Duc è, al pari di Vitry-Le-François una cittadina non certo grande, sui sedicimila abitanti: eppure, anch'essa vanta figli illustri. Il più famoso personaggio nato a Bar-Le-Duc è Raymond Poincaré, noto per essere cugino del grandissimo matematico Henri, e accidentalmente anche per essere stato Presidente della Repubblica Francese.

Una delle possibili concause delle molte perdite della Ecole Normale durante la Grande Guerra è anche il meccanismo che era offerto agli studenti francesi del tempo. Il servizio militare durava ben due anni, e poteva essere svolto sia prima sia dopo il normale corso di studi. Di fatto, quando uno studente entrava alla Normale sapeva già di avere impegnati cinque anni di vita: tre per i corsi universitari, e due per il servizio militare. Quasi tutti gli studenti preferivano andare sotto le armi alla conclusione del periodo scolastico, anche perché, in genere, questo comportava l'ingresso nell'esercito come giovane ufficiale. È quindi inevitabile aspettarsi che, poco prima dello scoppio della Grande Guerra, la Normale era destinata a trasformare gran parte dei suoi studenti in sottotenenti da spedire al fronte.

Gateaux, così, cessa d'essere uno studente il 10 ottobre 1910 per trasformarsi un soldato del 94° Reggimento di Fanteria. Nel Febbraio successivo diventa caporale, e infine sottotenente della riserva nel Settembre 1911. Nell'Ottobre del 1912 si congeda, e comincia ad insegnare a Bar-Le-Duc.

Tra l'autunno del '12 è lo scoppio della guerra nell'estate del '14 trovano spazio a malapena sette stagioni, meno di due anni pieni. In questo piccolo intervallo di tempo René tiene lezioni al liceo e prepara la tesi per il dottorato, e fa in tempo a entrare a pieno titolo nella storia della matematica. Gli argomenti della tesi, scelti probabilmente sotto l'influsso di Hadamard, che brilla per autorità e genialità alla Normale, riguardano l'analisi funzionale e le sue applicazioni alla teoria del potenziale. Sono argomenti alla moda, promettenti, e ci si misurano matematici di prestigio: Paul Levy li ha scelti per la sua tesi nel 1911; Jospeh Peres, un grande amico di Gateaux – e probabilmente anche una sua guida spirituale nell'avvicinamento alla religione, visto che prenderà gli ordini e diventerà Gesuita – tra il 1912 e il 1913 si mostra così brillante sull'argomento che riesce a procurarsi una borsa di studio per perfezionarsi presso uno dei centri europei d'eccellenza sul tema: Roma, dove insegna Vito Volterra[8].

Volterra è uno dei maggiori matematici del suo tempo, ed è un vero luminare nel campo dell'analisi funzionale: è molto amico di Borel, ha occasione di visitare Parigi e partecipare a seminari. Gateaux, incoraggiato dal successo dell'amico Peres, vorrebbe imitarlo e ottenere un periodo di studi a Roma. Sarà lo stesso Borel a raccomandarlo per una nuova borsa di studio, e René riuscirà, per l'anno accademico 1913-1914, a raggiungere la capitale italiana.

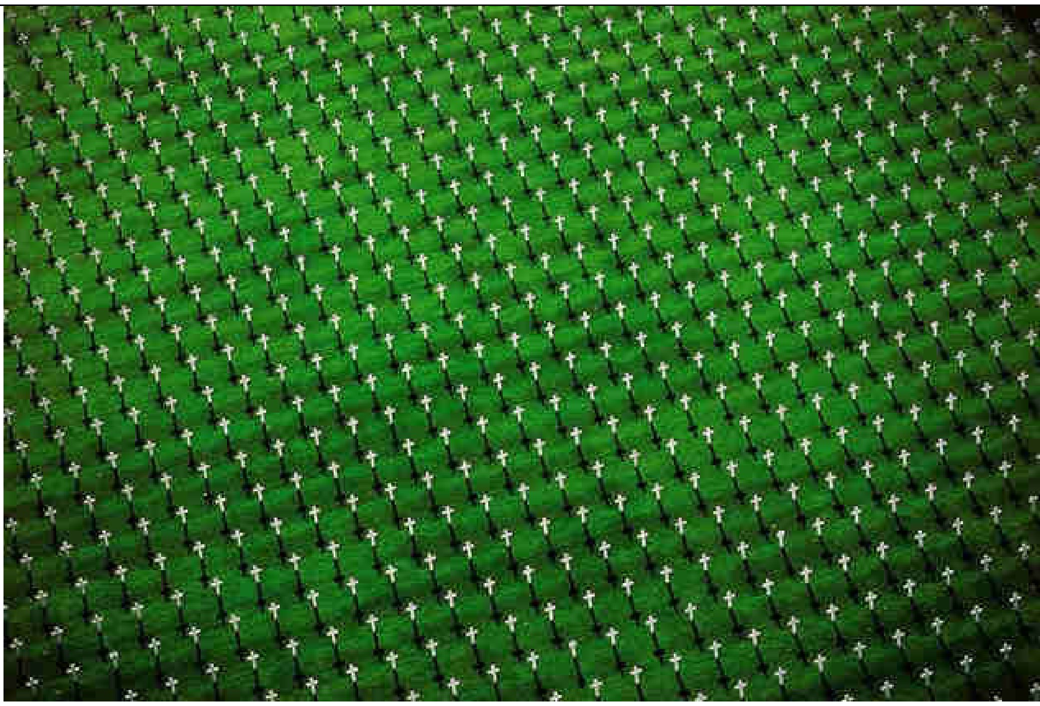
A Roma, René Gateaux si trova davvero bene, a giudicare dai risultati: arriva verso la fine di Ottobre, e non è un gran momento perché l'Italia è in periodo elettorale, e questo ritarda le normali attività didattiche. Tra l'altro, Vito Volterra è anche Senatore del Regno, ed è immaginabile che un rinnovo del Parlamento in qualche modo lo impegni più del normale. Eppure, Gateaux riesce a pubblicare una memoria per l'Accademia Nazionale dei Lincei già nel Dicembre 1913; ne pubblicherà altre tre, e comincerà a lavorare su altre pubblicazioni, durante il suo breve periodo romano. Dalle cartoline di auguri di "Felice anno 1914" (pochi auguri sono stati meno efficaci, nella storia) che si scambiano Borel e Volterra si capisce che l'italiano è davvero molto soddisfatto del lavoro del promettente matematico francese.

Promettente, certo. Ma con poche possibilità di mantenerle, quelle promesse. René Gateaux rientra in Francia all'inizio dell'estate 1914, certo con l'intenzione e la voglia di tornare a Roma, ma è un sottotenente della riserva, e in quell'estate i soldati non hanno grandi possibilità di scelta. La mobilitazione francese è ufficializzata il 2 Agosto, e in breve il brillante professor René si trasforma nel tenente di fanteria Gateaux, 269° Reggimento, Settantesima Divisione.

Poi, c'è la guerra. I francesi cominciano bene, i tedeschi contrattaccano, i capi di stato maggiore muovono eserciti sulle carte come pedine sulla scacchiera. È una guerra ancora giovane, e molti si aspettano che finisca entro natale: non sarà così. Dopo il 1914 verranno ancora quattro anni interi di massacri, l'Europa cambierà completamente

[8] Vedi "Sublimato all'un per mille", RM136, Maggio 2010.

faccia, e la storia farà una svolta brusca nel suo fluire. Ma René Gateaux non vedrà tutto questo: per lui la Grande Guerra dura poco. Muore nel primissimo mattino del 3 Ottobre, nel piccolo villaggio di Rouvroy, mentre cerca di respingere l'attacco delle truppe tedesche che cercano di sfondare il fronte all'altezza di Lens.



6 *Igiene del mondo*

Nel 1916, il ricordo di René Gateaux era ancora vivo, al punto che Jacques Hadamard lo propone per il Premio Francoeur, che infatti gli viene assegnato postumo. Ma sarà essenzialmente per merito di Paul Levy che il nome di Gateaux non cadrà nel dimenticatoio della storia. Nel 1918 Levy sta lavorando all'estensione degli integrali nello spazio funzionale, e raccoglie studi e pubblicazioni. Scrive a Volterra chiedendo lumi su alcune pubblicazioni di Gateaux, raccoglie informazioni, e finisce per trovare anche dei lavori incompiuti di René del tutto inediti, perché incompleti.

Con entusiasmo e profondissima onesta intellettuale, Paul Levy completa e rifinisce gli articoli di Gateaux, e li pubblica riconoscendo al giovane collega caduto in merito tutti gli onori, anche se è indubbio che il suo personale contributo al recupero e completamento del lavoro è davvero cruciale. In queste pagine ritrovate, compare anche la "Derivata di Gateaux", nota a tutti gli studiosi di analisi funzionale.

L'ultima lettera nota di Renè Gateaux è per Volterra.

Buissoncourt (Meurthe-et Moselle), 29 agosto 1914

Signor Senatore,

Vi ringrazio molto per la vostra lettera che ho appena ricevuto nella campagna della Lorena dove passiamo i giorni e le notti al suono del cannone.

Credo che la traduzione delle lezioni sulle funzioni di linea si farà attendere un bel po', come dite voi. E in merito alla vostra Memoria sulle funzioni permutabili, che avrei letto davvero con grande interesse, Dio solo sa quando riuscirò a studiarla.

Ci tengo a dirvi che sono stato davvero felice di apprendere che l'Italia non solamente resta neutrale, ma persino che si sta avvicinando alla Francia. Tutti i francesi sono davvero molto sensibili su questo punto, e apprezzano davvero molto l'attitudine italiana. Possa questo spingere i nostri due paesi a conoscersi meglio, e ad avvicinarsi!

