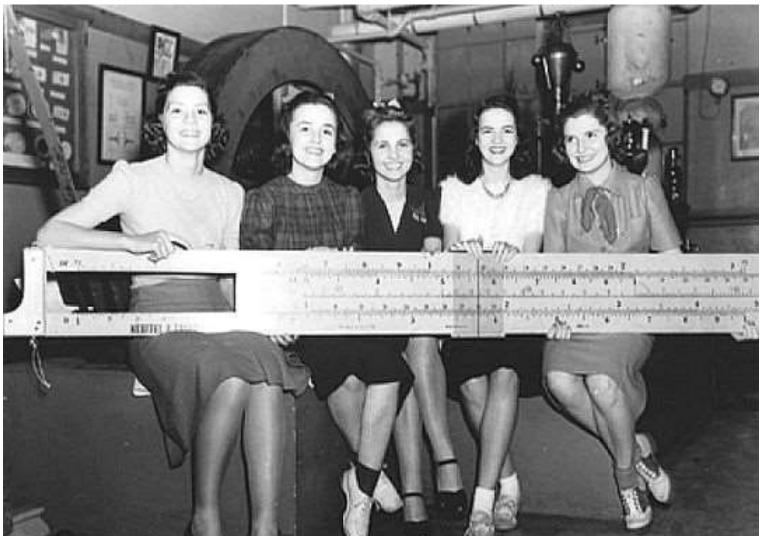
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 305 – Giugno 2024 – Anno Ventiseiesimo



1. Come Dumas (I) – Blaise Pascal ... 3

2. Problemi ... 10

2.1 Divide et Impera ... 10
2.2 Oltre il giardino ... 10

3. Bungee Jumpers ... 10

4. Soluzioni e Note ... 11

4.1 [303] ... 11
4.1.1 Un problema per Nero Wolfe ... 11
4.2 [304] ... 11
4.2.1 Ping, pong, pang, pong, ping, pang... and so on. ... 11
4.2.2 Crack The Net! ... 15
4.2.3 PM: Giocando a scacchi su un toro ... 19

5. Quick & Dirty ... 21

6. Pagina 46 ... 21

7. Paraphernalia Mathematica ... 23

7.1 Onda su onda... ... 23

Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM300 ha diffuso 3'389 copie e il 28/01/2024 per Google eravamo in 11'900 pagine.

Tutti noi da giovani abbiamo genericamente sognato di fare l'astronauta: nel tempo, questo sogno o viene abbandonato o si affina. Nella prima immagine vedete come, nel tempo, Rudy abbia propeso per la seconda ipotesi, arrivando (v. seconda immagine) anche a selezionare parte dell'equipaggio. La seconda immagine in realtà rappresenta le finaliste ad un concorso di Miss Regolo Calcolatore (Sì, negli anni '50 esistevano cose del genere). Entrambe le immagini provengono dal sito www.nicolamarras.it (Sezione Calcolatoria – Storia dei regoli calcolatori).

1. Come Dumas (I) – Blaise Pascal

Quando eravamo molto, molto giovani – ancora minorenni, a dire la verità – eravamo diligentemente attratti dai grandi classici d'avventura, come "I Tre Moschettieri" di Alexandre Dumas (padre). Da adolescenti, l'entusiasmo acceso da qualche film o sceneggiato ci indusse a passare alla lettura del libro, e la prima sconvolgente rivelazione fu che tutta l'affascinante storia raccontata dai film si fermava a forse un quarto delle pagine del volume, che invece continuava imperterrito a raccontar vicende anche dopo che l'onore della regina Anna era stato salvato da D'Artagnan e compagni. Lo stupore crebbe quando scoprimmo poi che il volume non chiudeva neppure la storia, perché non era che il primo di una trilogia; ma il colpo di grazia che arrivò sulle teste di noi poveri quattordicenni fu lo scoprire che il secondo volume si intitolava "Vent'anni dopo". Com'era possibile una cosa del genere? Vent'anni sono un'eternità, i protagonisti saranno belli e defunti, o vecchi bacucchi, del tutto incapaci di sventagliare un fioretto o caricare un moschetto, perdindirindina!

In effetti, vent'anni non sono uno scherzo, anche se, senza gli occhi di un ragazzino, hanno tutto un altro (e spaventoso) aspetto. Ad esempio, ci fa abbastanza impressione registrare che i "compleanni di RM" siano comparsi su queste pagine più di vent'anni fa, nel 2003. Noi cerchiamo sempre di trovare matematici nuovi da raccontare, e in effetti non è poi così difficile trovarne: i matematici si nascondono nelle pieghe delle cronache, ma se uno li cerca ne trova sempre, tra le pieghe della storia. Però anche presupporre che tutti i lettori abbiano già letto tutti i compleanni precedenti è un po' presuntuoso, così abbiamo deciso che, in casi di emergenza, quando il grande ritardo incombe e si sta preparando a trasformarsi da grande a gigantesco, da gigantesco ad abominevole, e così via, forse si potrebbe tirar fuori una replica.

Così, quando il tempo si mostra tiranno (come, ad esempio, sta facendo in quest'incipiente estate del 2024) potremmo usare questo mediocre artificio: trasformeremo l'idea di Dumas in una segnalazione, e se troverete un compleanno che si intitola "Come Dumas (xxx)" sappiate che si tratta di un articolo uscito almeno vent'anni prima, anche se nel mese appropriato. Magari con qualche correzione di strafalcioni, magari con qualche osservazione aggiunta con il senno di poi, magari con qualche cosa di cui vergognarci che paleseremo, ma sostanzialmente una replica.

Ad esempio, quello che segue è il compleanno, appena un po' rivisto, che nel giugno del 2003 dedicammo a Blaise Pascal, sotto il titolo "I lati di Dio". Ovviamente, se vi piacciono le ricerche filologiche, l'originalissimo potrete trovarlo qui:

http://www.rudimathematici.com/archivio/053.pdf#page=1

Da qualche parte del Midwest americano, in anni neanche troppo remoti dell'appena[1] trascorso Novecento, si verificò una strana convivenza tra il Darwinismo e il Creazionismo. Per quanto le due teorie sull'origine dell'uomo possano sembrare inconciliabili, erano le stesse persone che se ne facevano portavoce: alternavano dotte lezioni in cui si esponevano le idee del barbuto inglese che trascorse mezza vita a bordo della Beagle, ad accalorate difese dei versetti della Bibbia.

Quello che cambiava non erano i docenti, ma l'uditorio. Gli studi di Darwin sull'evoluzione venivano riservati alla popolazione nera, mentre la visione della Genesi era riservata alla sola popolazione bianca. Bisogna riconoscere agli autori della pensata una ottima capacità di adattamento, oltre che una stupefacente crudeltà mentale: se un filosofo inglese sostiene che l'uomo discende dalle scimmie, intende riferirsi solo a quegli umani di rango inferiore

[1] Ecco, tanto per cominciare subito: anche se si parla di secoli, quell' "appena", oggi, non l'avremmo mica scritto. Per quanto riguarda il resto di questo paragrafo iniziale, però, non sembra che sia passato un ventennio, nevvero?

per i quali una tale ipotesi è tollerabile; non certo ai bianchi, che sono ovviamente fatti ad immagine dell'Onnipotente[2].

Per quanto orripilante, l'aneddoto non dovrebbe stupire troppo. La teoria dell'evoluzione ha sempre avuto vita difficile negli USA (e non solo negli USA); si è dovuto attendere la metà degli anni Sessanta perché il Tennessee decidesse che essere darwiniani non è reato. D'altro canto, è invece abbastanza recente, sempre negli USA, la reintroduzione del Creazionismo come materia di studio nelle scuole, con pari dignità rispetto alla Teoria dell'Evoluzione.

Ma il duello tra scienza e religione, tra fede e ragione, è vecchio quasi quanto l'uomo. Non sempre le due contendenti sono sembrate inconciliabili; nei primi anni del dodicesimo secolo Abelardo si scontrò con Bernardo di Chiaravalle, in difesa della ragione come alleata della fede. Fu sconfitto, ma da quello scontro nacque il maggior tentativo della chiesa cattolica di "riconciliare" la filosofia (e la filosofia naturale) con la teologia, grazie all'opera di Tommaso d'Aquino.

Il tomismo aristotelico bastò però solo per qualche secolo, poi Fede e Ragione ripresero la battaglia. A ben vedere, bisognerebbe prima di tutto cercare di capire perché siano così spesso in contrasto. Entrambe hanno come proposito istituzionale quello di spiegare alcuni interrogativi fondamentali; entrambe si interrogano sulla natura dell'Universo e dell'Uomo[3]; per l'indagine scientifica, questo è l'obiettivo primario, per la religione invece coesiste con altri moventi (etici, metafisici, sociali), ma è comunque un campo d'indagine fondamentale anche per essa. E i contrasti ritornano inevitabili.

La differenza di metodo di indagine è radicale, e porta rapidamente all'incomunicabilità. La religione[4] si basa sul concetto di rivelazione, la scienza sul metodo scientifico di deduzione/induzione e verifica sperimentale. Dopo qualche schermaglia dialettica, è inevitabile ritrovarsi in una impasse: con i suoi metodi di indagine, lo scienziato agnostico continua a non vedere alcuna evidenza di un Creatore, mentre il teologo credente non è convinto da alcuna prova scientifica perché, in ultima analisi, Dio avrebbe potuto benissimo creare l'intero Universo dieci minuti fa, esattamente così com'è, con tanto di "evidenze scientifiche" che raccontano storie diverse, se avesse avuto l'imperscrutabile voglia di farlo.

Un po' più drammatico è il confronto quando i partigiani della Fede interpretano in modo letterale le Scritture, e contrappongono precisi elementi di dottrina ad altrettanto precisi elementi di teoria scientifica. E i toni del dramma salgono quando questi detengono anche il potere politico. Galileo va sotto processo per il suo appoggio ad un polacco che ha spostato la Terra dal centro dell'Universo, Darwin viene assimilato al diavolo per aver negato l'origine speciale dell'uomo rispetto agli altri animali del creato. Come spesso succede nelle grandi tragedie, c'è sempre un aspetto ironico: la cosmologia non si è fermata dopo Copernico, e dopo la Terra ha spostato dal centro dell'universo anche il Sole, e poi anche la Via Lattea; ma nel far questo ha reso la nostra coscienza del creato assai più sofisticata. La visione dell'universo di un inquisitore del Seicento era infinitamente più misera e riduttiva di quella che possono avere adesso un credente o un agnostico del Duemila. Il

[2] [*Edit 2024: tutta questa nota andrebbe rimossa, ovviamente. La lasciamo solo per ricordare quella che era una delle nostre trasmissioni radiofoniche preferite e anche Giorello, che ci ha lasciato quattro anni fa*] – L'audience delle trasmissioni radiofoniche è più o meno complementare a quella delle televisive, e le trasmissioni TV più seguite sono i telegiornali della sera. Forse è per questo che la radio di stato riserva ad alcune delle sue rubriche migliori la fascia oraria che va dalle 20.00 alle 20.30: l'aneddoto citato proviene appunto da una trasmissione radiofonica chiamata "*Alle Otto della Sera*", che (al momento in cui scriviamo) parla della storia della scoperta del DNA tramite la voce di Giulio Giorello, forse il maggiore degli epistemologi italiani.

[3] [*Edit 2024: è curioso, ma prima di scrivere quel "dell'Uomo", oggi forse ci penseremmo due volte: probabilmente lo sostituiremmo con "Umanità", anche se ci sembra che in questo caso il riferimento alla specie (e non solo alla metà maschile) sia abbastanza chiaro. E, sempre tutto sommato, questo ci pare un buon segno*].