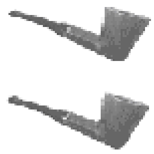
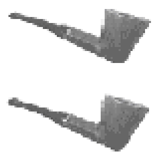
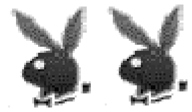
Il servizio postale funziona in maniera davvero irregolare mi auguro di poterle scrivere di nuovo, e spero cha almeno qualcuna delle mie lettere le arriverà. Spero che si trovi in salute, e così sia per tutta la sua famiglia. Da parte mia, sopporto perfettamente le fatiche della campagna. La prego di ricordami a tutti i professori che ho conosciuto a Roma. Presenti i miei più rispettosi omaggi alla signora Volterra, e gradisca l'espressione dei miei rispettosi sentimenti.

R.Gateaux, Tenente del 269° Reggimento, 139esima Brigata, 70esima Divisione della Riserva

Lettera di guerra, di un ragazzo senza futuro.

Igiene del mondo, come no.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Mezzo e un problema di fisica			
Trovare "la patata"!			

2.1 Mezzo e un problema di fisica

Nel senso che abbiamo due problemi, ma uno è talmente vecchio che conta mezzo. Ma, per prima cosa, statuiamo un concetto: a oggi è passato più di un mese tra quando a Rudy sono venuti in mente questi problemi e il momento nel quale si è deciso a metterli su carta. Ci teniamo a raccontarvelo perché qui in Redazione esistono due loschi figuri convinti che lo scrivente *[Rudy Speaking]* abbia preparato poco prima del Sacco di Roma le rubriche del marzo 2028: in realtà scriviamo questo nel pieno del *Mese della Consapevolezza Matematica*, e quindi ci pare giusto parlare d'altro.

Il momento topico era, come risulterà chiaro dal seguito, il trascorso 14 marzo; reduce dalle libagioni del *suo* compleanno *[Grazie a tutti per gli auguri!]*, il Nostro si apprestava a festeggiare quello di Einstein, forte anche di una bellissima cravatta in tema *[Regalo di Ugo! Grazie!]*. Ora, come sapete, Rudy ha delle opinioni piuttosto radicali su Albert, che in pubblico vengono di solito attenuate da Doc: i festeggiamenti, quindi, si riducono di solito a una concione sullo scarso lavoro fatto da Albert e sul mucchio di calcoli fatti da Mileva.

Quest'anno, per variare la cosa, Rudy aveva deciso di concionare sui paradossi della relatività (senza, sadicamente, dare la soluzione e lasciando gli ascoltatori in ambasce); non volendo andare a trattare di *entanglement* e *paradosso EPR*, aveva rispolverato un vecchio quesito (e questo è il "mezzo" di cui sopra).

Supponiamo – ha iniziato il Vostro Umile Narratore, indirizzandosi ad una platea già esausta alla prima parola – che siate sospesi nello spazio e che abbiate il vostro usuale sistema di riferimento ("su", "giù", "destra", "sinistra", "davanti", "dietro"): vi state godendo il panorama quando vedete un'astronave ciambelliforme di spessore trascurabile muoversi di piatto verso "su": misurate la sua velocità rispetto a voi e appurate che il "buco" centrale, che vi appare del diametro di 90 metri, se il ciambellone fosse fermo rispetto a voi, avrebbe un diametro di 100 metri. Fieri dei vostri calcoli, fate vagare lo sguardo e vi accorgete che sta arrivando un'astronave segmentiforme da "destra" verso "sinistra": questa vi appare della lunghezza di 90 metri, e un veloce calcolo relativistico vi permette di appurare che a "bocce ferme" sarebbe lunga 100 metri.

A questo punto, già vi immaginate i due valorosi capitani intenti a discutere con i rispettivi Ufficiali Scientifici, entrambi dotati di poderose orecchie a punta[9]. Sul Ciambellone: "Si sta avvicinando un'astronave, ma la sua velocità relativamente a noi è tale che passerà agilmente nel nostro buco centrale: non mi pare il caso di preoccuparsi". Mentre, sul Segmento: "Aaarghh! Ci sta venendo contro una ciambella con un buco troppo piccolo! Non ce la faremo mai a passare! *Moriremo tutti!* (cit.)" *[Sì, il comandante dice "cit". E sa anche da che film viene].*

A questo punto, visto che entrambi gli aggeggi si stanno muovendo di moto rettilineo uniforme, qualcuno deve avere torto marcio, visto che a Albert non piaceva la Meccanica Quantistica e quindi non potete appellarvi a una qualche arzigogolata forma di effetto tunnel. Bene, chi ha ragione?

...e questa era quella da mezzo punto. L'altra, a detta degli esperti, è più tosta.

Questa volta le due astronavi sono perfettamente identiche, ferme, equidistanti rispetto a voi, con la "testa" nella stessa direzione e collegate da un cavo teso della lunghezza di un chilometro che unisce la "coda" di quella davanti alla "testa" di quella dietro: insomma, gli assi delle astronavi e il cavo sono tutti sulla stessa retta.

Al vostro "Via!" le astronavi accendono i motori esattamente alla stessa potenza (si sono messe d'accordo prima) e partono velocissime nella stessa direzione: il cavo, assolutamente indeformabile, solidale con loro.

La domanda "da Nobel[10]" è: ma il filo, si rompe o no?

2.2 Trovare "la patata"!

...che, con la progenie maschile e adolescente che si ritrovano due degli estensori, più che a un problema di matematica potrebbe dare origine a un romanzo *hard-core*[11]. Ma parliamo proprio del tubero della solanacea (e siccome il tabacco, pur essendo una solanacea, non ha tubero, le pipe di valutazione sono poche).

Tre fasi, per il problema, e due (la prima e l'ultima) sono "aperte". La prima vi chiede di fare qualche pensiero sul gioco "puro", la seconda vi propone una "variazione", la terza vi chiede di "generalizzare". E *[caveat emptor]* abbiamo la risposa solo alla seconda. Quindi, le altre due potrebbero benissimo essere irresolubili.

Un famoso (ma non vi diciamo quale) specialista americano di matematica ricreativa, ebbe tempo fa a proporre un interessante quesito.

Nella "Zona della Patata" *[suppergiù coincidente con la* Corn Belt*, ma noi maschietti non potevamo lasciarci sfuggire il doppio senso (RdA&PRS)]*, è diffuso uno strano sport: su una linea di un chilometro, a distanze di dieci metri una dall'altra, vengono distribuite uniformemente cento patate (quindi, a dieci metri una dall'altra); i due concorrenti devono:

1. Partire dalla linea di partenza
2. Raggiungere la patata più vicina
3. Raccoglierla e portarla al secchio sulla linea di partenza
4. (Ricominciare da (1)).

Vince, chiaramente, chi riesce a portare l'ultima patata. Qui, quello che ci chiediamo è come potremmo rendere il gioco "equo" per un maratoneta e un centometrista, variando la patatometrica (sarebbe la distanza tra un tubero e l'altro)... ma forse è impossibile.

Avete visto che alle prossime olimpiadi ci saranno alcuni giochi "misti", con le squadre composte di maschietti e di femminucce? Secondo noi, si sono persi un pezzo.

[9] Prima serie, certo. E in bianco e nero, così non si capiva di che colore erano le magliette.

[10] Lo sappiamo, che il Nobel glielo hanno dato per l'effetto fotoelettrico. Ma sappiamo anche che hanno litigato a lungo, prima di darglielo.

[11] Già lo vedo: "Cinquanta bisezioni di trigo". A breve disponibile nei peggiori licei di Cinisello Balsamo (scelta in quanto non ci risultano molti licei, da quelle parti).

Pensiamo alla caccia alla patata di cui sopra, ad esempio. Supponendo che le misure siano quelle poco sopra statuite dalla WPRO (Word Potato Race Organization), e supponendo si sappia che, per la finale, tra un maschietto e una femminuccia, si voglia garantire alla femminuccia un vantaggio (ma solo se si riesce misurare esattamente la differenza di velocità tra i due: diciamo il 2.04%, a vantaggio del maschietto?): a questo punto, volendo dare alla signor(in)a in gara un vantaggio proporzionato alle sue capacità *non solo muscolari*, le viene concesso di mettere una patata a sua scelta (nel senso di *scelta lungo la fila*) nel proprio *basket* prima della gara; e qui arriva la seconda domanda, ossia se la femminuccia *riesca a vincere* con un'analisi patatologica (nel senso di *logica della patata*): esiste una patata *topica* (sorry for the pun) che permette al gentil sesso di vincere?

La terza domanda, apertissima, è: e se cambio i parametri? Come cambia cosa?

3. Oldies & Goldies

Due, questa volta! E uno non è neanche tanto "old", visto che compare nello "scorso numero" (dal punto di vista dello *Zugzwang!*, quindi parliamo di RM192).

3.1 [RM172 – Maggio 2013] – Fred si sta montando la testa

Terrorizzati dall'immagine del VadLdRM meno vecchio in tenuta da *Gorilla Matematico*, avete bellamente ignorato il problema. Togliamo qualche fronzolo e lo riproponiamo.

Due amici stanno giocando a dadi, con delle regole piuttosto strane: il primo fa un punto quando la somma dei due dadi tirati è 7 , il secondo fa punto quando riesce a fare tre risultati consecutivi che formino una sere crescente. Su quale dei due scommettete?

La cosa varia, se i dadi vengono lanciati *contemporaneamente* e nel caso allo stesso tiro entrambi facciano punto non si distribuiscano punti?

L'ultima parte rappresentava una generalizzazione della quale non abbiamo soluzione: cosa succede, se in luogo di una coppia di dadi normali viene usata una coppia di dadi (*uguali*, altrimenti finite tra un anno...) di Dungeons & Dragons?

3.2 [RM192 – Gennaio 2015] – Neutron (Zugzwang!)

Vi avevamo detto e ridetto che la versione base è analizzata (anche se noi non abbiamo l'analisi), ma probabilmente vi siete persi nelle variazioni. Quindi, riepiloghiamo la sola versione base.