[4] Parlare di "religione" in senso lato, senza specificare di "quale" religione, è ovviamente rischioso, oltre che impreciso. L'intenzione è quella di parlarne in generale, cercando di enunciare solo caratteristiche comuni di approccio alla filosofia naturale da parte delle maggiori religioni, ma non è detto che questo protegga da errori marchiani. Senza contare che, per gli europei, l'interferenza che fa tendere a identificare la religione con il Cristianesimo è inevitabile, e per gli italiani vale anche l'interferenza specifica del Cattolicesimo.

firmamento intero era poco più che lo spazio impacchettato da un telo nero punteggiato di lucine attorno alla Terra, abitato da una mezza dozzina di pianeti, anche questi immaginati come piccole luci erranti. Rigido e quasi statico, faceva della sua immutabilità la propria grandezza, al punto che una piccola cometa o una nuova stella erano viste come segno di infinita sventura. E l'uomo era solo polvere e fango, seppure animato dalla scintilla di Dio.

Adesso, credenti e non credenti devono fare i conti con un cosmo di dimensioni inimmaginabili, con una dinamica continua di eventi e rivoluzioni, con stelle di quasi infinite forme e dimensioni, galassie e ammassi di galassie in corsa sempre accelerata l'una lontano dall'altra, e con mostri inspiegabili come i buchi neri, e con misteri antichissimi come i quasar[5]. Allo stesso tempo, la biologia ha mostrato livelli di complicazione profondissimi nei meccanismi della vita, artifici biochimici e complessità ancora ben lontane dall'essere avvicinate dall'opera dell'uomo[6], livelli di organizzazione ai limiti del possibile e in gran parte ancora ignoti.

Quando crede in Dio, uno scienziato in genere non crede in un ente che regolamenta e governa ogni aspetto della vita umana ma, affascinato dall'estrema meraviglia che l'universo gli procura, decide di credere che tale meraviglia sia un atto di volontà di Qualcuno[7]. Ma anche quando uno scienziato si dichiara agnostico, lo fa avendo una visione del mondo estremamente più meravigliata e stupita di quella che poteva avere un cistercense del medioevo[8]. Non vede la necessità di un creatore, ma la sua meraviglia non è per questo minore.

È quindi strano e ironico che, pur non credendo, uomini che mostrano quanto è complesso e grande e meraviglioso il creato siano a volte perseguitati da coloro che nel sommo fattore credono; paradossale che persone che credono che la scintilla divina possa abitare il mucchio di fango e sabbia che era Adamo prima del soffio divino, e non invece quella meraviglia assoluta che la biologia molecolare ci mostra essere ogni essere vivente. E se infine si scoprisse, con rigoroso metodo scientifico, che il "vivente" discende dalla materia "non vivente", non sarebbe questa una meraviglia ancora maggiore?

Eppure, gli scontri ci sono sempre stati, ed è facile prevedere che continueranno ad esserci. La fisica è scesa in lotta da tempo, la biologia lo fa ormai da più di un secolo. Gli scienziati continuano ad essere chiamati a confrontare sulla base delle Scritture le loro teorie, non appena queste superano il livello di notorietà degli addetti ai lavori, e in qualche caso sarebbero ancora messi volentieri a morte da qualche fondamentalista che li giudica blasfemi e pericolosi.

La matematica, come al solito, viaggia in un suo limbo particolare.

Non i matematici, che sono uomini e da uomini si comportano[9], ma la matematica continua il suo percorso senza essere chiamata a pronunciamenti. Certo, Laplace era un matematico, e l'episodio più noto che lo riguarda sembra schierare la matematica come scienza atea. Quando presentò il suo "Trattato di Meccanica Celeste" a Napoleone, questi gli disse: "*Avete scritto questo gran libro sul sistema del mondo senza menzionare una sola volta l'autore dell'universo*". E Laplace rispose con la sua frase più famosa: "*Cittadino Primo Console, era*

[5] [*Edit 2024 – Uhm… forse un po' troppo carica quest'espressione "mostri inspiegabili come i buchi neri, e con misteri antichissimi come i quasar", nevvero? O forse è solo vent'anni fa l'universo sembrava davvero un po' diverso?*]

[6] [*Edit 2024 – Di nuovo questo "uomo"… mah, speriamo che l'intento si capisca. La necessità di un'evoluzione nei termini di identità di genere è cambiata parecchio, in vent'anni, mi sa*].

[7] [*Edit 2024 – Anche questo artificio di usare "qualcuno" con la maiuscola, mah…*]

[8] [*Edit 2024: lo diciamo solo qui, ma tenetelo presente per tutto il pezzo, e anche per quelli a venire: non avete idea di quante maiuscole abbiamo già minuscolizzato. E sì, lo sappiamo che ne sono indebitamente sopravvissute ancora un sacco.*]

[9] [*Edit 2024: ancora, e duplicato! E in una maniera meno innocente di come suonerebbe un'espressione del tipo "E Dio creò l'Uomo…". Cominciamo ad avere serissimi dubbi sull'opportunità di questa idea di riproporre testi vecchi di vent'anni: un po' per la prosa un po' troppo aulica (tutta la pagina precedente trasuda di superlativi e espressioni troppo cariche), un po' perché se dovessimo incontrare persone sensibili alla lingua come Vera Gheno ci incenerirebbero con lo sguardo, e avrebbero tutte le ragioni del mondo nel farlo.*]

un'ipotesi non necessaria"[10]. Questo è bastato a far passare Laplace per un senzadio, con tutte le connotazioni negative che questo ancora comporta. Laplace era davvero un senzadio, ma ciò non toglie l'aura di paradosso da tutto l'episodio: lo scienziato che afferma di non aver avuto bisogno di ipotesi trascendenti per scrivere un trattato di meccanica celeste passa per essere abietto, e il tizio che immaginava Dio come qualcuno preoccupato soprattutto di dargli la corona da Imperatore, cosicché potesse poi con il divino lasciapassare insanguinare tutta l'Europa con un centinaio di battaglie, passa per uomo pio.

D'altro canto, l'episodio complementare può essere quello che vede Einstein sentenziare "*Dio non gioca a dadi*[11]", quando gli viene proposta l'interpretazione probabilistica della Meccanica Quantistica; ma questa era l'espressione di una profonda convinzione personale più che una affermazione scientifica. Al punto che, a tutt'oggi, l'interpretazione probabilistica della MQ non è ancora stata messa in seria crisi.

Ma entrambi i casi coinvolgono matematici che trattano fisica, non la matematica stessa. E non sono affatto pochi i matematici che trovavano comunque opportuno essere credenti: tra questi, non c'è dubbio che il più devoto sia stato Blaise Pascal.


1 *Blaise Pascal.*

Pascal nacque trecentottanta[12] anni fa, il 19 Giugno 1623, in quella che al tempo si chiamava Clermont e adesso si chiama Clermont-Ferrand[13], e suo padre gli proibì la matematica fino all'età di quindici anni. Etienne Pascal non era un vero e proprio matematico, ma era un po' più che un dilettante: frequentava Mersenne[14], e arrivò a scoprire anche una curva utile per la trisezione dell'angolo. In matematica aveva dunque le idee chiare, e non riteneva opportuno che la scienza dei numeri invadesse menti troppo giovani, e rimosse ogni libro di matematica dalla casa dove viveva insieme a Blaise. Fu costretto a cambiare idea, però, visto che verso i dodici anni il giovane Blaise cominciò a pensare da solo alla geometria, fino a dimostrare che la somma degli angoli interni di un triangolo equivale a due angoli retti. A quel punto il genitore gli procurò una copia degli "Elementi" di Euclide.

Dopo i primi approcci con la geometria proiettiva e un trattatello sulle coniche, a soli diciannove anni Pascal si cimenta nell'opera che lo renderà, trecentocinquanta anni dopo, famoso tra i cultori della computer-science. Il vero lavoro di papà Etienne consisteva nel riscuotere le tasse, e i problemi contabili erano ragguardevoli; Blaise ebbe l'idea che i conti aritmetici potessero essere meccanizzati, e si cimentò nella costruzione di una macchina calcolatrice. Per quell'epoca (correva l'anno 1642) già solo l'idea di uno strumento meccanico per eseguire i conti doveva essere arditissima: e se adesso, nel Duemila che semina

[10] Meno noto il seguito della storia: Napoleone raccontò l'episodio al vecchio Lagrange, che sospirò: "*Ah, ma che bella ipotesi sarebbe! Spiega un sacco di cose...*"

[11] La religiosità di Einstein, per quanto lontana dall'ebraismo ortodosso, si ritrova in moltissime sue citazioni. Molto esplicita la sua "*La scienza senza la religione è zoppa, la religione senza la scienza è cieca*". La nostra preferita sul tema rimane comunque "*Dio non si preoccupa delle difficoltà matematiche. Lui integra empiricamente*".

[12] [*Edit 2024: i trecentottanta sono già diventati quattrocentouno, nel frattempo. Piuttosto, ci è sfuggito qualcosa o non ci sono state troppe celebrazioni in occasione del 400° anniversario della nascita?*]

[13] Clermont era la città vescovile, Montferrand la città dei conti d'Alvernia. Solo nell'avanzato diciassettesimo secolo le due città si sono unite. Forse, il fatto che la parola "mont" fosse ad un tempo la fine del primo e il principio del secondo nome ha risolto facilmente il dubbio su come chiamare la novella città.

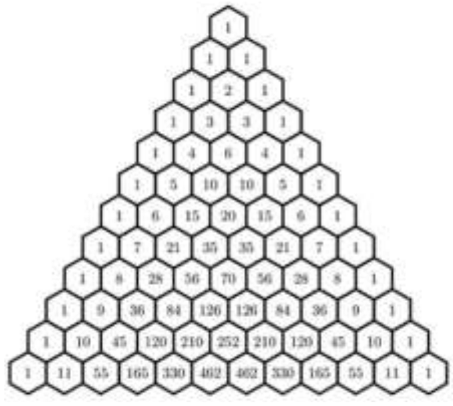
[14] Proprio Marin Mersenne, gran cacciatore di primi, quello che ha dato il nome ai numeri del tipo 2^p-1, con p primo.

microchip anche nelle etichette dei pomodori pelati, la cosa può sembrare meno fenomenale, ricordiamoci che il sistema decimale non era ancora in voga, ai tempi di Pascal.

La "*Pascaline*", compiva addizioni e (impostando il "complemento a 9") sottrazioni. Con particolari artifici riusciva anche ad eseguire moltiplicazioni e divisioni: ma era uno strumento contabile, e le quantità che doveva sommare erano lire. E ogni lira era divisa in 20 soldi. E ogni soldo era diviso in 12 denari: le difficoltà maggiori di Pascal dipendevano da questa fantasiosa ripartizione delle unità monetarie. Ma vennero superate, e adesso la Pascaline è una tappa obbligata in tutti i testi di storia dei calcolatori, e Pascal è più noto come linguaggio di programmazione che come cognome di un pensatore francese del XVII secolo[15].

La Pascaline non fu un successo commerciale, comunque, e non fu neanche un primato assoluto, visto che già nel 1623 Wilhelm Schickard realizzò un calcolatore meccanico che ebbe Keplero tra i propri entusiasti utilizzatori.

E non fu neanche un primato l'altra cosa per cui il nome di Pascal è noto tra gli amanti della matematica: il triangolo di Pascal. A dire il vero, Pascal non lo rappresentava come in figura: egli lo preferiva nella forma a triangolo rettangolo, con un cateto composto da soli "1" e poi, via via sfalsata, la serie dei naturali (che nella figura è riprodotta nelle diagonali subito sotto le serie esterne degli uno), quella dei numeri triangolari, e così via. Ma in quasi tutti i libri di testo campeggia la scritta "Triangolo di Pascal" sopra il disegno d'un triangolo numerico isoscele, come quello della figura.



2 *Il triangolo di Pascal.*

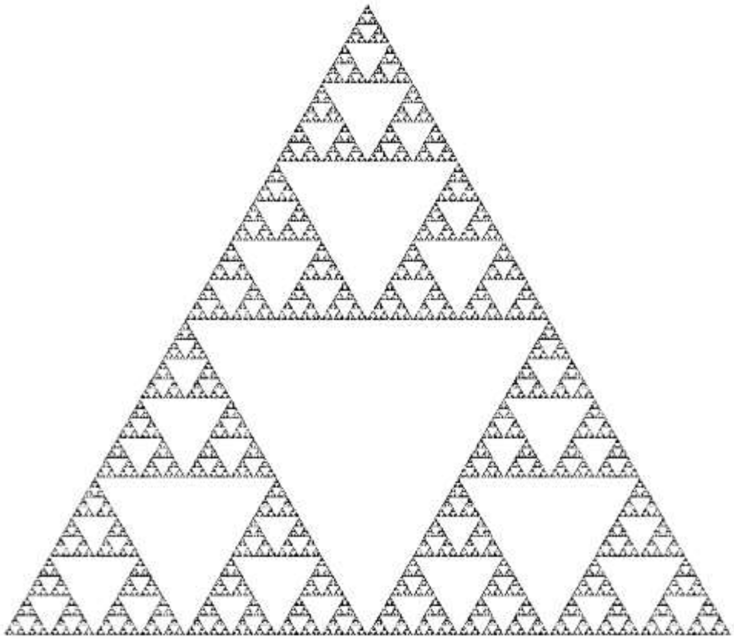
In quasi tutti i libri, non in tutti. In quelli italiani, per esempio, la figura è la stessa, ma il nome del triangolo è diverso, visto che è quasi sempre chiamato patriotticamente "Triangolo di Tartaglia". A onor del vero, Niccolò Fontana detto il Tartaglia, bresciano, venne al mondo cinque quarti di secolo prima di Pascal, e si interessò del triangolo numerico: la priorità sembrerebbe spettargli di diritto, ma il fatto è che il Triangolo precede anche lo stesso Tartaglia. Si trovano eleganti rappresentazioni del triangolo numerico già nel 1303, nell'opera del cinese Chu Shih Chieh, e l'orientale non lo presenta neppure come una scoperta originale.

Quel che è certo è che il triangolo affascinò Pascal così tanto che vi dedicò un intero libro, il "Trattato sul Triangolo Aritmetico": e un libro non è davvero troppo, per esplorare i segreti del magico triangolo. Di solito, viene introdotto nelle scuole per mostrare come si generino i coefficienti delle potenze dei binomi (lettura diretta delle "righe" orizzontali), ma nel triangolo sono nascoste infinite altre regolarità.

Si è già accennato ai naturali, seconda diagonale (o seconda colonna, nella rappresentazione a triangolo rettangolo di Pascal): ad essa seguono i numeri triangolari, poi i tetraedrici, poi, più nascosti, si possono trovare tutti i numeri poligonali. La somma delle righe dà tutte le potenze di due, mentre la serie di Fibonacci giace in diagonali non immediate da vedere. Il Triangolo continua ad esercitare attrazione e interesse, rinnovato di recente quando Mandelbrot ha fatto diventare di moda i frattali. Il triangolo assume infatti una connotazione assai curiosa, ripetitiva e iterativa a più livelli, quando viene raffigurato alla maniera di Sierpinski[16]: rappresentando tutti i numeri dispari con un pallino nero e tutti i pari con uno bianco:

[15] [*Edit 2024: Chissà se vale ancora, questa affermazione.*]

[16] Waclaw Sierpinski (1882-1969), matematico polacco.



Blaise Pascal non vide l'eleganza di questa rappresentazione, perché altrimenti ne avrebbe senz'altro fatto cenno nel suo libro. Ma è immaginabile che l'avrebbe profondamente colpito, con quel suo continuo ripetersi all'infinito, con ineluttabile e sincronico aumentare della regolarità e della complessità.

Fu invece un altro triangolo a sedurre Blaise, e lo sedusse in maniera definitiva nel Novembre del 1654. Il 23 di quel mese Blaise ebbe una nuova e più forte esperienza mistica, e da quel momento in poi dedicò ogni sua forza alla religione cristiana, dimenticando quasi del tutto la matematica. Aveva solo 31 anni, anche se dire "solo" è un po' crudele, visto che non arrivò a compierne 40. Dal Triangolo Aritmetico passò a quell'altro triangolo occhiuto, che una volta si usava per rappresentare la divinità.

Il Triangolo come simbolo di Dio vale solo per i Cristiani, e solo per quei Cristiani che credono nella Trinità: sembra essere stata questa triplice essenza ad aver fatto scegliere la figura geometrica con tre lati quale imago divina. Blaise Pascal dedicò il resto della sua esistenza a scrivere di filosofia religiosa e teologia[17]. Fu in questo periodo che formulò la famosa "scommessa di Pascal[18]", per esortare gli indecisi a credere in Dio, e fu in questo periodo che scrisse i "*Pensieri*", la sua opera maggiore, che sono tuttora considerati un caposaldo della filosofia cristiana. In lui matematica e religione sembravano convivere senza alcuna tensione, anche se, alla fine, l'impeto religioso fu così forte da diventare totalizzante.

"*È il cuore a percepire Dio, non la ragione*", scrive nei suoi pensieri. E forse su questo possono concordare tutti, anche coloro che non sono certi di cosa si intenda con "cuore", e sono armati solo della vecchia ragione. Pascal era tutt'altro che imparziale, nel duello tra fede e ragione: ogni sua frase celebre gronda di fede, anche se si capisce che è scritta da chi conosce i frequentatori della pura razionalità. Le poche sue frasi che non chiamano in causa la religione sono quasi sempre spietate, e difficilmente contestabili: "*Pochi uomini parlano umilmente di umiltà, castamente di castità, scetticamente di scetticismo*"; oppure "*La contraddizione non è segno di falsità, e la mancanza di contraddizione non è segno di verità*".

Ma la frase di Pascal che ci sembra più significativa, forse perché abbastanza onesta da mostrare le sue debolezze, è un'altra: "*La perfetta chiarezza aiuta l'intelligenza, ma*

[17] Ebbe un breve ritorno di fiamma per la matematica nel 1658, ma senza che questa la distraesse troppo dalla sua attenzione per la religione.

[18] Ne parlammo anche nella celebrazione di Hardy & Littlewood, "Stanlio e Ollio", RM049, Febbraio 2003.

danneggia la volontà". Con questo, Pascal forse voleva sancire la superiorità della volontà (e quindi della fede) sull'intelligenza (e quindi sulla ragione); ma non è una frase che possa dispiacere anche ai simpatizzanti del puro raziocinio.

Blaise Pascal era devoto alla fede senza essere per questo un persecutore della ragione. C'è da aspettarsi, da uno come lui, che la sua simpatia vada più facilmente verso un agnostico che sospende il giudizio finale sull'esistenza di Dio perché davvero incerto di fronte all'enormità dell'universo, piuttosto che ai signori di cui parlavamo all'inizio, che riservavano la loro proclamata fede solo a coloro che hanno la pelle del loro stesso colore.

2. Problemi

Come per tutti i problemi, abbiamo delle soluzioni anche per questi due; hanno il "piccolo" problema che sono bruttissime! Riuscite a fare qualcosa in merito?

2.1 Divide et Impera

Con l'avvicinarsi dell'estate (o di Mezza Estate, se siete degli scespiriani duri e puri), qui siamo alla ricerca di giochi per allietare le giornate in spiaggia (ne parleremo verso la fine dell'estate, logicamente: siamo o non siamo sempre in ritardo?). Il guaio di ricerche del genere è che si trovano un mucchio di giochi che *non* vanno bene, ma hanno l'aria simpatica e ci si perde tempo dietro... Uno di questi, ad esempio, si chiama come da titolo di questo problema, e proprio non ci pare adatto al mare (neanche alla montagna, comunque... forse, per una giornata autunnale di pioggia insistente e snervante...); quindi, ve lo rifiliamo qui.

Rudy, in un momento di distrazione di Alice, ha tirato fuori la sua *enorme* collezione di monetine da un cent e, assieme a Doc, sta dividendo queste N monetine in M mucchietti (di dimensioni non necessariamente uguali tra loro); a questo punto, i due giocatori si alternano nel compiere un'operazione: questa operazione può essere di due tipi:

1. *Divide* richiede che un mucchietto venga diviso in due mucchietti; ognuno dei due mucchietti risultanti deve contenere almeno una monetina.
2. *Impera* sottrae una monetina da *ogni* mucchietto.

Comincia Rudy, e perde il primo che fa diminuire il numero dei mucchietti, esaurendone uno.

Adesso, la prima domanda è di riscaldamento, quindi potete ignorarla: Se ci sono 7 mucchietti di 7 monete ciascuno, Rudy ha una strategia per vincere?

La seconda domanda è una generalizzazione: se abbiamo $M \geq 1$ mucchietti composti da $n_1 \geq 1$, $n_2 \geq 1$, ..., $n_M \geq 1$ (logicamente, $n_1+n_2+...+n_M=N$) e comincia sempre Rudy, chi vince?

2.2 Oltre il giardino

Come ci pare sappiate, Rudy di recente ha avuto dei problemi agli occhi (brillantemente risolti con piena soddisfazione di tutti e quattro: Rudy, l'occhio sinistro, l'occhio destro e l'oculista). Nulla di grave, ma questi problemi hanno comportato il dover andare in giro con una benda sull'occhio (prima uno, poi l'altro) e, evidentemente, cambiare la suoneria del telefono ("*Fifteen men on the dead man's chest – YoHoHo and a bottle of rum*"). La cosa (la benda, non la suoneria), oltre a tranquillizzare notevolmente gli indigeni ("Cribbio, Rudy non guida! Tutti a fare una passeggiata!") ha causato la temporanea perdita della stereovisione e il passare le giornate a rimirare sconsolatamente il giardino ("Non sforzi l'occhio!" E come no. L'ultima volta che Rudy è stato 24 ore senza leggere era all'interno di un reparto maternità, dalla parte giusta del pannolino). Il giardino è un rettangolo, con il punto medio del lato più vicino a Rudy distante un metro da lui: ai quattro vertici del giardino ci sono quattro alberi e, data appunto la mancanza di stereovisione, sembrano tutti sulla stessa linea e equispaziati. Inoltre, Rudy si ricorda che le dimensioni del giardino sono (espresse in metri) degli interi.

Quanto è grande il giardino?

E se volete una seconda domanda, rifatevi la prima, ma lasciando cadere l'ipotesi che i lati siano degli interi e sapendo che il giardino è quadrato...

3. Bungee Jumpers

Sia $a=1/n$ il reciproco di un intero, e siano A e B due punti sul piano tali che la distanza tra A e B sia pari a 1. Provate che ogni curva continua che unisca A e B ha una corda parallela a AB di lunghezza a. Mostrate inoltre che, se a non è il reciproco di un intero, esiste una curva continua che unisce A e B che non ha una corda di questo tipo di lunghezza a.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Giugno!

In ritardo ridicolo, e tutto per colpa dell'estensore di queste note. Cerchiamo di darci da fare.

4.1 [303]

4.1.1 Un problema per Nero Wolfe

Ancora una soluzione per il problema del mese scorso:

> *L'investigazione in corso coinvolge 80 persone, tra le quali vi sono il colpevole e un testimone, entrambi ignoti. Il testimone, se convocato in assenza del colpevole, dirà tutto quello che sa; se invece il colpevole sarà presente, se ne starà zitto senza rivelare il suo ruolo. Dovete organizzare una serie di riunioni (una al giorno) durante almeno una delle quali sia presente il testimone ma non l'assassino, risolvendo il caso entro dodici giorni.*
>
> *Trovate la generalizzazione per n persone, ma sempre un colpevole e un testimone.*

In RM304 avete visto la soluzione di ***Valter***, ***Alberto R.***, ***trentatre*** e ***Alessandro***. Ci siamo però persi la soluzione di ***Marco***, che è arrivata mentre finivamo il numero e vi passiamo ora perché è diversa dalle altre:

> Il trucco sta tutto nel crederci: Archie semplicemente dichiara che ci saranno 9 incontri, uno per giorno e dice a tutti gli 80 sospettati che ognuno deve presenziare esattamente a 4 di essi, ma due persone non possono mai condividere tutti gli incontri. Il coefficiente binomiale B(9, 4) = 126 è maggiore di 80, quindi tutti i sospettati possono scegliere il loro personale sottoinsieme di incontri a cui partecipare. In generale lo stesso ragionamento funziona prendendo il minimo N tale che B(n, floor(n/2)) è maggiore dei sospettati.