Vi serve una ***scacchiera*** 5X5, come ***pedine*** potete usare dieci monete (cinque di un tipo, cinque di un altro) e vi serve un ***Neutron*** (moneta ulteriormente diversa).

La ***posizione di inizio*** è con il Neutron nella casella centrale, le vostre cinque monete "in prima" e quelle dell'avversario "in quinta".

La ***mossa*** di una pedina è in qualsiasi direzione (verticale, orizzontale, diagonale) o verso per la *massima distanza possibile*: una pedina (propria, avversaria o Neutron) o il bordo scacchiera arrestano il movimento.

Alla ***prima mossa***, il giocatore muove una propria pedina secondo la regola della mossa: tutte le mosse successive (anche la prima mossa del secondo giocatore) prevedono che venga mosso prima il Neutron (con la regola della mossa) e poi una propria pedina.

La ***vittoria*** può avvenire in due modi:

1. Il Neutron finisce in una delle caselle di partenza delle vostre pedine: non importa se siete voi o il vostro avversario ad effettuare la mossa, e in questo caso non è necessario successivamente muovere una pedina.
2. Il vostro avversario non riesce ad effettuare una mossa completa: o non può muovere il Neutron o, successivamente al movimento del Neutron, non può muovere nessuna propria pedina.

Non esiste la ***presa***.

Forza, datevi da fare: noi sappiamo che è analizzato, ma non conosciamo l'analisi.

4. Bungee Jumpers

Due cerchi non intersecantesi sono entrambi tangenti alle due semirette che formano l'angolo acuto XOY. Costruire il triangolo isoscele *ABC* con vertice *A* su *OX* e base *BC* su *OY* tale che ognuno dei due lati uguali sia tangente a uno dei due cerchi.

> *Oltre a quella presentata, sappiamo dell'esistenza di una soluzione alternativa esteticamente molto più valida: ma "non vorremmo privare i nostri lettori della gioia di scoprirla".*

La soluzione, a "Pagina 46"

5. Soluzioni e Note

Maggio!

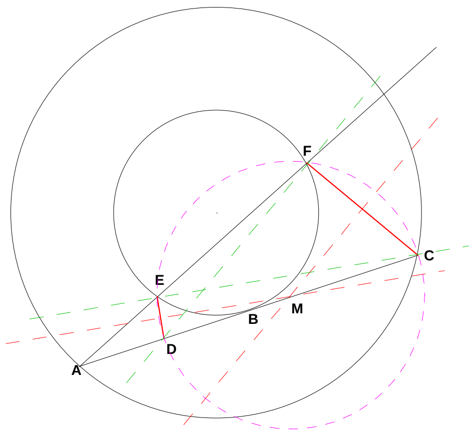
Avanzato, accidenti. Avete già mandato gli auguri al nostro Doc? Non ancora? Ma lo sapete, vero, che valgono anche in ritardo? Anche perché non crediamo proprio di riuscire ad uscire in tempo per il suo compleanno questa volta… per fortuna (!) i nostri cari lettori ormai sono abituati ai nostri ritardi, e sanno bene che da anni siamo immersi in celebrazioni stravaganti da novembre a giugno. Per quelli che ancora non lo sono (abituati o rassegnati), beh, c'è sempre tempo per riabilitarsi, cerchiamo di non farla tanto lunga.

5.1 [Calendario 2008]

5.1.1 Agosto 2008 – USAMO 1998 – Problema 2

Il problema era già stato risolto da ***trentatre*** (RM161), ma una soluzione calendaristica è sempre un bel regalo di compleanno, e quelle di ***Sawdust*** sono sempre soluzioni divertenti. Ecco testo e soluzione di seguito.

> *Siano C_1 e C_2 due cerchi concentrici, con C_2 interno a C_1.*
>
> *Da un punto **A** di C_1 viene tracciata la tangente **AB** a C_2 (**B** su C_2).*
>
> *Sia **C** il secondo punto di intersezione tra **AB** e C_1 e sia **D** il punto medio di **AB**.*
>
> *Una retta passante per **A** interseca C_2 in **E** ed **F** in modo tale che le bisettrici perpendicolari di **DE** e **CF** si intersecano in un punto **M** su **AB** .*
>
> *Trovate, con prova, il rapporto **AM/MC** .*



Il rapporto sembra vicino al valore della sezione aurea, ma in realtà è 5/3.

Ipotizziamo in partenza che le 2 "bisettrici perpendicolari" di DE e CF (ma non si fa prima a dire "assi"?) incontrino la retta per AB nei 2 punti M ed N.

I punti M ed N coincidono se le parallele agli assi tracciate rispettivamente per E ed F passano per i punti C e D. Ma così i triangoli CDE e CDF sono rettangoli e quindi inscrivibili in una semicirconferenza di cui CD è il diametro e il punto M (che ora coincide con N) è il centro.

Per cui se consideriamo per il segmento AC la lunghezza arbitraria 8 (per semplificare i calcoli), AD=2, DC=6, DM=MC=3, AM=5.

Di conseguenza AM/MC=5/3.

Notare che se il raggio di C_2 è un po' minore di 1/3 del raggio di C_1, scritto con più precisione, indicandoli rispettivamente con *r* e *R*,

$$r < \frac{19}{60} R$$

i due punti M e N non si incontrano mai sulla retta AB.

5.2 [171]

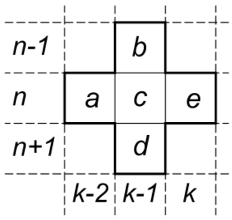
5.2.1 "Cappotto"!

Anche questo mese la rubrica degli "Oldies and Goldies" ha colpito.

Vediamo di cosa si trattava:

> *Avete un rettangolo di altezza A caselle e base B (caselle), con l'altezza non maggiore della base; vi si chiedeva di annerire alcune caselle e quindi scrivere, in ogni casella, il numero delle caselle annerite con cui la casella data aveva un lato in contatto (se la casella era lei tessa annerita, andava contata); il vostro scopo, veniva ad essere quello di ottenere dei "rettangoli dispari", ossia di trovare un metodo costruttivo tale che portasse ad avere tutti numeri dispari, eventualmente ripetuti.*

Il solutore che salva il problema dagli archivi questo mese è ***trentatre***, a voi decidere se ha seguito i consigli del Capo oppure no:

> Indico con
>
> A, B: altezza e base della scacchiera con $A \leq B$
>
> $M_{n,k}$: matrice AxB con le caselle bianche/nere, cioè (0,1)
>
> - indici n, k : riga (1, ... B), colonna (1, ... A)
>
> C_k: la colonna di M di posto k .
>
> fig.1
>
> 
>
>
> Nelle caselle in fig. 1 deve essere[12]
>
> [1] $a + b + c + d + e = dispari \rightarrow e = (1 + a + b + c + d) \bmod 2$
>
> quindi la colonna C_k si può costruire dalle due precedenti, e si ottiene M con
>
> [2] $M_{n,k} = (1 + M_{n-2,k} + M_{n-1,k-1} + M_{n-1,k} + M_{n-1,k+1}) \bmod 2$
>
> - la formula vale per tutte le caselle inclusi i bordi ponendo $M_{n,-1} = M_{0,k} = M_{B+1,k} = 0$, cioè
>
> bordando M con una cornice di zeri.
>
> Partendo da una qualsiasi colonna iniziale C_1 e arrivati alla colonna C_B, tutte le AxB caselle hanno valore (somma delle adiacenti) dispari per costruzione salvo per la stessa C_B; se in questa i valori sono tutti dispari si ha una soluzione, altrimenti la C_1 iniziale va cambiata.
>
> Se C_1 è data da $M(n,1) = x_n$, con $(x_1, x_2, x_3, \ldots x_A)$: A cifre di un n° binario m, si hanno tutte le soluzioni provando con tutti gli m nell'intervallo $[0 \ldots 2^A - 1]$, quindi le soluzioni diverse nel rettangolo AxB sono al più 2^A.
>
> Con un programma che esegue i calcoli (e disegna i risultati) si arriva rapidamente fino a rettangoli 24x24.
>
> Il n° di soluzioni diverse (escluse simmetrie e rotazioni) per AxB fino a 12x12 è

[12] I valori in M sono cifre binarie; quindi $(a+b+c+d+e)$mod2=1 da cui la [1] (mod 2 equivale all'uso di XOR al posto di +).

$A \setminus B$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		1	2	1	1	1	2	1	1	1	2	1
3			1	1	3	1	1	2	1	1	3	1
4				5	1	1	1	1	6	1	1	1
5					1	1	6	1	1	1	4	1
6						1	1	22	1	1	1	1
7							1	2	1	1	36	1
8								1	1	1	2	1
9									43	1	2	1
10										1	1	1
11											10	1
[3] 12												1.

La sostanza non cambia arrivando a 24x24: è evidente la predominanza degli 1, salvo per alcuni rettangoli (per 11x15 le soluzioni sono 72, per 13x17 più di 100); tutti i rettangoli hanno almeno una soluzione.