Bella l'idea dei sospettati che scelgono invece di Archie. Continua così ***Marco***, le soluzioni vanno benissimo a qualsiasi mail di RM. Passiamo ora ai problemi del mese scorso.

4.2 [304]

4.2.1 Ping, pong, pang, pong, ping, pang... and so on.

Giochiamo a ping pong, ma potrebbe essere qualsiasi altra cosa:

> *Abbiamo organizzato un torneo, secondo le regole: chi vince resta in campo, chi perde esce e si mette in coda. Siamo in tre e sappiamo che Doc ha giocato* 10 *partite, Rudy ha giocato* 15 *partite, Alice ha giocato* 17 *partite. Chi ha perso la seconda partita?*

La prima soluzione è quella di ***GaS***:

> Sommando le partite di ognuno, 10+15+17=42, ricaviamo che sono state giocate un totale di 42/2=21 partite.
>
> Consideriamo prima di tutto un ipotetico giocatore che perde tutte le partite: un simile incapace globale [cit] giocherebbe una partita si ed una partita no, alternato. Nel caso in cui un simile incapace giochi la prima partita, alla fine del torneo avrebbe giocato un totale di 11 partite (la 1, la 3, la 5, …, la 21). Se invece questo "perdente" non giocasse la prima partita allora dovrebbe giocare tutte le partite pari (2, 4, 6, …, 20) per un totale di 10 partite. Notiamo inoltre che chiunque vinca almeno una partita deve obbligatoriamente giocare almeno 11 partite, se ad esempio vince solo la 2 e poi perde sempre gioca le partite 2, 3, 5, …, 21.
>
> Ma sappiamo che il buon Doc ha giocato solamente 10 partite: da quanto sopra ne segue che le ha perse tutte e che non ha giocato la prima partita. Ergo è lui il perdente della seconda partita. Di più: Doc è il perdente di tutte le partite pari. Ancora: tutte le partite dispari sono state disputate tra Alice e Rudy.

> Passiamo quindi ad Alice: treccia ha giocato tutte le partite dispari sempre contro Rudy per un totale di 11 sfide. Avendo giocato in tutto 17 partite vuol dire che Alice ha disputato anche 6 partite contro Doc, ne segue che ha vinto almeno 6 partite contro Rudy e ne ha perse almeno 4. Perché "almeno"? perché per l'ultima partita del torneo, la 21a, tra Alice e Rudy non è possibile individuare il vincitore.
>
> Riassumendo:
>
> 1. sono state giocate 6 partite tra Alice e Doc: tutte vinte da Alice
> 2. sono state giocate 4 partite tra Rudy e Doc: tutte vinte da Rudy
> 3. sono state giocate 11 partite tra Alice e Rudy: 6 vinte da Alice, 4 vinte da Rudy e una, l'ultima, di cui non conosciamo il vincitore/la vincitrice
> 4. tutte le partite pari sono state giocate e perse da Doc, 6 contro Alice e 4 contro Rudy
> 5. tutte le partite dispari sono state giocate tra Alice e Rudy (vd. punto 3)
>
> Incredibile quante informazioni si ricavano da così pochi dati.:

Vero, tantissime. ***Valter*** ha deciso di rispondere molto brevemente:

> Le partite in totale ammontano a: (17 + 15 + 10) / 2 = 21.
>
> Doc le perde tutte e la prima che gioca è la seconda partita.
>
> Alice ne vince sicuramente12, Rudy ne vince sicuramente 8 (l'esito dell'ultima partita fra loro non si ricava dai dati forniti).

Ormai è piuttosto chiaro come sia andata la seconda partita, ma è interessante vedere quanto altro i nostri solutori hanno voluto scoprire, per esempio ***Luigi***:

> La seconda partita è stata persa da Doc.
>
> I tre hanno giocato (17+15+10)/2 = 21 partite.
>
> Se le avesse vinte tutte un giocatore avremmo avuto, in termini di partite giocate, 21 11 10
>
> Da questo fatto si evince che, al minimo, un giocatore giocherà 10 o 11 partite.
>
> Avendo Doc giocato 10 partite possiamo dedurre che:
>
> a - Doc ha perso tutte le partite
>
> b- Doc non ha giocato la prima partita poiché altrimenti avrebbe giocato anche l'ultima delle 21 e avrebbe raggiunto le 11 partite disputate. Quindi ha giocato la 2a e via via tutte le partite d'ordine pari fino alla 20esima.
>
> Avendo giocato 17 partite, 4 meno del massimo, sappiamo che Alice ha perso 4 o 5 partite (vincendone 12 o 13) mentre Rudy ha perso 6 o 7 partite (vincendone 8 o 9).
>
> L'incertezza dipendendo dalla impossibilità di sapere il risultato dell'ultima partita.

Data la chiara definizione dei risultati di Doc, le soluzioni diventano sempre più premurose per il nostro grandissimo PR Tuttofare, come quella di ***Silvio***:

> Innanzitutto notiamo che i giocatori hanno giocato 42 volte, quindi si sono sfidati 21 volte.
>
> Le 21 partite si possono raggruppare in dieci coppie di partite più una singola partita aggiuntiva.
>
> Ogni coppia di partite prevede quattro partecipanti: almeno una partecipazione per Doc, Rudy e Alice, e un'ulteriore partecipazione per il vincitore del primo match.
>
> Ossia (AR-AD) (indicata brevemente con il simbolo ●) se la prima partita la vince Alice, mentre (AR-RD) (indicata brevemente con il simbolo □) se la prima partita la vince Rudy.
>
> Poiché Alice e Rudy sono quelli con più partite, ho ipotizzato che si parta da Alice vs Rudy (AR) e che Doc non vinca mai (chiedo venia per l'assunzione, che non rappresenta affatto un giudizio di merito sulle qualità tennistavolistiche di Doc).

L'ipotesi che Doc non vinca mai, permette di concatenare le coppie, visto che ogni due partite si riparte da AR.

Pertanto, posso formare una sequenza di 10 simboli (scelti tra ● e □) ed avere 20 partite, cui seguirà (a prescindere dalla sequenza e indipendentemente dall'ultimo simbolo della sequenza) un'ultima partita AR.

Se la sequenza di 10 simboli contiene sei ● (vittoria Alice) e quattro □ (vittoria Rudy), si avranno 16 partite per Alice, 14 per Rudy, e 10 per Doc (alle quali aggiungere l'ultima partita AR, che porta ai totali indicati nel problema: 17, 15, 10).

Pertanto, la risposta alla domanda "chi ha perso la seconda partita?" è Doc (che ha perso anche tutte le partite pari).

Le possibili sequenze binarie (● e □) di lunghezza 10 sono 2^10, ma a noi interessano solo quelle con esattamente 6 ●, pertanto le possibili "telecronache" si dovrebbero ridurre al coefficiente binomiale di 10 su 6, ossia 210.

Spero di aver dato la risposta giusta e, cosa più importante, di non aver offeso Doc.

Ma figuriamoci, il nostro Piotr fa sempre questa parte nei problemi di Rudy. Poi ha scritto ***Fabio***:

Ogni partita è giocata da due giocatori; essendoci tre giocatori (D, R, A) il numero totale di partite giocate sarà:

$$n=(g_D+g_R+g_A)/2 = (10+15+17)/2=21$$

In base alle regole, se un giocatore vince, sarà presente nella partita successiva, se perde sarà presente in quella di 2 turni dopo, ad es. se in una partita AR (A contro R) vince A la successiva sarà AD e chiunque vinca quest' ultima dopo sfiderà R, che quindi avrà semplicemente saltato un turno.

Se un giocatore perde tutte le partite, quindi, alternerà regolarmente presenza e assenza; essendo 21 dispari le possibilità sono che questo perdente sistematico ne giochi 11, se gioca la prima partita, o che ne giochi 10, se non gioca la prima.

Essendo g_D=10, necessariamente Doc ha perso tutte le partite e non ha giocato la prima; quindi la prima partita che Doc ha giocato è stata la seconda e, avendole perse tutte, ha perso pure quella.

Quindi in conclusione **la seconda partita è stata persa da Doc**.

Va bene, si è capito. Vi passiamo ancora il commento di ***Alessandro***:

Non vi annoio con la ricostruzione, ma ci sono due punti su cui mi sono rimasti dei dubbi:

- La durata del torneo era predeterminata a 21 partite, o Rudy si è arreso perché è andato sotto di 3 negli scontri diretti con Alice?
- Doc ha giocato con una racchetta da ping-pong o ha usato un cucchiaio di legno?

Da ***Galluto*** prendiamo solo la cronaca del torneo, visto che il resto – ormai si sa – è uguale a tutti gli altri:

I nostri campioni stabiliscono le regole; si giocheranno 21 *partite a* 11 *punti ciascuna; chi vincerà avrà diritto a decidere quanti problemi di probabilità ci saranno nei prossimi* 21 *numeri di RM.*

Si effettua il sorteggio iniziale e Doc comincia col perderlo. Vanno in campo Alice e Rudy, che vince 11 *a* 9.

Entra in gioco Doc, che prima di cominciare propone una variante: si "campisce" tutto il tavolo a caselle bianche e nere, e la pallina può toccare solo le caselle nere; la proposta viene bocciata per due voti ad uno; Rudy vince 11 *ad* 1.

Torna in campo Alice, ma Rudy vince ancora 11 *a* 9.

Rientra in gioco Doc, che prima di cominciare propone una variante: il tavolo invece che rettangolare ha la forma del suo giardino; la proposta viene bocciata per due voti ad uno; Rudy vince 11 *ad* 1.

Terzo incontro Alice-Rudy, ma ancora Rudy prevale 11 *a* 9.

*Doc ci riprova, proponendo un'altra variante: ogni punto viene giocato con una pallina diversa, le palline sembrano tutte uguali ma una è più pesante delle altre… la proposta viene bocciata (*2 *voti ad uno). Doc si impegna, ma non va oltre ad* 11 *a* 3 *per Rudy.*

Quarto incontro Alice-Rudy, e ancora 11-9 *per Rudy, che si mette il cappellino alla rovescia, sfoggia una maglietta arancione e firma le telecamere dei presenti con un pennarello.*

Doc propone che i giocatori abbiano un cappello o rosso o bianco ma non vedano il colore del proprio… gli altri due non lo lasciano neanche finire; Rudy maramaldeggia 11-0.

Punteggio a questo punto: Rudy 8*, Alice e Doc* 0.

Quinto incontro Alice-Rudy: Alice è trasformata, al pensiero di innumerevoli problemi di probabilità, e vince 11-8.

Rientra Doc che propone, se si va ai vantaggi, che la partita finisca solo ad un numero primo (dopo 11, 13*, poi* 17*, …); la proposta è accettata alla unanimità, ma la partita finisce comunque* 11-5 *per Alice (però Doc è felice perché* 5 *è un numero primo)*

Sesto incontro Alice-Rudy ma Alice è sempre più determinata (e deterministica): 11-7*!*

Doc propone, senza successo, di giocare "alla americana"; Alice vince 11-4

Settimo incontro Alice-Rudy; vince Alice 13 *ad* 11.

Doc prova a distrarre l'avversaria proponendo problemi Q&D, ma Alice non perde la concentrazione e vince 11-0 *(e risolve pure i problemi).*

Ottavo incontro Alice-Rudy; Alice rimonta da 6-9 *e vince* 11-9*!*

Doc ce la mette tutta e si inerpica fino ad 8-8*; però dal pubblico viene proposto un quiz di veritieri e bugiardi e si distrae: Alice vince* 11-8.

Scomposta ilarità del pubblico; tra i più rumorosi: Valter, Alberto R, Trentatre, Galluto, AAL (soprattutto L), GaS.

Punteggio a questo punto: Alice 8*, Rudy* 8*, Doc* 0.

Nono incontro Alice-Rudy; Rudy prova ad impugnare la racchetta "alla giapponese" ma il risultato è disastroso: Alice vince 11-4.

Doc rientra per la nona volta dichiarando "non vi meritate le mie proposte" e si batte come un leone, ma soccombe comunque 17-13.

Scoppio di entusiasmo dei VAdLdRM: si scopre che hanno giocato 100 *euro su Doc che termina a* 0 *punti ("… Doc vince una partita a ping-pong ogni morte di papa…"), e vedono vicino il risultato.*

Decimo incontro Alice-Rudy; Rudy torna alla impugnatura normale ma Alice è scatenata: 11-3 *per lei!*

E quindi Alice è arrivata ad 11 *punti ed ha vinto, ma comunque occorre giocare le due ultime partite.*

Doc entra per la decima volta e regge fino al 9-9*; però a questo punto manda due battute in rete e perde* 11-9*; esce dicendo "l'ho fatto per papa Francesco" ma non ci crede nessuno; i VAdLdRM passano all'incasso. Profondo sollievo Oltretevere.*

Ultimo incontro tra Alice e Rudy, che prova a dire: "l'ultima vale tutto"; Alice non gli risponde neanche; i due danno luogo ad una partita infinita di sorpassi e controsorpassi finché Rudy prevale 31 *a* 29*!*

Ci siamo divertiti tantissimo, grazie ***Galluto***. Come al solito ***trentatre*** ha un approccio alternativo:

Indico i tre giocatori (*Alice*, *Doc*, *Rudy*) con *A*, *D*, *R*

- in una partita si gioca in due, e il n° totale di partite è $(17+10+15)/2=21$

- le coppie di giocatori di ogni partita sono *AD*, *AR*, *DR*

- se ogni coppia gioca un n° di partite *x*, *y*, *z* poiché *A* gioca *AD* e *AR*, ecc. si ha

$$A: x+y=17$$
$$D: x+z=10$$
$$R: y+z=15$$

- da cui risolvendo

coppia	*n° partite*
AD	$x=6$
AR	$y=11$
DR	$z=4$

- per lo schema del torneo due partite successive sono giocate da coppie diverse

- questo obbliga le 11 partite di *AR* a stare nei posti 1,3,5,...21 del torneo, mentre nei restanti 10 posti stanno, in ordine qualsiasi, le 6 partite *AD* e le 4 *DR*

- il risultato si ottiene dalle prime tre partite, per cui si hanno i due casi

AR, *AD*, *AR*; la 2.a è vinta da *Alice* e persa da *Doc*

AR, *DR*, *AR*; la 2.a è vinta da *Rudy* e persa da *Doc*.

Una menzione speciale per ***Alberto R.***:

> Se Alice, Rudy e Doc hanno giocato rispettivamente 17, 15 e 10 partite, si ricava subito che ci sono state 11 partite tra Alice e Rudy, 6 partite tra Alice e Doc e 4 partite tra Rudy e Doc.
>
> Durante le 21 partite per 11 volte (quando giocavano Alice e Rudy) Doc è rimasto in panchina, ma siccome, con le regole da oratorio e con soli tre giocatori, non si sta in panchina per due turni di fila, vuol dire che Doc c'è stato sempre e solo durante le partite dispari, mentre ha giocato e ha perso tutte le partite pari (tra cui la seconda del quesito).
>
> PS rammento ai più distratti che tra 1 e 21 ci sono 11 numeri dispari e 10 pari.

E al fondo del PS c'era uno smiley, che abbiamo tolto per mantenere il tono del nostro fustigatore preferito. Adesso passiamo al secondo problema.

4.2.2 Crack The Net!

Visto che abbiamo un reticolo, possiamo considerare questo un problema geometrico? Vediamo prima il testo, e poi che cosa ne pensano i nostri lettori:

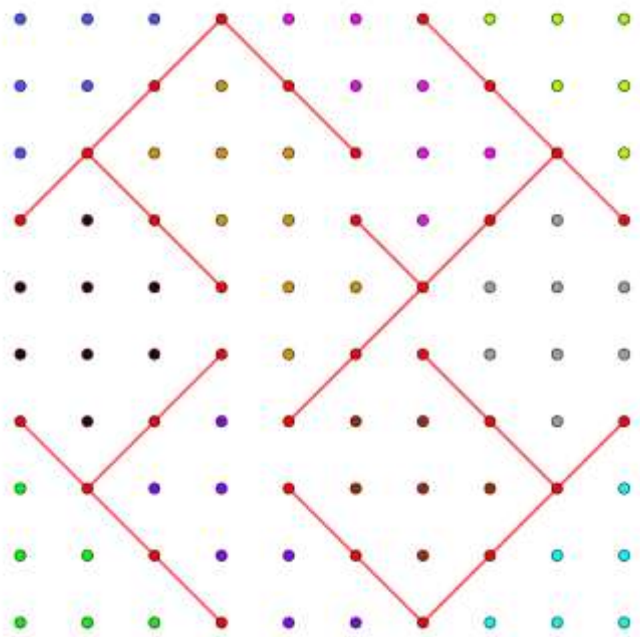
> *Siete gli Admin di una rete di 100 computer, connessi tra loro in un reticolo* 10×10*; avete appena scoperto che è arrivato un virus sulla vostra rete, ha infettato* 9 *computer, e avete anche scoperto che un computer può essere infettato se e solo se ha due computer infetti collegati direttamente con lui. Il vostro contratto di assistenza sostiene che dovete evitare l'infezione totale dei computer della rete; cosa dovete fare, per rispettare gli accordi?*

Teoria dei grafi? Con chi giochiamo per primo? Con ***Valter***, chi altri?

> Ho assunto che i computer nel reticolo 10x10 siano connessi solo in orizzontale e verticale (non si sa quali siano i computer infetti e si vuole salvarne il maggior numero possibile).
>
> Con 10 "isole" separate di computer ho la certezza che almeno una non ha computer infettati.
>
> Spengo, o sconnetto dalla rete, il minore numero di computer che mi permettano di avere ciò.
>
> Propongo due soluzioni:
>
> - nella prima sono spenti 30 computer ma ho due "isole" con soli 5 computer presenti (le "isole" sono: due da 10 computer, due da 8, quattro da 6 e, infine, due da 5)

- nella seconda sono spenti 31 computer, ma le “isole" con meno computer ne hanno 6 (le “isole” sono: una da 9 computer, due da 8, due da 7 e, infine, cinque da 6).

I computer spenti sono quelli colorati in rosso, le 10 “isole” hanno colori diversi (per evidenziare che sono separate ho disegnato segmenti che uniscono gli spenti):



La risposta “Q&D” potrebbe essere di spegnere i 50 computer sulle caselle nere (se rappresentiamo il reticolo 10x10 come una scacchiera di tali dimensioni). In questo modo salvo, almeno, 50-9=41 computer, ma tutti sconnessi tra di loro.

Io comunque rischierei una delle due soluzioni con 10 “isole”, che ho proposto:

- i computer, nelle “isole” dove non ci sono infetti, sono connessi fra di loro
- ho buone probabilità di avere più di una sola “isola”, senza computer infetti
- alcuni dei computer nelle “isole” con infetti potrebbero non venire infettati (dato che un computer è infettato "se e solo se" ne ha due infetti collegati)
- si tratta, quindi, di analizzare i vari casi e probabilità: …non me la sento.

Si potrebbe, inoltre, “tagliare” tutti i collegamenti verticali …o orizzontali. In questo modo ho 10 “file” separate di computer collegati in rete tra di loro. Al massimo, quindi, le “file” di computer con un infetto presente sono 9 di 10.

Nelle 9 “file” con l’infetto, per la regola dei due, esso non ne infetta altri. Anche in questa situazione, si tratterebbe di analizzare le diverse casistiche.

Vediamo la versione di ***Galluto***, che ha una soluzione Q&D più sbrigativa:

Vediamo se ho capito:

- Il messaggio compare quando si sono infettati 9 computer; comunque sia successo, da questo momento in poi le ulteriori infezioni necessitano la contiguità di due computer già infetti
- Non so quali sono i 9 computer infetti
- Il cervellotico contratto di assistenza prevede che (prima di chiamarli?) devo fare in modo che non tutti i computer possano infettarsi

Se è così, la soluzione Q&D consiste nello spegnere (o scollegare dalla rete tagliando i segmenti del reticolo) 10 computer: almeno uno sarà sano.

La soluzione più ragionata:

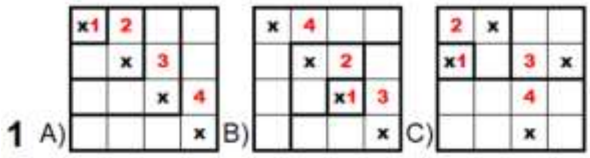
- per infettare il computer di una certa riga e colonna, deve essercene uno già infetto sulla stessa riga e uno sulla stessa colonna, oppure devono essere infetti due computer sulla stessa riga (o colonna), sulle due colonne (righe) prima e dopo a quella del computer infettando.
- L'infezione, a un certo punto, si circoscrive da sola; se ad esempio i 9 computer infetti stessero sui 9 nodi di un quadrato 3x3, non potrebbero più infettare nessun altro, perché nessuno degli altri computer sarebbe adiacente a due computer infetti
- i 9 computer infetti stanno, al più, su 9 righe e 9 colonne diverse; ad esempio, sulle nove posizioni di una diagonale, con la decima "sana"
- al massimo, quindi, possono infettare i computer delle 9 righe e delle 9 colonne (in tutto, 81 computer)

Quindi, anche non facendo nulla, rimarranno dei computer sani; il problema vero sarà di convincere l'Assistenza della correttezza del ragionamento e farli intervenire prima di avere 81 computer infetti.

Beh, si capisce chiaramente che né il Capo né l'Assistenza hanno pensato al centinaio di utenti firmando il contratto. Vediamo la versione di ***trentatre***:

In una rete 10×10 scatta l'allarme quando sono infettati 9 computer; quindi il virus non può infettare tutta la rete con 9 ma lo farà con 10; estendendo a una rete quadrata $N\times N$, va dimostrato che al virus, qualsiasi strategia adotti, per l'infezione totale occorrono e bastano N computer infetti.

I computer si possono vedere come caselle in una scacchiera. In fig. 1 alcuni casi 4×4.



Indico con **x** le caselle infettate dal virus, con **R** un generico rettangolo (o quadrato) di caselle, con "schema" la posizione degli **x** sulla scacchiera; valgono le regole

[1] lo schema si ricava identificando quali computer sono ancora attivi

[2] una casella sana viene infettata quando confina con almeno 2 caselle già infette

[3] il contagio si propaga secondo un ordine che dipende dallo schema

[4] un gruppo di **x** completa un **R** e ogni **x** aggiunto completa un altro **R**; infatti un **R** non può infettare le caselle esterne, mentre qualsiasi altro insieme connesso di caselle infette presenta sul perimetro almeno una casella infettabile secondo [2].