Riporto in fig. 2 e 3 come esempio alcune delle molte soluzioni 7x11, e alcuni quadrati simmetrici, tutti unici (naturalmente 0: bianco, 1: nero).

fig. 2

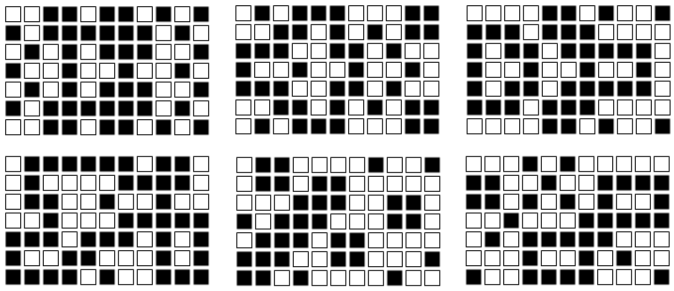
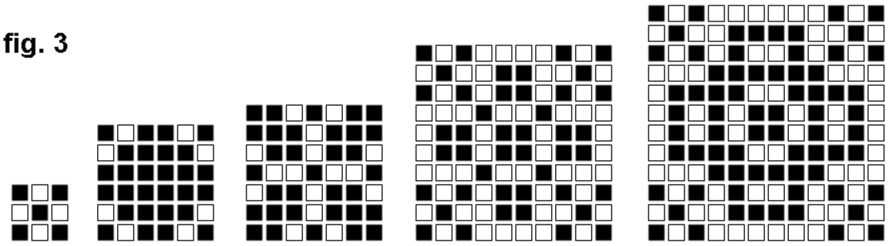


fig. 3



Dato *A*, indichiamo con S le soluzioni generiche, distinte in

- S* <u>semplici</u> se prive di colonne 0 (cioè colonne tutte di 0) (p.es. tutte quelle in fig. 2 e 3).
- Sc <u>composte</u> , che presentano colonne 0.

Valgono le proprietà (v. nota *1)

- le S*, dato *A*, sono in numero finito
- per *A*=3,4 – fatte salve simmetrie e rotazioni – sono riportate in fig. 4
- ogni Sc è composta da una serie di S* separate da colonne 0
- per *A*=3, alcuni casi in fig. 5 (un pallino sulle colonne 0)
- ai lati di una colonna 0 ci sono due colonne inverse (1,0 scambiati)

(questo spiega il doppio 0 fra colonne nere)

- le Sc, al crescere di *B*, sono periodiche, cioè si ripetono per gruppi uguali
- una S può avere colonne o righe 0, ma non tutte e due.

fig. 4

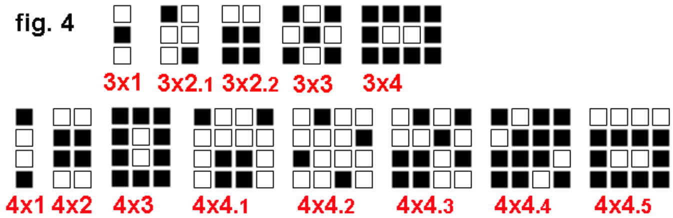
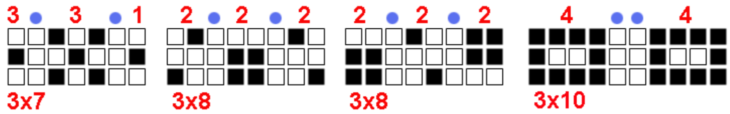
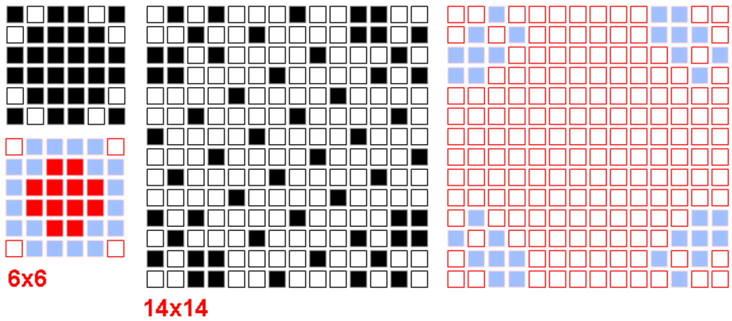


fig. 5



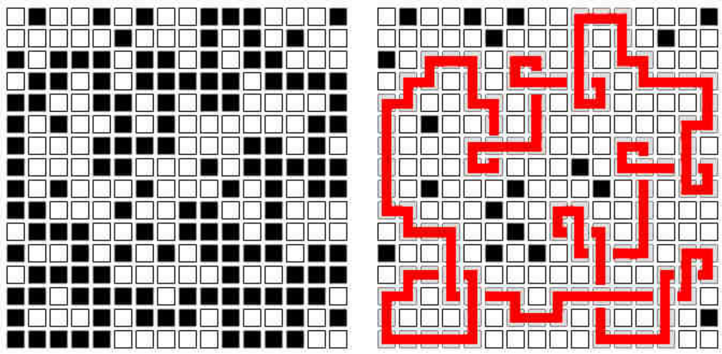
Il valore medio, cioè il rapporto fra somma dei valori e numero di caselle, varia (nelle S fino a 24x24) fra 1,33 e 3,44. Il massimo in 6x6, il minimo in 14x14, dove lo schema di caselle isolate tende a 1. (in fig. 6, il valore delle caselle 1,3,5: bianco, azzurro, rosso).

fig. 6



Le caselle nere non isolate possono sempre collegarsi con percorsi chiusi che passano per ogni casella non più di due volte (fig. 7).

fig. 7



Nella tabella [3] non ci sono zeri, cioè ogni rettangolo *A*x*B* ha almeno una soluzione. Questo si può dimostrare per l'intera riga *A* conoscendo le soluzioni S* (v. nota *2), ed è vero per le righe fino a 5. Il metodo si potrebbe programmare e aggiungere altre righe, ma la dimostrazione completa mi sembra difficile – o forse è facile, ma io non la ho trovata.

note

*1)

- ogni colonna C_k è un n° binario m_k, per le colonne $C_k \equiv m_k$ la [2] diventa

(i.) $f(m_{k-2}, m_{k-1}) = m_k$

- f collega le righe in avanti e all'indietro $f(m_k, m_{k-1}) = m_{k-2}$

(ii.) indicando una S* con $0,(m_1, m_2, ... m_B),0$ dove gli 0 sono i bordi (esterni alla S*), e $m_k \neq 0$, la (i.) vale per tutta la sequenza, infatti

$f(0, m_1) = m_2$: bordo sinistro

$f(m_{B-1}, m_B) = 0$: bordo destro

(iii.) definendo le <u>coppie</u> con $D_k = (m_k, m_{k+1})$

- ogni coppia scelta in S* determina l'intera S* (nei due versi)

(iv.) in ogni S* (con B >1) <u>le coppie sono tutte diverse</u>, infatti se D_k è ripetuta S* diventa $0,(m_1, ... D_k, ... D_k, ...),0$ ma per (iii.) $\rightarrow 0,(m_1, ... D_k, 0, m_1, ...D_k, ...),0$ e poiché 0 non è ammesso in S* $\rightarrow 0,(m_1, ... m_B),0$ senza coppie ripetute.

Gli S* diversi (compresi ribaltamenti) iniziano tutti con una colonna m diversa, con $1 \leq m \leq 2^A - 1$; quindi gli S* sono $2^A - 1$.

Gli zeri esterni (bordi) possono essere inclusi in una Sc se hanno valore dispari, cioè se i due m ai lati di 0 sono <u>inversi</u>, con 0 e 1 scambiati – cioè hanno per somma $2^A - 1$ (v. fig.1 dove se $b = c = d = 0$ il <u>valore</u> in c è dispari solo se a, e sono inversi)

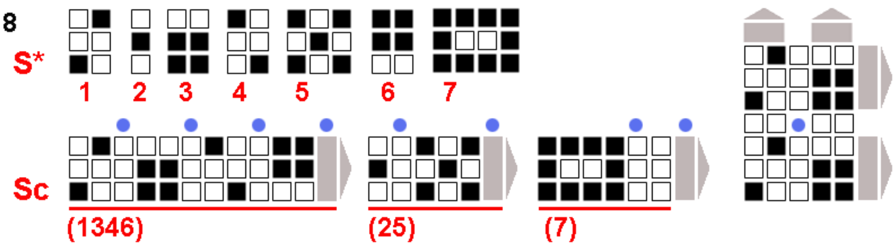
- i numeri m sono inversi a coppie ($m = 2^A - 1$ è l'inverso di 0)

- le Sc sono quindi composte di sequenze di S* separati da 0, e ogni S* determina i due laterali; quindi ogni S* determina completamente la Sc

(v.) in una soluzione si possono avere colonne 0 o righe 0 ma non tutte e due; infatti l'incrocio ha valore 0 e non dispari.

*2)

fig. 8



Le associazioni fra le S* si possono riunire in gruppi. P.es. in fig. 8 per A=3, numerando le sette S* con il valore decimale della prima colonna, cioè (1,2, ...7), poiché ogni S* determina la successiva, si ha la permutazione

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} = (1,3,4,6)(2,5)(7) \cdot$$

I tre cicli formano ognuno una sequenza illimitata di S* connessi. Oltre un certo B, ogni S è periodica (in rosso il periodo). Le tre sequenze di fig. 8 contengono fra due 0 <u>tutte le soluzioni</u> 3xB.

Le lunghezze possibili delle S sono, per ogni $n \geq 0$

$(1,3,4,6)$ $B = 2 + 3n$

$(2,5)$ $B = 1 + 6n, 3 + 6n, 5 + 6n$

(7) $B = 4 + 6n, 5 + 6n, 6 + 6n$

(nb. in (7) all'inizio e alla fine della sequenza si può aggiungere uno 0).

Le lunghezze <u>coprono tutti gli interi</u>, quindi ogni rettangolo 3xB ha una soluzione, e la tabella [3] <u>non ha zeri nella intera riga 3</u>.

Analizzando le sequenze si ottiene inoltre il n° di S per ogni rettangolo (p.es. 3x5 ha una S per ogni ciclo).

Una soluzione *A*x*B* scelta in una sequenza è anche (ruotata) una soluzione *B*x*A*, e possiamo prolungarla verticalmente in un'altra sequenza. Ma questo non può consentire di costruire S grandi da quelle piccole. P.es. in fig. 8 a destra, prolungando le prime due S di (1346) si hanno 4 sequenze corrette (con le frecce) ma l'insieme non è una S perché l'incrocio (pallino) non è consentito.