Ogni **R** è segnato con bordo nero; il numero rosso interno indica la casella da cui inizia il contagio, e l'ordine con cui si estende alla rete; si parte da **R** con solo una casella (n° 1) e si procede con la casella **x** adiacente

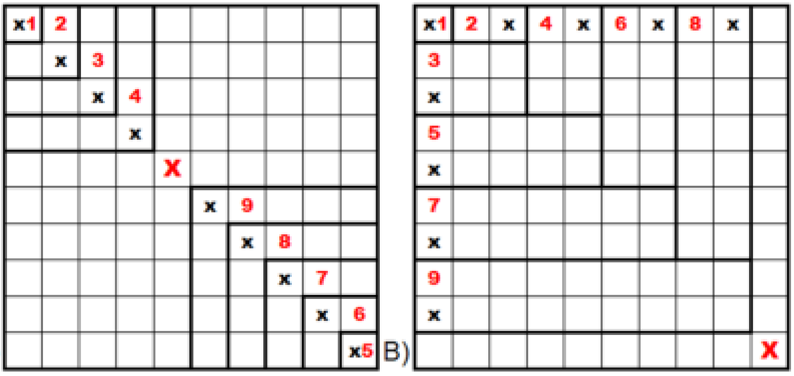
- l'ordine può variare; p.es. il caso A) può essere riordinato come in B), mentre in C) l'ordine è obbligato (nessuna altra coppia di **x** può iniziare il contagio)

- il caso diagonale A) mostra che N caselle **x** bastano per il contagio totale di una rete $N\times N$;

più in generale si può partire da una qualsiasi soluzione $(N\text{-}1)\times(N\text{-}1)$ e aggiungere un **x** in diagonale

- inoltre 3 **x** non bastano: se ne manca uno qualsiasi l'infezione è incompleta.

2 A) B)



In fig. 2 due casi di rete 10×10 con 9 caselle **x**

- in A) una variante del caso diagonale con una metastasi: due quadrati 4×4 e 5×5; per impedire il contagio totale basta isolare (o togliere) il computer **X** e si salvano (restano in funzione) 58 computer.

- in B) tutti gli **x** sono sul perimetro e l'andamento per **R** è evidente; anche qui basta isolare **X** e i computer salvati sono 18.

Per bloccare l'infezione, come già detto, basta togliere un solo **x**, ma il numero di computer salvati dipende dallo schema ed è molto variabile; il massimo possibile in $N \times N$ è $\lfloor (N^2 + 2N - 3)/2 \rfloor$ che si ricava dal caso migliore (?) di "metastasi" come in fig. 2 A); se però il virus è molto astuto si salvano al massimo $2N - 2$ computer (ancora il caso diagonale esteso con **X** a una estremità);

Accenno a una semplice estensione del problema; una rete <u>rettangolare</u> $N \times L$ si infetta completamente con il numero di **x** dato da $\lfloor (N + L + 1)/2 \rfloor$, che si dimostra facilmente e si verifica anche dalle figure, p.es. dai rettangoli interi (che comprendono **x1**) in fig. 2 B).

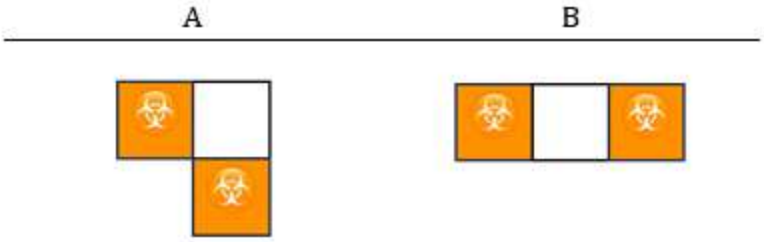
Estensione! Il Capo si è distratto e adesso sta calcolando tutte le possibili varianti. E allora passiamo ad ***Alessandro***, che questo problema ("*sembra il revival di una square array di Inmos Transputer*") ancora se lo sogna:

Probabilmente esiste un metodo più semplice di quello che segue ma non l'ho trovato. Comincio con le definizioni.

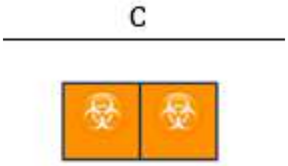
- Dato un reticolo quadrato bidimensionale, chiamo **blocco** un sottoinsieme rettangolare di nodi $m \times n$, con $m, n \geq 2$.
- Due nodi – o blocchi ad intersezione vuota – sono **adiacenti** se esiste un nodo avente una connessione diretta con ciascuno di essi.
- Dati N nodi o blocchi adiacenti, la loro **chiusura** è il sottoinsieme del reticolo che si ottiene per infezione progressiva dei nodi connessi.
- Infine, una **soluzione** è una disposizione iniziale di nodi infetti la cui chiusura è un blocco $m \times n$.

L'ipotesi da dimostrare è: Una soluzione minima per la chiusura di un blocco $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ richiede $\left\lceil \frac{\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{2}} \right\rceil$ nodi.

Le uniche disposizioni adiacenti di nodi sono in diagonale o in linea (orizzontale o verticale):

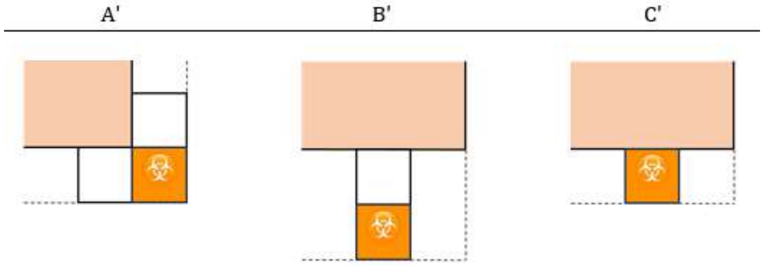


Le loro chiusure sono rispettivamente di dimensione 2×2 e 3×1. Una terza struttura semplice di nodi vicini è la C, di dimensione 2×1, con un nodo contiguo al nodo di partenza:



A e B hanno un semiperimetro di 4 unità, e C di 3 unità. La soluzione dei 3 blocchi richiede due nodi già infetti, in accordo con l'ipotesi.

Un insieme di nodi adiacenti si può estendere aggiungendo un ulteriore nodo nei tre modi visti sopra: adiacente in diagonale, adiacente in linea, o contiguo.



A' e B' aumentano il semiperimetro del blocco iniziale di due unità e C' di una unità. Le tre chiusure richiedono un nuovo nodo già infetto, così anche questi casi sono in accordo con l'ipotesi.

Però le soluzioni possibili non sono solo quelle ottenute tramite estensioni di nodi adiacenti, ma anche quelle derivanti dall'unione di blocchi adiacenti – ciascuno dei quali si ottiene per infezione progressiva di posizioni iniziali che sono estensioni delle posizioni A, B e C.

Infatti, la chiusura di blocchi adiacenti genera un nuovo blocco: poiché sono adiacenti, l'infezione crea un insieme di nodi connessi. Inoltre, l'insieme di nodi ottenuto dalla chiusura deve essere convesso, altrimenti esisterebbe un nodo esterno con due connessioni dirette a nodi infetti – che però per definizione fa parte della chiusura. L'unico sottoinsieme convesso di un reticolo bidimensionale è un rettangolo.

Fissate le dimensioni dei blocchi, m_i e n_i, il semiperimetro massimo ottenibile è $\sum(m_i + n_1)$ e il numero minimo di nodi infetti è la somma di quelli di ciascun blocco, cioè $\sum\left\lceil\frac{m_i+n_i}{2}\right\rceil$. Per ottenere il valore minimo bisogna che ogni $m_i + n_i$ sia pari.

Ci sembra di essere alla decima pagina di soluzioni e di poterci rilassare ma no! C'è ancora una volta qualcuno che ha letto il PM del Capo!!!!

4.2.3 PM: Giocando a scacchi su un toro

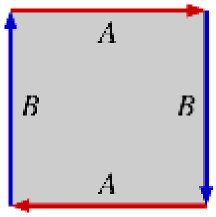
Rompendo con la tradizione non vi diamo troppe indicazioni ma vi passiamo prima il problema di scacchi "Il bianco matta in quattro mosse":

… e poi direttamente quello che ci ha scritto ***Alessandro***:

La soluzione (b) del problema in copertina contiene un paio di refusi: una Donna che da g7 (dove non dà scacco) si teleporta in c7 e un numero di mossa è mancante. Si dovrebbe leggere

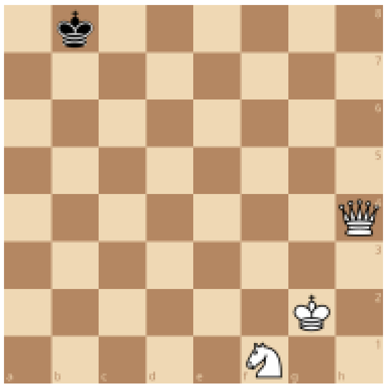
1. ♕f5–h7 ♔e8–d8 2. ♕h7–c7+ ♔d8–e8 3. ♘b5–h6 ♔e8–f8 4. ♕c7–e1#

L'inizio dell'articolo mi ha stimolato a comparare il movimento dei pezzi nelle topologie alternative per la scacchiera. Il toro agisce sui pezzi restituendo loro i movimenti persi quando si avvicinano al bordo della scacchiera, mentre il piano proiettivo reale (in figura) potenzia ulteriormente i pezzi a lungo raggio.



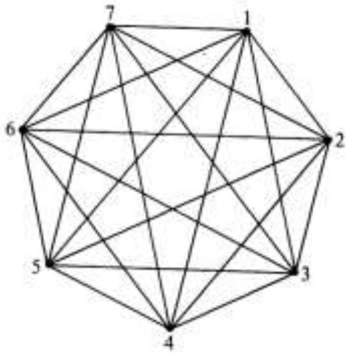
Una Torre copre una traversa ed una colonna in più, un Alfiere due diagonali in più e non è più limitato a percorrere case di un solo colore. Il Re invece perde mobilità quando è costretto in un angolo: un Re in a1 che si muovesse di una casa nelle 8 direzioni possibili terminerebbe in h8 (O), h7 (NO), a2 (N), b2 (NE), b1, (E), g8 (SE), ancora h8 (S) e... a1 (SO).

Non ho trovato in rete molto materiale su questa topologia, così rielaborando il tema in copertina di RM304 vi propongo il seguente diagramma. Niente di particolarmente difficile, si tratta di scoprire quante e quali sono le mosse con cui il Bianco può dare matto in una.



Credo di sfondare la classica porta aperta, ma la sezione *Carta, forbici & colla* mi ha ricordato qualcosa che avevo già letto anni fa. Si tratta di *The Császár Polyhedron*, pubblicato in *Time travel and other mathematical bewilderments* di Martin Gardner (1988), e prima ancora nella rubrica *Giochi Matematici* di *Le Scienze* nel dicembre 1975. Il problema esposto consisteva nella ricerca di poliedri senza diagonali: ce n'é uno di *genus* 0, il tetraedro, e uno di *genus* 1, il poliedro di Császár. Nell’articolo è citata la possibilità di un terzo poliedro di *genus* 6, ma la corrispondente pagina di Wikipedia fa riferimento ad un *paper* del 2000 dove si mostra che non è realizzabile.

Nell’articolo e nel libro c’è anche il modello per costruire il poliedro, ma è composto da due pezzi da unire. Che sia senza diagonali si può vedere dal fatto che la figura 8 è topologicamente equivalente al grafo completo con 7 vertici.



E qui ci fermiamo, che ancora una volta siamo in ritardo. Alla prossima!

5. Quick & Dirty

Grandi notizie! Rudy ha appena scoperto che il Piemonte è *in-quadrabile*! Nel senso che potete disegnare un *quadrato* (OK, un po’ storto... ma non si può avere tutto dalla vita) che è tangente al Piemonte in quattro punti e lo contiene tutto.

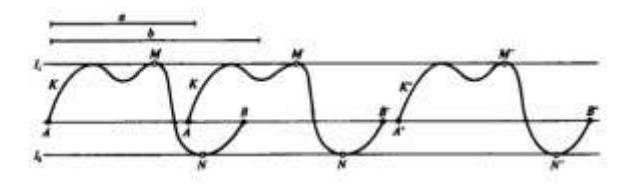
Colta da invidia, Alice è sbottata in un “...non è possibile che, con il loro amore per la precisione, gli svizzeri abbiano fatto una nazione non *in-quadrabile*!”. Potete darle una mano? Oh, non considerate le enclave o cose del genere: le nazioni sono considerate blocco unico. E la Terra, notoriamente, è piatta.