Fantastico. Andiamo avanti.

5.3 [195]

Finalmente arriviamo ai problemi del mese scorso.

5.3.1 ALEE_OOh_ooh. ALEe_Oh_Oh

Il primo problema del mese scorso viene dalle elucubrazioni del Capo sui diversi modi di calcolare i punteggi nei vari sport. Vediamo di che cosa si trattava:

Statuiamo il metodo di punteggio: se vinci tre punti, se pareggi un punto a testa, se perdi niente, non importa il punteggio conseguito. Consideriamo il girone unico, abbiamo n squadre: alla fine del torneo i punteggi delle squadre sono una serie di interi consecutivi. Quanti punti ha fatto l'ultima in classifica? Esistono diversi "percorsi" che ci portano a questo risultato? Per la vincitrice, quale potrebbe essere stata la peggior posizione?

Ecco, questo il problema. La soluzione che abbiamo ricevuto, è a firma ***Alberto R.***:

Ecco una soluzione con sei squadre, denominate con le lettere da A ad F.

schedina		A	B	C	D	E	F
A B	1	3					
A C	2			3			
A D	X	1			1		
A E	2					3	
A F	2						3
B C	X		1	1			
B D	X		1		1		
B E	1		3				
B F	2						3
C D	X			1	1		
C E	X			1		1	
C F	2						3
D E	X				1	1	
D F	1				3		
E F	1					3	
Tot. punti		4	5	6	7	8	9

Come l'ho trovata? Provando e riprovando! Metodo tanto giustamente apprezzato dagli accademici del cimento quanto giustamente disprezzato dai veri matematici (ma io non sono tale).

Credo, inoltre, di aver verificato che non esistono soluzioni con meno di sei squadre, ma non so nulla circa eventuali soluzioni con più di sei squadre.

Poco più tardi è arrivata un'altra versione, con quattro squadre, sempre da ***Alberto R.***:

schedina		A	B	C	D
A B	X	1	1		
A C	2			3	
A D	X	1			1
B C	X		1	1	
B D	X		1		1
C D	2				3
Tot. punti		2	3	4	5

Il "vero matematico" non ha niente a che fare con noi, ma sarebbe carino avere una soluzione per lo meno più operativa. Voi che ne dite? Ce la mandate il mese prossimo? Va bene, aspettiamo, soprattutto il Capo.

5.3.2 Riapre „ZooM"!

Avete notato che il numero scorso mancava di problemi ambientati nel campo di tiro? Il Capo, che finalmente è riuscito a sfogarsi con arco e frecce per qualche weekend, ormai, ha ripreso il vecchio passatempo di prendere in giro quei poveri innocenti virgulti dei suoi figli. Per simpatia provo a riportare il problema ignorando le frecciatine.

> *Una tigre si trova temporaneamente in una gabbia circolare del raggio di* 10 *metri; per noia percorre ogni giorno una poligonale di* 30 *chilometri. Prendendo tutti gli angoli come positivi (sia quelli dei giri a destra che quelli dei giri a sinistra), la nostra tigre non è mai scesa sotto i* 2998 *radianti di rotazione/giorno. C'è una qualche regola?*

Udite udite! Finalmente un nuovo solutore! Assolutamente con priorità pubblichiamo la sua soluzione ed il suo allonimo, ***τϱ*** che si legge *ThauRho*. Ed ecco le sue elucubrazioni, che lui chiama "alla buona":

> Dunque, c'è sta povera bestia che se la girovaga di linea retta in linea retta in questa gabbia circolare di raggio r=10; ogni spostamento che fa descrive un angolo attorno al centro (e come da testo, si suppone che gli angoli siano comunque positivi, ovvero si può intendere che la besti*ola* giri sempre in un senso (orario o antiorario) senza ledere le condizioni.
>
> Ora: si vuole vedere il minor numero di giri che è possibile fare attorno al centro, coprendo i 30km giornalieri (che voglia! mi stanco già all'idea).
>
> Per coprire la maggior strada possibile compiendo il minor numero di giri è <u>*elementare*</u> (mai altro termine si presta allo stupro della matematica come questo) notare che è meglio camminare il più possibile adiacente alla circonferenza della gabbia; si può supporre quindi che Fred percorra un poligono inscritto alla circonferenza di n lati.
>
> Si passi quindi al limite: facciamo tendere la lunghezza di ogni segmento a zero, portando quindi il numero di lati del poligono all'infinito (di nuovo: scusatemi per la terminologia imprecisa, "*da campagnolo*", mi sento in colpa, giuro) ma ora altro non abbiamo che la circonferenza stessa.
>
> Ogni giro quindi sarà $2\pi r$, e per coprire il chilometraggio saranno necessari
>
> 30000 / (2 π 10)
>
> ovvero *477,tot* giri; ogni giro è 2π radianti quindi
>
> [30000 / (2 π 10)] (2 π) = 30000 / 10 = 3000 rad/giorno
>
> (quindi, in realtà, Fred non può scendere sotto i 3000 rad/giorno, non 2998!)
>
> e... boh, la dimostrazione credo sia finita qua, salvo errori.

Poi, il Nostro ci propone un problema, che al Capo è piaciuto molto e che probabilmente vedrete nelle altre pagine della rivista tra qualche mese. Siamo molto contenti, e vi passiamo anche quello che dice ***Alberto R.*** sulla nostra tigre:

Una condizione necessaria perché il tigre cumuli la minima rotazione totale a parità di percorso totale è che egli svolti solo all'ultimo momento cioè quando non può proseguire oltre avendo raggiunto la parete della gabbia. Ciò significa percorrere una spezzata con i vertici A_0, A_1, A_2, ... A_N sulla circonferenza, e noi solo questo caso dobbiamo esaminare poiché stiamo cercando il limite inferiore alla rotazione totale.

Sia α_j l'angolo al centro sotteso dalla corda A_{J-1} A_j e sia L_j la lunghezza di detta corda.

Quando il felino proveniente da A_{j-1} giunge in A_j, per puntare su A_{j+1} deve ruotare dell'angolo $(\alpha_j + \alpha_{J+1})/2$. La sommatoria di tutti questi angoli, per J da 1 a N–1 vale

$$\alpha_{\text{Tot}} = \alpha_1/2 + \alpha_2 + \alpha_3 + ... + \alpha_{N-1} + \alpha_N/2$$

D'altra parte, l'arco $R\alpha_J$ (R raggio gabbia) è maggiore della corda L_J, cioè $\alpha_J > L_j/R$, quindi

$$\alpha_{\text{Tot}} > (L_1/2 + L_2 + L_3 + ... + L_{N-1} + L_N/2)/R$$

che si può mettere nella forma

$$\alpha_{\text{Tot}} > (L_1 + L_2 + ... + L_N - L_1/2 - L_N/2)/R$$

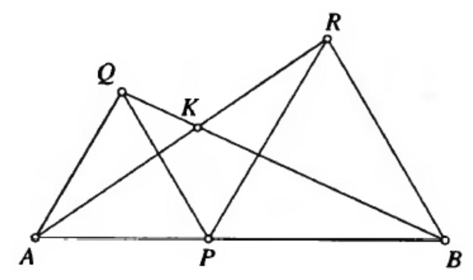
Poiché una semicorda non può essere maggiore del raggio, la disuguaglianza continua a sussistere se sostituiamo $L_1/2$ con R e $L_N/2$ con R ottenendo:

$$\alpha_{\text{Tot}} > (L_1 + L_2 + ... + L_N - R - R)/R = L_{\text{Totale}}/R - 2 = 30\text{km}/10\text{m} - 2 = 2998 \text{ rad}$$

Ed è qui che ci fermiamo, pronti ad augurarvi un ottimo maggio, o quello che ne resta, fino al prossimo numero!

6. Quick & Dirty

Trovare il luogo dei punti K, intersezione dei segmenti QB e RA, noto che P varia sul segmento AB e che i triangoli QAP e RPB sono equilateri.



1 *Giusto per chiarire la cosa.*

Il colpo di genio qui consiste nel considerare una rotazione in senso orario di 60° *della figura, con centro in P. Questo porta A su Q e R su B, e quindi il triangolo ARP coinciderà con il triangolo QBP, implicando l'uguaglianza degli angoli ARP e QBP.*

Quindi, KP sottende lo stesso angolo su R e su B, e quindi RB sottende un angolo di 60° *in K come in P. Da questo si ricava che l'angolo AKB è sempre* 120°*, e quindi il luogo di K è un arco di cerchio di* 120° *avente corda AB.*

7. Zugzwang!

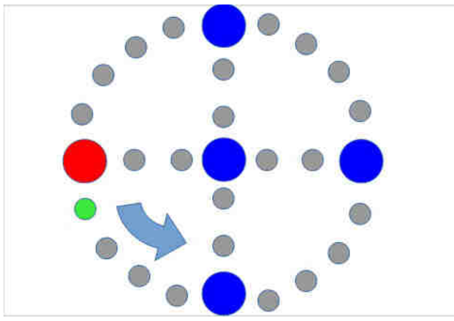
Ve lo dico subito *[Rudy speaking]*, come gioco non mi entusiasma. Una sua caratteristica, però, potrebbe renderlo un buon argomento per il ***Summer Contest***. Ma ne parliamo al fondo.

7.1 Nyout

Per prima cosa, pensiamo a giocare.

Questo gioco ci arriva dalla ***Corea*** (quando era una sola): richiede l'uso di un generatore casuale, che ci permetterà di proporvi un grazioso problema "aperto".

In realtà, il gioco è piuttosto variabile: il numero dei ***giocatori***, per cominciare, non è fissato: possono essere due, tre o quattro, e nel caso siate quattro si gioca a coppie (come al solito, uno di fronte all'altro).



2 *La scacchiera.*

La ***scacchiera*** è già un problema del suo, nel senso che dovete riuscire a dividere la circonferenza in *venti* parti: supponiamo non solo ci siate riusciti, ma siate anche riusciti a tracciare i *raggi* di due caselle, ottenendo lo sconquasso indicato in figura. Se non vi piacciono i colori, liberissimi di cambiarli, e il freccione serve solo a ricordarvi che si gira in senso ***antiorario***.

La casella rossa è diversa in quanto si tratta dell'***uscita***; quella verde, vicina all'uscita, è (abbastanza logicamente) l'***entrata***.

Per quanto riguarda i ***pezzi*,** ogni giocatore ha un "certo numero" di *cavalli* (nessuna relazione con quello degli scacchi, anche considerato che diventerebbe problematico definirne il movimento, su un aggeggio del genere): il numero è funzione del numero dei giocatori, nel senso che ogni giocatore ne ha *quattro* se si gioca in due, *tre* se si gioca in tre, *due* se si gioca in quattro.

Il ***movimento*** dei pezzi è dove nasce il problema a margine: infatti, anziché il dado, vengono tirati *quattro* **bastoncini**, bianchi e lisci da una parte e neri e arrotondati dall'altra[13]: il punteggio che fate, lanciandoli, è dato dal numero di "bianchi", ma se fate tutti neri avete fatto 5. Nulla ci è detto sulle proporzione dei bastoncini, ma la frase "se il bastoncino sta in piedi, conta come nero" ci fa pensare debbano essere piuttosto tozzi: e siccome l'abbiamo trovata in entrambi i regolamenti che abbiamo compulsato, la cosa non sembra essere una battuta infilata lì da uno spiritoso.

Il ***primo giocatore*** è deciso dal punteggio più alto di un lancio iniziale dei bastoncini. Questo, lancia di nuovo i bastoncini e muove uno dei propri pezzi del valore ottenuto: alla prima mossa, ogni giocatore mette un cavallo nella casella verde e parte.

Sin qui, è un po' meno emozionante del gioco dell'oca, ma esistono alcune regole particolari.

Se avete dei pezzi ancora "fuori gioco", potete decidere voi quando metterli in campo.

Se finite esattamente su una casella blu, potete prendere la "scorciatoia" passando per il centro *[Sono convinto che la casella blu centrale rivesta lo stesso ruolo: potete "girare" solo se ci finite esattamente sopra, altrimenti andate dritto; entrambi i testi tacciono su questo particolare].*

Se finite esattamente su una casella occupata da un pezzo avversario, lo ***catturate*** e lo rendete al proprietario, che dovrà rimetterlo in gioco.

Se finite esattamente su una casella occupata da un pezzo vostro o del vostro compagno, quei due pezzi da quel momento procedono assieme *[Nessuna delle nostre fonti ci dice come comportarsi in caso di cattura di questi pezzi "doppi", ma mi pare una bella idea prenderli entrambi anche con un pezzo singolo].*

Se giocate a coppie, quando tocca a voi potete muovere un pezzo vostro o del vostro compagno, a scelta.

Se fate 4 o 5, prima di muovere tirate di nuovo e poi potete usare i due risultati su un pezzo solo o due pezzi diversi *[mi sento di suggerire – ma è un'idea tutta mia – che i casi anomali vadano decisi a favore del giocatore: ad esempio se con il* secondo *punteggio vado a finire su una casella blu, posso muovere il pezzo una prima volta del secondo punteggio, metterlo sulla scorciatoia e poi muoverlo del primo punteggio].*

Quando un pezzo arriva esattamente sulla casella di uscita (quella rossa) o la supera, esce dal gioco e non ci torna più; vince il primo giocatore (o la coppia) che riesce a far

[13] ...e come i più sagaci di voi avranno già intuito, è qui che nascerà il problema.

uscire tutti i suoi segnalini; gli altri giocatori non arrivano secondi o terzi, hanno proprio perso: nel luogo di origine, infatti, si puntano soldi e chi vince si prende tutto.

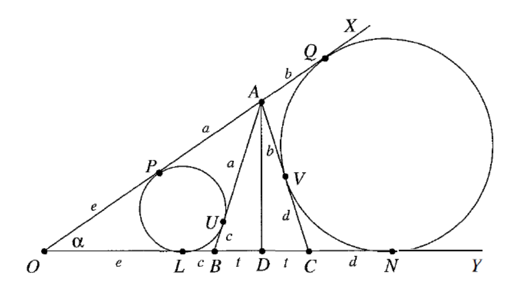
La parte che trovo interessante sono i bastoncini: piani da una parte, arrotondati (consideriamo la sezione una "mezza ellisse") dall'altra: questo varia le probabilità, rispetto all'usuale 50-50[14]? E in che modo? Mi piace, l'idea di avere un set di bastoncini "veloci" e uno di "lenti". Non solo, ma (supponendo la cosa ci interessi) oltre a variare la curvatura dei bastoncini, posso fruttare l'effetto "bastoncino dritto" per ottenere una probabilità 50-50?

Pensateci, mentre giocate: con i bastoncini "lenti", così finite che arriva l'estate.

8. Pagina 46

La situazione è riassunta nel disegno a fianco.

Supponiamo il triangolo sia stato costruito, e AD sia l'altezza del triangolo: essendo ABC isoscele, D è il punto medio di BC: siccome le due tangenti a un cerchio da un medesimo punto hanno la stessa lunghezza, si possono definire le coppie a, b, c, d ed e indicate in figura, dove abbiamo inoltre indicato le due metà di BC con t.



3 *Termini della dimostrazione.*

Sia ABC tagliato in U e in V e le parti dei suoi lati uguali siano ripiegate su OX e OY. In questo modo, il perimetro di ABC viene copiato sui segmenti PQ e LN. Essendo PQ=LN, allora la lunghezza di ciascuno di questi due segmenti è il semiperimetro s di ABC.

Ma anche AD biseca il perimetro, quindi è anche s = AC + CD. E quindi AC + CD = LN, e abbiamo:

$$b + d + t = c + 2t + d,$$

da cui

$$b = c + t = \mathrm{LD}.$$

Quindi:

$$\mathrm{AO} + \mathrm{OD} = a + e + e + b = (b + a + e) + e = \mathrm{QO} + \mathrm{OL}.$$

I punti di contatto Q e L si determinano facilmente e forniscono una semplice costruzione di un segmento di lunghezza QO + OL; essendo AO + OD = QO + OL, se un segmento di lunghezza QO + OL viene sovrapposto a XO, fissato in O e portato su OY, e quindi fatto ruotare sin quando il segmento che congiunge i punti terminali è perpendicolare a OY, allora i punti terminali si troveranno in A e D.

Dal triangolo AOD abbiamo che:

$$\mathrm{OD} / \mathrm{AO} = \cos a.$$

Quindi, per avere il punto che ruota su O, è necessario unicamente trovare il rapporto $m/n = \cos a$, cosa possibile erigendo la perpendicolare a OX per un qualsiasi punto F su OY. Da questo, è facilmente determinabile il vertice A ed il problema è risolto.

Una soluzione alternativa esteticamente molto più valida si basa sulla dimostrazione che l'altezza del triangolo ABC rispetto alla base AB è la somma dei raggi dei due cerchi. Ma non abbiamo né la dimostrazione di questo teorema né la successiva costruzione, quindi lasciamo ai lettori la gioia di ottenerle entrambe.

[14] Ci rendiamo conto che avere la probabilità "50-50" è assolutamente inutile, in questo gioco, ma supponiamo di esserci stufati e di voler fare un semplice "testa o croce".

9. Paraphernalia Mathematica

Premessa 1: in una conferenza che ci siamo ritrovati a fare recentemente io e Doc (Alice, as usual, ha *marinato*), abbiamo trattato fuggevolmente di un certo argomento. Siccome nell'altro millennio, in occasione di un problema, avevo promesso prima o poi di parlarne, da bravo incompetente del Time Management a soli sedici anni di distanza me ne sono ricordato.

Premessa 2: i disegni vengono da un articolo di cui rappresentano l'unico vero pregio (ha un paio di errori di stampa, le formule sono scritte nel modo meno chiaro possibile ed è piuttosto noioso). Se qualcuno riesce a rifarle in *GeoGebra* e scrive un aggiornamento dell'articolo, siamo pronti ad ospitare e riconoscerne la paternità.

9.1 "Taxi!"

Conosciamo intuitivamente due geometrie: quella nella quale volano le aquile, e quella nella quale guidano i taxisti

Nel momento stesso nel quale decidete di inventare una geometria non euclidea, se volete avere successo, dovete anche qui soddisfare qualche assioma. Secondo ***Krause***, i requisiti di base sono:

1. Essere molto vicina dal punto di vista assiomatico a quella euclidea
2. Avere delle applicazioni significative
3. Essere comprensibile da chiunque abbia conoscenze basiche in geometria euclidea.

Francamente, non ci pare che Riemann e Lobachevski abbiano soddisfatto appieno questi tre requisiti: e Krause, d'accordo con noi, ha deciso di sviluppare qualcosa di soddisfacente nel ramo. Ma prendiamola alla lontana.

Per avere una geometria (o meglio, uno *spazio metrico*), da qualche parte vi serve una *metrica*, ossia un concetto di *distanza*: siccome "è ovvio[15]" che la distanza è un concetto elementare noto a tutti, il farci delle domande in merito potrebbe aiutare a costruire qualcosa di nuovo.

Possiamo definire la distanza in tanti modi; i più noti, sono:

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$
$$d=max\left(|x_1-x_2|,|y_1-y_2|,|z_1-z_2|\right)$$
$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2-c(t_1-t_2)^2}\ .$$

La prima è nota come *Teorema di Pitagora*, e dà origine alla geometria euclidea; la seconda non ci risulta abbia utilizzazioni interessanti, quantomeno dal punto di vista ricreativo; la terza l'ha definita Minkowsky, si usa nella contrazione di Lorentz e Einstein è diventato famoso grazie ad essa[16].

Siccome non abbiamo intenzione di esaminare queste, che sono state (a parte la seconda, forse) ampiamente esaminate nei secoli passati, vorremo tornare al nostro luogo d'origine *[Torino: Rudy speaking, chiaramente]* e provare ad esaminare una metrica un po' speciale, definita, se ci limitiamo alle due dimensioni, come:

$$d = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$$

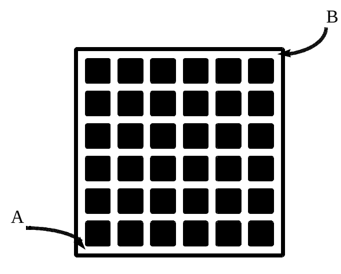
---

[15] Doooc! Sveglia!

[16] Come dovreste aver ormai capito, siamo degli appassionati dell'inseguimento delle denominazioni *sbagliate* delle formule. E Rudy insiste a chiamarle *Trasformate di Mileva* (sì, per nome).

E chiunque sia nato all'interno del Quadrilatero Torinese, sa benissimo che questo è il *modo vero* per sapere quanta strada fare se siete in via Bonelli angolo via Sant'Agostino e dovete andare in via Corte d'Appello angolo via Milano[17].

Come tutti i modelli matematici, anche qui si fanno grosse semplificazioni: le "strade" hanno larghezza zero e lunghezza infinita, i palazzi hanno larghezze e altezze "uguali" (il motivo delle virgolette sarà chiaro in seguito), insomma, una Torino[18] ideale.



4 *Numero* 15*!*

Bene, cominciamo la nostra passeggiata, andando a pescare un problema dall'archeologico numero 15 (Aprile 2000) di una Prestigiosa Rivista di Matematica Ricreativa: trovate il disegno (disegno *originale*, mica scherzi!) qui di fianco. Il problema consisteva nel contare quante strade di lunghezza 12 isolati permettevano di partire da *A* e arrivare a *B*, possibilmente generalizzando il concetto, ed esiste un metodo piuttosto grazioso per risolvere il problema.

Il guaio è che il 12 di cui sopra è la distanza minima che dovete percorrere se andate da *A* a *B*, e potete farlo in un mucchio di modi! Quindi, già ci siamo persi un concetto chiave della geometria euclidea, quello di retta come elemento definito dalla distanza minima tra due punti: qui, ne abbiamo più di uno.

Prima di tutto chiediamoci se la cosa rappresenta o no un problema, e proviamo a rispondere "No". Definiamo "retta" come *qualsiasi percorso* di lunghezza minima e proviamo ad andare avanti: si vede che già a questo livello si possono costruire interessanti problemini di matematica ricreativa. Uno carino ve lo diamo qui di seguito (e nel caso vi venisse il vago sospetto, sì, sono i licei della famiglia d'Alembert: Alberto, per motivi di trasloco, ne ha frequentati due, mentre Fred è andato allo stesso di Paola).

> *A Torino ci sono tre licei: il D'Azeglio, situato in* (–4, 3)*, il Gobetti, situato in* (2, 1)*, e l'Einstein, situato in* (–1, –6)*. Ricavate i distretti scolastici in modo tale che ogni studente possa andare al liceo più vicino a casa sua.*
>
> *Il Provveditorato agli Studi sta cercando una nuova sede e, per ovvie ragioni di simmetria, vorrebbe trovarsi in un punto equidistante dai tre licei: trovate il suo indirizzo.*
>
> *Reduci da una inaspettata crescita demografica, viene aperto un quarto liceo, il Volta, in* (2, 5)*: come cambiano i distretti scolastici? E la sede del Provveditorato?*

...e giusto per vedere le differenze, provate a uscire un attimo dalla Taxicab e tornate all'Euclidea, e risolvete gli stessi problemi... Ne abbiamo già parlato, si chiamano *Celle di Voronoi*, quindi sapete tutto.

Ora, non vorremmo pensaste che la TG sia stata sviluppata da qualche Anziano FIAT stufo di fare sempre lo stesso giro sotto i portici: in realtà esiste uno sviluppo *assiomatico*, che accenniamo qui per la gioia dei Veri Matematici.

Dati due punti $\alpha=(a_1, a_2)$ e $\beta=(b_1, b_2)$, nel piano TG R_T^2, definiamo il *Prodotto Interno Taxicab* come:

$$\langle \alpha , \beta \rangle_T = \epsilon_1 |a_1 b_1| + \epsilon_2 |a_2 b_2| \text{ , dove } \epsilon_i = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow a_i b_i > 0 \\ -1 \Leftrightarrow a_i b_i < 0 \end{cases}, i=1,2 .$$

Complicato? Ripensate al prodotto interno euclideo, e guardate come si semplificano le tavole trigonometriche...

Il PIT ci permette di definire in questo spazio una *Norma*, che vale:

[17] Non ci risulta sviluppata una geometria di questo tipo ma basata su una struttura più "milanese", formata da centri concentrici e rette radiali. Non vorremmo privarvi della gioia di svilupparla voi.

[18] "Manhattan", per gli anglofoni. E infatti un altro nome è "Manhattan Geometry".

$$\| \alpha \|_T = \sqrt{\langle \alpha , \alpha \rangle_T + 2|a_1 a_2|_T} \,,$$

e anche qui, fate il passaggio al caso euclideo.

Ogni prodotto interno definisce una metrica, ma non ogni metrica può essere definita da un prodotto interno: e la T-metrica non può essere definita dal PIT: dimostrazione disponibile su richiesta, che sono calcoli noiosetti.

Da qui, si possono ricavare le isometrie del T-spazio, e a questo punto avete una robusta base formale per far di conto[19].

In realtà, quando all'inizio abbiamo definito le metriche, ne abbiamo saltata una interessante, la *metrica di Minkowsky*:

$$d_k(A,B) = \left(|x_A - x_B| + |y_A y_B| \right)^{\frac{1}{k}} \,.$$

Che è un caso talmente generale che per k=1 definisce la nostra TG, mentre per k=2 si ottiene Euclide[20]. E quindi potreste prendere tutto, portarlo in una M-metrica e scriverci un pezzo: la Bookshelf è garantita.

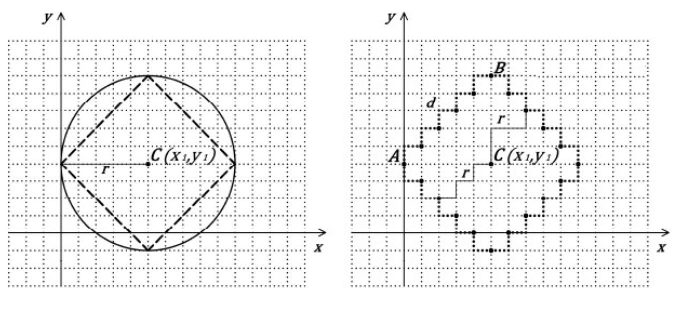
Speriamo la trattazione teorica non vi abbia fatto perdere di vista il problema, ma abbia contribuito al crescere di una domanda: "Va bene, le 'rette' sono degli oggetti strani, da queste parti. Ma le altre figure geometriche?". Diciamo che "la cosa è interessante", nel senso cinese del termine, ma prima, un piccolo passaggio teorico.

Abbiamo definito la metrica, e questa resta definita nello stesso modo per qualsiasi dimensione degli isolati, che abbiamo messo, implicitamente, sul reticolo degli interi: ma se gli isolati smettono di essere isolati? Ossia, se passiamo ai reali?

Forti della nostra definizione di metrica, continuiamo imperterriti: qui, una delle "T-rette" somiglia clamorosamente a quella di Euclide, *ma la definizione di metrica ci impone di continuare a considerarla lunga quanto le altre*. In pratica, il nostro "andare in *B*" rischia di diventare un insieme infinito di svolte, ma resta sempre della stessa lunghezza[21].

Proviamo a pensare alle figure? Visto come viene stressato il concetto di metrica, le prime figure che vengono in mente sono le *sezioni coniche*: cominciamo dalla più facile.

La *circonferenza* è definita come il luogo dei punti per cui la *distanza* da un punto dato (detto "centro") è costante: pragmaticamente, prendiamo la nostra metrica e cominciamo a disegnare il nostro cerchio: dai problemini sopra dovreste avere ormai un'idea di quello che viene fuori, e quindi ci limitiamo a un'immagine, anzi due: infatti, dobbiamo considerare *entrambi* i casi, e questo ci porta ad un altro interessante problemino:



5 *Un cerchio molto discreto (a destra) e uno no.*

Quanto vale π nelle TG[22]*?*

Carino, vero?

[19] Questi conti li hanno fatti ***Kocayusufoglu*** e ***Ozdamar***, che lavorano in due università turche: speriamo ci concedano la battuta che devono essersi ispirati al traffico di Istanbul e fatto i conti durante uno dei soliti ingorghi.

[20] E gli altri casi ve li guardate voi, *"...che nol seguiteria lingua né penna..."*.

[21] ...qualcuno *diverso da noi* potrebbe provare a considerare la parità dei percorsi nel caso discreto.

[22] Se nei due casi vi vengono due risultati diversi, avete sbagliato i conti in quella continua: ripassatevi il concetto di *distanza*!

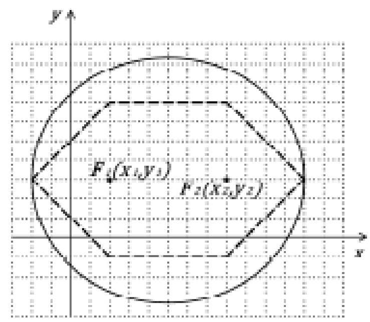
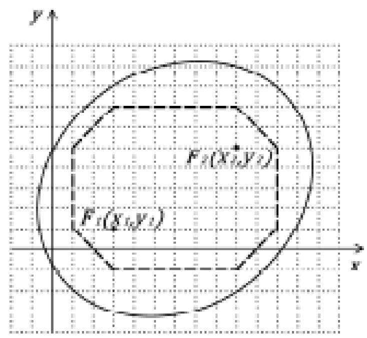
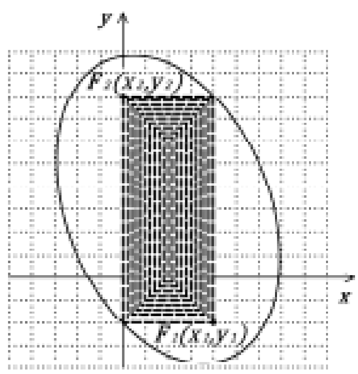
Ringalluzziti da questo primo successo, proviamo con qualcosa di più difficile: come viene fuori l'*ellisse*[23]?

Per definizione, l'ellisse è il luogo geometrico dei punti per cui la somma delle distanze da due punti fissi $F_1(x_1, y_1)$ e $F_2(x_2, y_2)$ è costante; applicare il concetto euclideo di distanza porta all'usuale formula, ma in TG è meglio esplicitare l'espressione:

$$|x - x_1| + |y - y_1| + |x - x_2| + |y - y_2| + \gamma = 0.$$

Dove i primi due termini rappresentano la T-distanza di un generico punto di coordinate (x, y) dal fuoco F_1, e i restanti termini la T-distanza del medesimo punto dal secondo fuoco; il termine γ (sempre minore o uguale a zero) rappresenta la somma delle due distanze.

...comodo, vero, un'ellisse senza potenze? Per disegnarlo, però, ci serve un altro parametro, la distanza (sempre TG) tra i due fuochi $\delta = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$: infatti, in funzione di questi due parametri[24], la nostra ellisse cambia comportamento. Nelle figure che seguono, in linea continua l'ellisse in geometria euclidea, in tratteggiato quella equivalente secondo il tassista.

<table>
<tr><td>Se $-\gamma > \delta$ e se $x_1 = x_2$ o $y_1 = y_2$, l'ellisse è rappresentata da un esagono.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Se $-\gamma > \delta$ e se $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$, l'ellisse è rappresentata da un ottagono.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Il caso particolare $-\gamma = \delta$, l'ellisse diventa una zona rettangolare con i fuochi agli estremi di una diagonale.</td><td>
</td></tr>
</table>

[23] Che, per tornare sempre ai primi numeri di RM, grazie al nostro Esperto in Sesso Ellittico sappiamo essere femminile. E ne approfittiamo per fargli gli auguri. Se ringrazia, vuol dire che ha letto almeno sin qui.

[24] No, non ne manca una. La *somma* delle distanze da due punti non può essere *minore* della distanza tra i due punti, neanche se il tassista si è fumato roba strana.

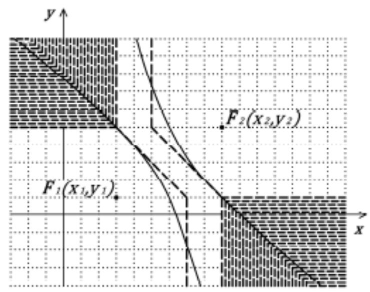
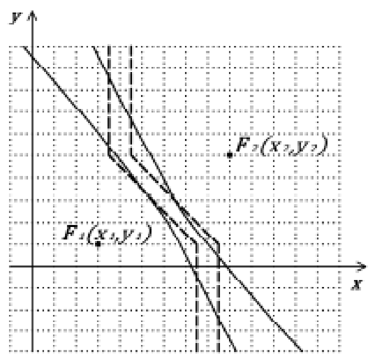
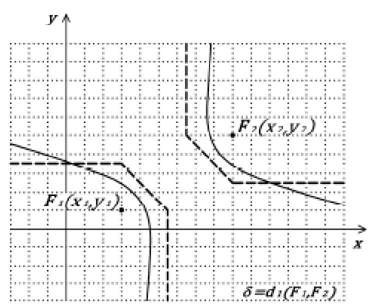
Ammettiamo che l'ultimo caso sia piuttosto deludente (...*ma anche no*...), ma i primi due, con il cambio del numero dei lati se cambia l'inclinazione dell'ellisse, sono una sorpresa interessante. Non solo, ma il calcolo dell'area diventa molto più semplice.

Bene, esplorate, noi andiamo avanti: tocca all'*iperbole*?

L'iperbole è definita come il luogo dei punti per cui la *differenza* delle distanze da due punti fissi $F_1(x_1, y_1)$ e $F_2(x_2, y_2)$ è costante, quindi, la sua equazione diventa:

$$(|x - x_1| + |y - y_1|) - (|x - x_2| + |y - y_2|) \mp \gamma = 0.$$

E anche qui, oltre a γ, ci serve il parametro distanza tra i fuochi $\delta = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$: anche qui, in continuo Euclide, in tratteggiato il Guido.

Per $-\gamma = \pm (x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)$, l'iperbole è rappresentata da due regioni con "code": ogni coda è formata da un segmento e da una semiretta verticale o orizzontale.	
Se $-\gamma < \delta$ e $-\gamma < \lvert(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)\rvert$, l'iperbole degenera in due T-rette parallele.	
Nel caso $\lvert(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)\rvert < -\gamma < \delta$, l'iperbole (propria, in questo caso) risulta formata da due rami, ciascuno dei quali formato da un segmento diagonale, una semiretta verticale e una orizzontale.	

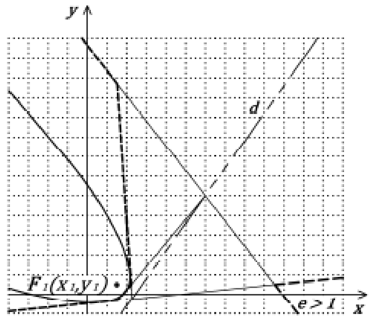
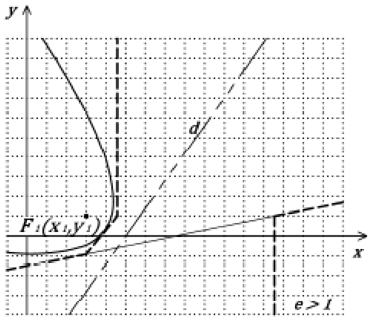
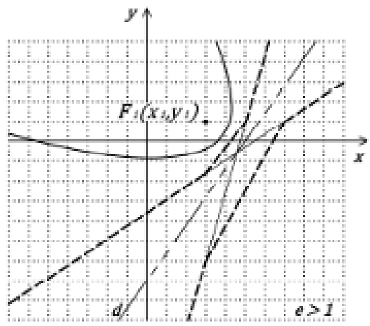
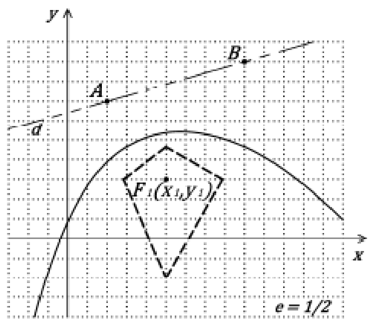
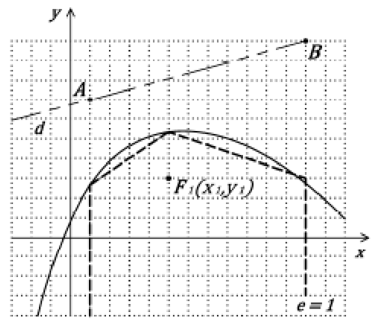
Siccome questo pezzo sta diventando troppo lungo, diamo per scontato un concetto che non lo è affatto, in TG: quello di *distanza di un punto da una retta*. Infatti, se vogliamo affrontare la parabola, questo concetto ci è necessario.

La *parabola* è definita come il luogo dei punti equidistanti da un punto fisso $F_1(x_1, y_1)$ detto fuoco e da una retta d: $ax + by + c = 0$, detta direttrice.

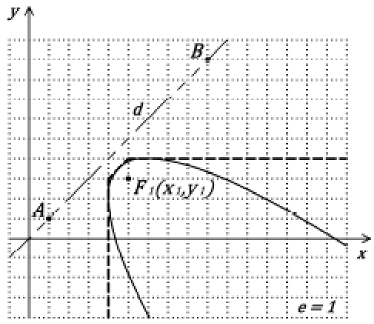
L'equazione, tutt'altro che ovvia, diventa:

$$|x - x_1| - |y - y_1| - e\frac{|ax+by+c|}{max(|a|,|b|)}.$$

E qui, il parametro con il quale dobbiamo fare i conti è e:

Se $1 < e < \|-a/b\|$, la parabola è formata da due rami.	
Se $1 < e = \|-a/b\|$, la parabola è formata da due rami.	
Se $1 < \|-a/b\| < e$, la parabola è formata da due rami.	
Se $0 < e < 1$, la parabola diventa un quadrilatero con le diagonali orizzontale e verticale passanti per il fuoco.	
Se $e = 1$ e $\|-a/b\| \neq 1$, la parabola è formata da due segmenti e due semirette verticali.	

Se e = 1 e $|-a/b|$ = 1, la parabola è formata da due segmenti, da una semiretta orizzontale e da una verticale.



Finito? Noi sì, ma ci sarebbe ancora molto da esplorare: ad esempio, il campo delle *ellissi trifocali*, figure per le quali è costante la somma delle distanze da *tre* punti[25].

Se avete capito tutto, siete autorizzati a prendere posizione nella diatriba tra i taxisti e Über.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[25] Di queste non trattiamo anche perché non riusciremo mai a trovare in italiano un nome simpatico come quello inglese: *egglipse*, secondo noi, è una meraviglia.