6. Pagina 46

Sia K una curva continua congiungente i punti A e B. Mostreremo che se K non contiene corde di lunghezza a o di lunghezza b, allora non conterrà corde di lunghezza $a+b$. Da questo segue che k ha una corda di lunghezza $1/n$, in quanto altrimenti non avrebbe corde di lunghezza

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=\frac{2}{n},\ \frac{1}{n}+\frac{2}{n}=\frac{3}{n},\ \dots,\ \frac{1}{n}+\frac{n-1}{n}=1$$

Mentre sappiamo che una corda come l’ultima esiste, essendo il segmento AB medesimo.



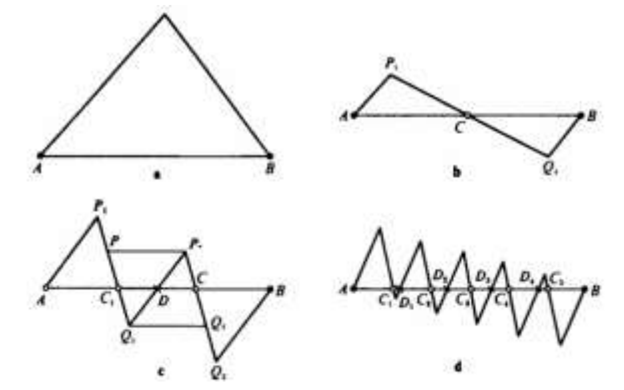
3 *Traslazioni della curva.*

Con riferimento alla figura, la dichiarazione che K non contiene corde di lunghezza a è equivalente a dichiarare che la curva k', ottenuta per traslazione parallela della curva K di una distanza a non ha punti in comune con K. Inoltre, la curva K' non ha corde di lunghezza b, essendo congruente con K. Quindi la curva K'', ottenuta traslando di b nella direzione AB la curva K', non ha punti in comune con K'. Mostreremo infine che le curve K e K'' non si intersecano, ossia che la curva AB non ha corde di lunghezza $a+b$ parallele ad AB. La curva K' contiene punti che giacciono su AB o al di sopra di essa (ad esempio i punti A e B medesimi); tra questi punti, ne esiste almeno uno la cui distanza da AB è massima (indicato in figura con

M'). Nello stesso modo, tra i punti di *K'* che giacciono al di sotto o sulla retta *AB* ne esisterà uno la cui distanza da *AB* è massima (indicato in figura con *N'*).

Tracciamo, passanti per *M'* e *N'*, le due rette l_1 e l_2 parallele a *AB* (una o entrambe queste rette possono coincidere con *AB*); è evidente che le curve *K*, *K'* e *K"* giacciono all'interno della striscia racchiusa tra le due linee appena tracciate. La porzione *M'N'* della curva *K'* divide la striscia in (almeno) due parti; e siccome *K* e *K"* non intersecano *K'*, *K* e *K"* giacciono totalmente all'interno di una di queste parti. Le due curve giacciono come vedremo in parti *diverse* della striscia, e quindi non si intersecano; questo in quanto *M* e *M"* giacciono dalle due parti opposte di *M*; quindi, essendo *K* e *K"* continue, giacciono dai lati opposti di *M'N'* e non si intersecano. Questo conclude la dimostrazione della prima metà del problema.

Ci resta da dimostrare che per ogni numero reale *a* non nella forma $1/n$ esiste una curva continua che unisce *A* e *B* che non ha corde di lunghezza *A* parallele ad *AB*. Se $a>1$, la cosa è ovvia: è sufficiente richiedere che la curva giaccia completamente all'interno della zona definita dalle due perpendicolari ad *AB* tracciate in *A* e *B*; se $1>a>1/2$, è sufficiente tracciare una serie di linee parallele ad *AB* (nessuna delle quali coincidente con *AB*) e una linea arbitraria non parallela a queste passante per il punto medio *C* di *AB*; come mostrato in figura (parte "b"), si vede che ogni corda della curva AP_1CQ_1B che sia parallela ad *AB* ha lunghezza al più 1/2.



4 *Traslazioni della curva.*

Per il caso $1/3<a<1/2$, dividiamo *AB* in tre parti uguali $AC_1=C_1C_2=C_2B$, e in due parti $AD=DB$ (parte "c" della figura); tracciamo tre linee parallele tra loro passanti per *A*, *D* e *B*, e due linee parallele tra loro ma non parallele alle prime tre attraverso i punti C_1 e C_2. Si vede che la spezzata $AP_1C_1Q_1DP_2CQ_2B$ non ha corde che siano sia parallele ad *AB* che di lunghezza tra 1/2 e 1/3: questo in quanto se un estremo della corda giace su AP_1 e l'altro su P_1Q_1 (o nelle parti equivalenti della parte restante della curva), la sua lunghezza sarà, per costruzione, minore di 1/3; se uno degli estremi giace su AP_1 e l'altro estremo su Q_1P_2 (o sulle parti equivalenti nella parte restante della curva), la sua lunghezza sarà, per costruzione, pari a 1/2; infine, in tutti gli altri casi la lunghezza della corda sarà maggiore di 1/2.

In modo analogo possiamo sempre costruire una curva che non abbia corde parallele ad *AB* comprese tra $1/(n-1)$ e $1/n$; nella parte "d" della figura è mostrato il caso $n=5$.

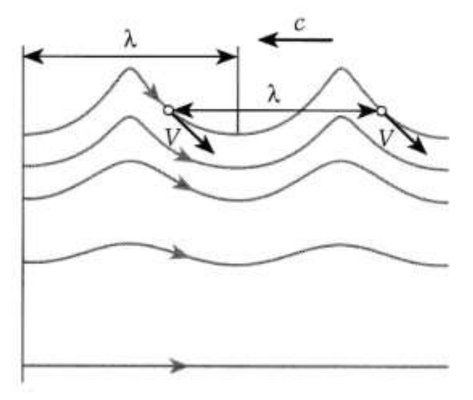
7. Paraphernalia Mathematica

Già vi vediamo, rimirare un romantico tramonto sull'orizzonte di un mare appena increspato da qualche onda... Già, ma come attaccare discorso con l'interessante esemplare della specie umana seduto all'altro capo del banco del bar?

7.1 Onda su onda...

Per quanto ci riguarda, ci ha sempre lasciato perplessi una cosa. Il resto del genere umano, quando si parla di fisica classica, considera la termodinamica un qualcosa di complicato, incomprensibile e noioso. Non che noi la si consideri una passeggiata, ma ci è sempre sembrata comunque affrontabile e ragionevolmente comprensibile almeno rispetto a quella che era la nostra bestia nera: la dinamica dei fluidi. Che qui abbiamo intenzione di affrontare nella sua più maestosa rappresentazione: le onde del mare.

Uno dei guai principali quando si voglia studiare la dinamica delle onde è implicito nella definizione: esse, infatti, si muovono. Per evitare questa incresciosa situazione, supponendo che le nostre onde si muovano con velocità c, muoviamoci anche noi alla stessa velocità, in modo da vedere l'onda "ferma"; se poi, rispetto all'onda, le particelle di acqua si muovessero (spoiler: sì), attribuiremo il moto a loro, ma il tutto (l'onda) sarà ben ferma. Il risultato di questa trasformazione è che delle particelle d'acqua fluiscono in modo uniforme e, in base al principio di relatività galileiano, quello che osserveremo sarà ancora sensato da un punto di vista fisico: l'inclinazione dell'onda, esattamente come il flusso dell'acqua alla velocità V (attenti a non confonderla con c: questa era la velocità *dell'onda*, V è la velocità della *particella* d'acqua) lungo il profilo stazionario dell'onda, si ripeteranno alla distanza λ, detta *lunghezza d'onda*.

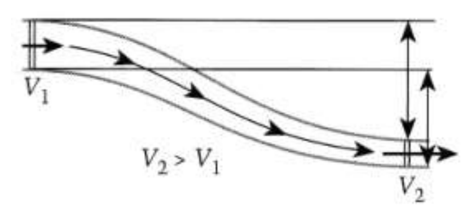


5 *Un paio di onde.*

Al di sotto della superficie, avremo un altro strato d'acqua, e sotto questo un altro ancora e avanti in questo modo sino al fondo del mare, organizzati in un *flusso laminare*; le creste e le valli della nostra onda si ripetono nei vari strati *[Attenzione: non con la stessa ampiezza]*, restando coerenti tra loro.

In questo modo, abbiamo trasformato il moto della nostra onda in un moto di particelle d'acqua contenute in diversi strati; una particella non abbandona mai il proprio strato di appartenenza, il che significa che per un dato strato passa, nell'unità di tempo, sempre la stessa quantità d'acqua.

I profili dei diversi strati non sono però identici; la loro ampiezza decresce man mano che ci avviciniamo al fondo. Questo diventa chiaro se esaminiamo il flusso tra i confini superiore e inferiore di uno strato: Siccome il flusso è costante, lo strato dovrà essere più ampio quando la velocità V della particella è *minore*, e più stretto quando la velocità diventa maggiore; quando la particella d'acqua "scende" lungo l'onda, la sua velocità aumenta (e quindi l'ampiezza dello strato diminuisce); viceversa, quando sale verso la cresta, la velocità diminuisce (e l'ampiezza dello strato aumenta). Quindi, lo strato è più spesso sulla cresta e più sottile nella valle, e l'inclinazione del limite inferiore di uno strato è minore di quella del limite superiore.



6 *Lo strato.*

Siccome però il limite inferiore di uno strato è il limite superiore di quello immediatamente sotto, man mano che ci avviciniamo al fondo le inclinazioni dei limiti superiori degli strati decrescono, sino ad annullarsi quando tocchiamo il fondo.

Quindi, al fondo abbiamo un ultimo strato di acqua ferma *rispetto al fondale*. Ma la nostra onda è "congelata", quindi in realtà nel nostro modello l'ultimo strato e il fondo del mare si spostano con una velocità *c*. E se il nostro mare è abbastanza profondo (e tutto questo capiterà più vicino alla superficie), qualsiasi irregolarità del fondale non influenzerà le nostre onde.

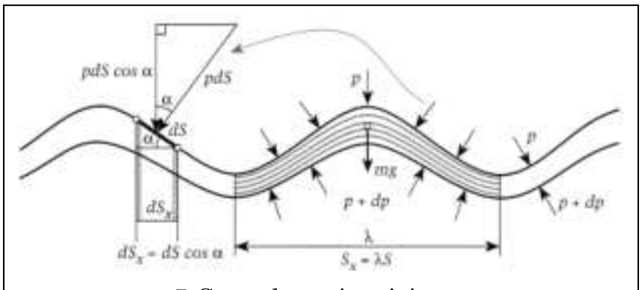
Scongeliamo temporaneamente la nostra onda: se vogliamo trovare la velocità di una particella d'acqua rispetto al fondo del mare, dobbiamo semplicemente sommare (vettorialmente) la velocità V della particella alla velocità c del profilo dell'onda: $v=V+c$.

Adesso, prendiamo un mare agitato, con onde aventi una lunghezza d'onda dell'ordine della decina di metri[19]: rispetto alle onde che facciamo nella vasca da bagno. Questa assunzione rappresenta una semplificazione, visto che possiamo ignorare la tensione superficiale, e il fatto che si muovano per centinaia di chilometri senza perdita di forma apprezzabile mostra che anche l'attrito tra le particelle d'acqua è ignorabile: la dinamica della nostra onda diventa funzione di due sole forze, la gravità e la pressione.

Al livello del mare, la pressione è costante e uniforme sull'intera superficie e pari alla pressione atmosferica; se ci spingiamo verso il fondo, gli strati diventano sostanzialmente orizzontali e l'acqua è (quasi) stazionaria; la pressione, nell'acqua ferma ad una data profondità, è la stessa ovunque: anche se nell'acqua profonda è molto diversa dalla pressione atmosferica, non ci sono variazioni di pressione all'interno dello strato sia in quello superficiale che in quelli più profondi anche se, nel passare da uno strato all'altro, riscontriamo delle differenze di pressione.

Possiamo giustificare queste differenze considerando un blocco di uno strato di lunghezza pari alla lunghezza d'onda; questo strato, in media, non si muove in su o in giù: le forze sono controbilanciate in ogni parte dello strato, e uno squilibrio in una parte corrisponderà a uno squilibrio opposto in un'altra; nell'acqua profonda la pressione è diversa da quella atmosferica, ma è costante in ogni punto. Nei livelli intermedi, quindi, non possiamo avere variazioni di pressione in un livello, visto che non esistono forze né dall'alto né dal basso che possano farla variare. Ma anche se all'interno di uno strato la pressione è costante, cambia alla transizione da uno strato all'altro.

Fermo restando che il nostro strato, all'interno di una lunghezza d'onda, in media non si muove, possiamo calcolare la forza della pressione che agisce sulla cresta del confine curvo dell'onda (dove la pressione su ogni punto è p): cominciamo con un piccolo settore inclinato.



7 *Con calma, ci arriviamo.*

In questo caso, la forza agente è pari alla pressione moltiplicata l'area considerata ed è diretta perpendicolarmente all'areola che stiamo considerando, quindi la componente verticale (rispetto al nostro sistema di riferimento: verso "giù", per intenderci) è pari quindi alla pressione per la componente orizzontale dell'area considerata (poco chiaro? Secondo noi, la figura aiuta). Nei conti, la pressione è un fattore comune e possiamo raccoglierlo quando sommiamo le componenti verticali e, se L è la larghezza della

[19] Le onde più lunghe sono note come "onde oceaniche": non confondetele con le onde dello tsunami, quelle sono diverse (tant'è che, come abbiamo già detto tempo fa, non seguono l'equazione di d'Alembert ma quella di Airy).

nostra onda, l'area dell'intera onda diventa λL, e quindi la pressione agente su di essa vale $p\lambda L$ ed è diretta verso il basso.

Per un livello inferiore con una pressione pari a $p+dp$, la forza è diretta verso l'alto e vale $(p+dp)\lambda L$: la differenza tra le due forze è controbilanciata dalla forza di gravità mg, dove m è la massa del nostro pezzo di livello, e quindi:

$$dp = \frac{mg}{\lambda L}$$

Consideriamo un piccolo settore dello strato superficiale, approssimandolo ad un parallelepipedo, e torniamo al sistema dell'onda "ferma": nel periodo $T=\lambda/c$, l'intera massa d'acqua del nostro frammento viene rimpiazzata, quindi la massa d'acqua che passa nel nostro frammento in un secondo è:

$$\frac{m}{T} = c \cdot \frac{m}{\lambda}$$

e quindi nel periodo dt la massa d'acqua entrante nel frammento di strato vale:

$$dm = c \cdot \frac{m}{\lambda} dt$$

e la forza agente sul frammento vale:

$$dmg = c \cdot \frac{mg}{\lambda} dt$$

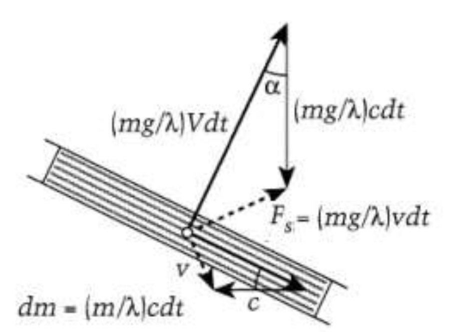
ed è diretta verso il basso, perpendicolare alla velocità dell'onda c.

La differenza di pressione alle estremità del nostro volume di strato vale:

$$dpLVdt = \left(\frac{mg}{\lambda}\right) Vdt$$

E questa forza è diretta perpendicolarmente al flusso, ad angolo retto rispetto alla velocità del flusso V.

Entrambe le forze possono essere ottenute dai vettori V e c nello stesso modo, ruotandoli di 90° e moltiplicandoli per lo stesso fattore; quindi, la somma delle due forze può essere ottenuta effettuando la stessa operazione sul vettore somma $v=V+c$.



8 *Composizione delle.*

La stessa forza può essere espressa anche nel sistema di riferimento del fondo fermo (insomma, con l'onda che si muove) applicando lo stesso calcolo alla velocità dell'onda:

$$F_s = \left(\frac{mg}{\lambda}\right) vdt$$

Dividendo per dm otteniamo l'accelerazione, che è ad angolo retto con la velocità v.

$$a = \frac{g}{c} v$$

Che è una costante. E accelerazione normale alla velocità e costante significa una sola cosa: moto circolare uniforme. Quindi possiamo ricavare la velocità angolare del nostro moto:

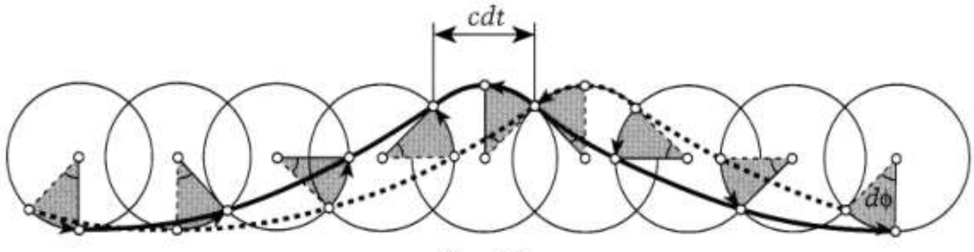
$$\omega = \frac{g}{c}$$

Riepilogando: le particelle d'acqua si muovono tutte con la stessa velocità angolare in un cerchio di raggio costante; per le particelle che formano il profilo dell'onda, i raggi sono uguali e i loro centri giacciono su una linea orizzontale; le particelle ruotano in sincronia e la fase tra due particelle non cambia, ma l'intero profilo ondoso si muove, a questo punto, con una velocità c. Questo succede a qualsiasi profondità, l'unica cosa che varia è il raggio del cerchio.

Dopo un tempo $T=2\pi/\omega$, la particella torna nella stessa posizione, ma sull'onda successiva che, in questo tempo, ha viaggiato per una distanza $\lambda=cT=2\pi c/\omega$. Riprendendo l'espressione della velocità angolare, si ha $\lambda=2\pi c^2/g$, il che ci permette di calcolare la velocità dell'onda:

$$c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}$$

Non è difficile analizzare il profilo dell'onda nel sistema "a onda ferma": infatti, questo viene disegnato dalla particella stessa come risultato di un movimento di rotazione e di traslazione:



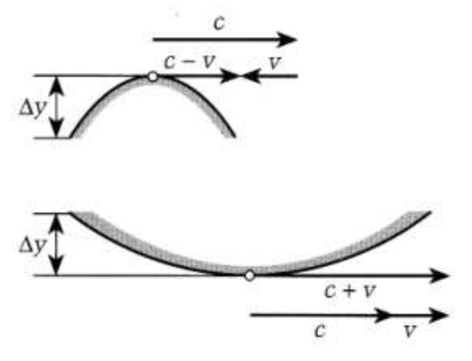
E, ponendo l'origine delle coordinate al centro del cerchio e il tempo zero quando la nostra particella è sulla cresta dell'onda, si ottiene:

$$\begin{cases} x = ct - r\sin\omega t \\ y = r\cos\omega t \end{cases}$$

Per un'onda debole, nella quale $\boldsymbol{v}$ sia piccola rispetto a c, la velocità orizzontale (ottenuta derivando rispetto al tempo la prima delle due equazioni parametriche qui sopra) può essere considerata costante e pari a c, il che implica $x\approx ct$; se sostituiamo t con x/c nell'espressione per l'ordinata, otteniamo:

$$y = r\cos\left(\frac{\omega x}{c}\right) = r\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

ossia la nostra onda è (co)sinusoidale.



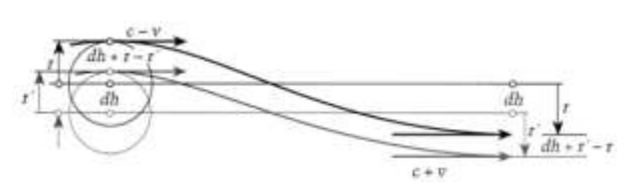
9 *Prima o poi si rompe…*

Consideriamo adesso un'onda "moderata": in questo caso, vediamo un acuirsi della cresta e un appiattirsi della valle; la deflessione verticale della cresta e della valle sono uguali su periodi di tempo molto brevi, ma la deflessione orizzontale è diversa; infatti, la velocità sulla cresta risulta $c-v$, mentre quella della valle vale $c+v$, e più v è vicino a c, più la nostra onda avrà la componente orizzontale "compressa".

Come dicono gli economisti (e i matematici), quando due rette si incontrano, succede sempre qualcosa di interessante. Da un punto di vista strettamente formale, quando abbiamo $v=c$, la nostra onda sviluppa una cresta infinitamente stretta, mentre per $v>c$ emerge un anello sulla cresta (a forma di goccia rovesciata), e entrambi questi comportamenti sono piuttosto inattesi da parte di un'onda oceanica perbene (se preferite, sono tutti e due decisamente instabili). Sembra che per le onde ad alti valori di v (dove per "alti" intendiamo già intorno a c) sia necessario un diverso approccio.

Le creste dei nostri strati di onda sono collocate una sotto l'altra, esattamente come le valli; nei punti del profilo simmetrici relativamente alla cresta il valore assoluto del flusso è uguale, come lo è lo spessore dello strato, il che impedisce "scivolamenti" di uno strato sull'altro.

I confini di uno strato continuano ad essere definiti dai due moti di rotazione e traslazione, ma qui nasce il problema: infatti, i centri di rotazioni sono a profondità diverse e i raggi non sono uguali.



10 *Adesso è tutto più chiaro…*

Per ottenere la relazione tra il raggio e la profondità, possiamo usare il fatto che il flusso attraverso uno strato è costante; consideriamo le due sezioni indicate in figura: sulla sinistra abbiamo una cresta, mente sulla destra c'è la valle. Nel primo caso, il raggio del cerchio che descrive il movimento della particella "punta in alto" con una velocità di flusso pari a $c–v$, mentre nel secondo caso "punta in basso" con una velocità di flusso $c+v$. Quando la distanza tra i centri dei due cerchi differisce di poco, i raggi r e r' differiscono di molto poco: lo spessore dello strato sulla cresta dell'onda risulta $dh+r–r'$, mentre nella valle abbiamo uno spessore $dh+r'–r$. Se imponiamo l'eguaglianza del flusso tra questi due punti abbiamo:

$$(dh + r - r')(c - v) = (dh + r' - r)(c + v)$$

e possiamo trovare l'incremento del raggio (che è negativo, visto che decresce con la profondità):

$$dr = -\frac{v}{c}dh$$

Dato che $v=\omega r$, il raggio decresce in funzione del raggio stesso, e quando il centro del cerchio scende di un'altezza dh, il raggio diminuisce in modo proporzionale:

$$\frac{dr}{r} = -\frac{\omega}{c}dh$$

Se il raggio del cerchio alla superficie vale r_0, integrando questo oggetto si ha:

$$r = r_0 e^{-\frac{\omega h}{c}} = r_0 e^{-\frac{2\pi h}{\lambda}}$$

Approssimando brutalmente, vediamo che già alla profondità di una lunghezza d'onda, il raggio del nostro cerchio è ridotto di un fattore maggiore di 500.

Il che dovrebbe chiarire il motivo per cui, quando vi arriva l'onda sulla schiena, prendete una nasata.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms