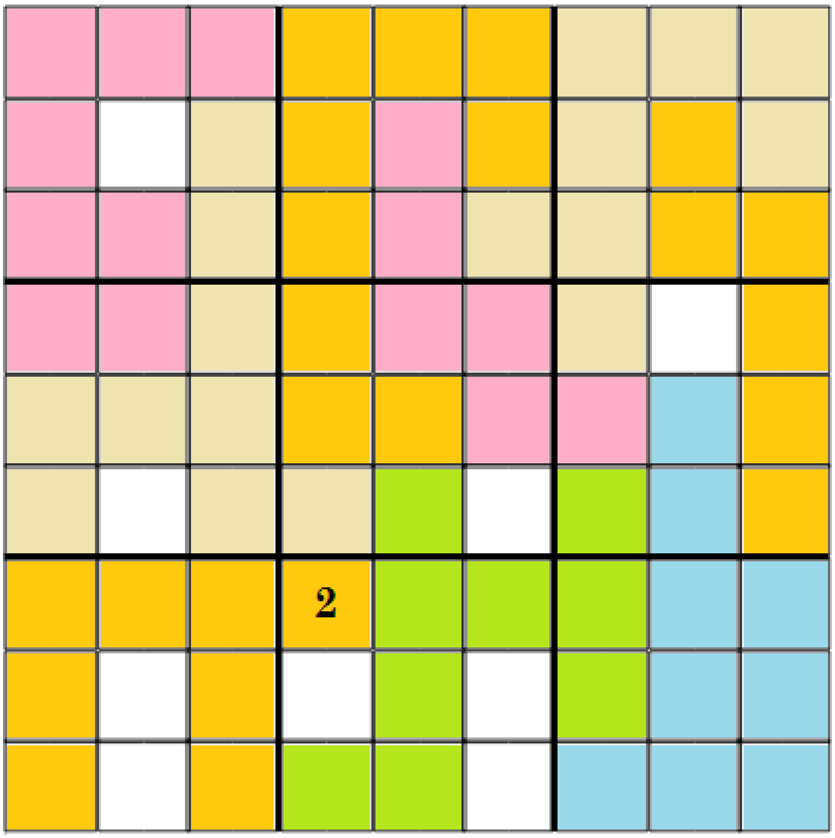
Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 306 – Luglio 2024 – Anno Ventiseiesimo



Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com
www.rudimathematici.com
RM300 ha diffuso 3'389 copie e il 28/01/2024 per Google eravamo in 11'900 pagine.

Si applicano le regole classiche del Sudoku, con due piccole aggiunte: (1) In ogni blocco colorato le cifre non possono ripetersi, e (2) Due celle ortogonalmente adiacenti non possono contenere cifre consecutive.

1. Puzzle Mondiali

Noi non crediamo alla predestinazione, al Destino (specie a quello con la maiuscola), perché ci piacciono la matematica e la scienza, e ci piace soprattutto l'idea che sia possibile – anche se spesso non facile – modificare almeno alcune cose del nostro futuro, agendo in modo saggio piuttosto che stolto. Non crediamo al destino cinico e baro, insomma, ma a dirla tutta non crediamo neppure al destino generoso e positivo, insomma a una sorta di provvidenza di manzoniana memoria. Ciò nondimeno, non possiamo fare a meno di registrare quelle sorprendenti (e rarissime) congiunture che qualche volta (rarissime volte, l'abbiamo già detto?) arrivano a risolverei un'ambascia quando uno meno se lo aspetta. Ad esempio, prendete questi "compleanni di RM": la Redazione è un po' in sofferenza, con un po' troppa carne a l fuoco e un po' troppo poca legna per il fuoco medesimo, tant'è che il responsabile ufficiale dei compleanni si è perfino inventato, il mese scorso, un artificioso artificio per ripubblicare un compleanno vecchio, non avendo tempo per inventarne uno nuovo. Ecco, adesso tornate a guardare la copertina di RM303, Aprile 2024: vedete? C'è sopra un gioco, un "puzzle" (per dirla all'inglese) di tipo strano. Beh, appena uscito quel numero, uno dei nostri più cari, vecchi e affezionati lettori ci ha scritto una mail in cui ci diceva che quel gioco lo conosceva, perché frequenta competizioni nazionali e internazionali che trattano giochi di quel tipo, e soprattutto che di giochi simili ce ne sono tanti, e che c'è tutto un mondo competitivo che sobbolle e gareggia. "Potrei pure scrivere qualcosa in merito", concludeva; "E come no!", abbiamo risposto noi. Poi il tempo passa, e quando il tempo passa le cose passano di mente: almeno fino a qualche giorno fa, quando una nuova mail affannata ci informava che quel "qualcosa in merito" il nostro eroe l'aveva effettivamente scritto, ma la mail non era partita, e quindi – oh, disperazione! – forse ormai era troppo tardi. "Tardi?", abbiamo pensato noi, "Troppo tardi? Oh, Destino Buono e Misericordioso! Ci arriva un gran bel pezzo di autentico Giornalismo Ricreativo Matematico e pensi che sia tardi? Ci risolvi dalla paura di uscire con RM di Luglio dalle parti di Ottobre e chiedi scusa? Ah, nostro salvatore, non sai quanto benediciamo questo tuo irrisorio ritardo, che ritardo non è ma piuttosto è Tempismo Salvifico e Liberatorio!"

*Iperboli a parte, il pezzo è davvero bello e interessante; lo ha scritto Gabriele Carelli, che nel mondo di RM si fa chiamare **GaS**, e che nel mondo di RM ci abita fin dai primissimi numeri di questa nostra piccola rivista. Grazie davvero, Gabriele. – (Alice, Rudy e Piotr).*

I lettori di Rudi Mathematici sono certamente familiari con i criteri di divisibilità: forse il criterio per 7 lo hanno letto una volta e messo in un cassetto ma i facili e canonici 3-4-9-11 vengono sicuramente automatici[1]. I lettori più attenti si saranno quindi accorti che questo 2024 è un anno divisibile per 4 e, come per tutti gli anni rispettabili divisibili per 4 da più di un secolo, questo significa che il mondo si sta preparando alle consuete Olimpiadi estive. Si, solo gli anni rispettabili ed infatti il 1916, il 1940 ed il 1944 non hanno visto lo svolgimento di Olimpiadi; e non molto rispettabile è stato anche, sebbene per motivi completamente differenti, il 2020.

Ma in questo 2024 il mondo, e Parigi in particolare, si sta preparando alle Olimpiadi e qualche centinaia di connazionali è pronto per l'avventura oltralpe; ma quanti di questi si presenteranno a Parigi con un numero di RM nel tablet, o addirittura stampato, per passare proficuamente il tempo nelle ore libere?

Statisticamente parlando, non molti, quasi sicuramente nessuno. Infatti la probabilità che l'intersezione tra l'insieme degli atleti olimpici italiani, circa 350, e quello dei lettori di RM, circa 3.300, sia l'insieme nullo è un epsilon sotto al 100%. E non per cavalcare un falso

[1] Quelli per 2, 5, 10 non li citerei neanche. Quelli per 6 o per 8 sono derivazioni "composte" degli altri.

stereotipo di atleti tutto muscoli e senza cervello o, peggio, quello di nerd lettori di RM che fanno movimento solo per scrivere le soluzioni ai problemi proposti. Si può supporre che l'intersezione tra i due insiemi sia nullo per mere ragioni numeriche: ipotizzando che le due proprietà, essere atleti olimpici e leggere RM, siano indipendenti e ipotizzando circa 50 milioni di Italiani sopra i 15 anni si ricava la

P(olimpionico e lettore RM)= 350*3.300/(50.000.000)^2=0,00000005%

Ovviamente abbiamo tagliato per i campi[2] [cit] ma possiamo dire che questo è l'ordine di grandezza della probabilità. Quindi un lettore di RM alle Olimpiadi estive, e ugualmente per quelle invernali, pare non facile vederlo.

Ma le Olimpiadi sportive non esauriscono certamente le competizioni che si tengono a livello mondiale tra appassionati di singole specialità dei diversi paesi. Tutti i lettori di RM saranno sicuramente a conoscenza dell'esistenza delle Olimpiadi della Matematica e dei Campionati Internazionali dei Giochi Matematici, ed è facile capire che partecipanti a queste competizioni possano venire dalle file dei lettori di RM (e viceversa). Meno noto invece, sicuramente anche tra i lettori di RM, è il *World Puzzle Championship* - WPC - che si svolge ogni anno dal 1992[3] e richiama centinaia di appassionati da tutto il mondo. L'ultima edizione del WPC si è tenuta in Canada nel 2023 mentre per il 2024 è programmato in Cina ad ottobre.

Ma cosa si intende per "*puzzle*" in questo contesto? E perché se ne parla su RM? Non parliamo certamente dei *jigsaw puzzle*, che in Italia siamo soliti chiamare semplicemente puzzle[4]. Per *puzzle* si intende invece un gioco di logica il cui rappresentante più famoso è sicuramente il sudoku. Non sono giochi che si trovano solitamente tra le pagine di RM ma, nella sua storia che ormai abbraccia due diversi secoli, diversi *puzzle* sono stati proposti od analizzati dal trio della redazione.

Partendo a ritroso, troviamo un esempio di *puzzle,* chiamato Hidato, sulla copertina del numero 303 di RM, una sfida diversa da quelle solitamente presentate nella sezione dei problemi. "Diversa" perché la risoluzione non richiede calcoli o dimostrazioni ma un puro ragionamento logico da effettuarsi sullo schema fornito; inoltre non c'è dematematizzazione ma, al contrario, una schematizzazione estrema.

Non è stata però la prima volta che su RM si sono proposti *puzzle*: continuando a ritroso possiamo identificare il *Tower Square* tra i problemi di RM297, il *KenKen* analizzato nel PM su RM192, il *Sudoku* presentato nella rubrica S&N di RM162, il *Sudoku* analizzato nel PM su RM124 e tre diversi giochi presentati nella rubrica "Typo da Spiaggia" sul lontano RM103, anche se non nominati i tre giochi in questione erano uno *Shikaku*, un *Numberlink* ed un *Hashi*. E non si pretende di aver fatto una ricerca esaustiva su tutti i numeri di RM, potrebbero quindi esserci altri puzzle sparsi nelle ormai migliaia di pagine uscite in 25 anni di onorata carriera.

Per i più pigri riportiamo di seguito qualche esempio per far capire di cosa stiamo parlando.

[2] Ad esempio ci sono sicuramente lettori di RM esteri, contiamo poi che gli olimpionici avranno un'età tra i 15 ed i 40 anni circa mentre i lettori di RM possono essere dai 15 ai 99 anni, e così via…

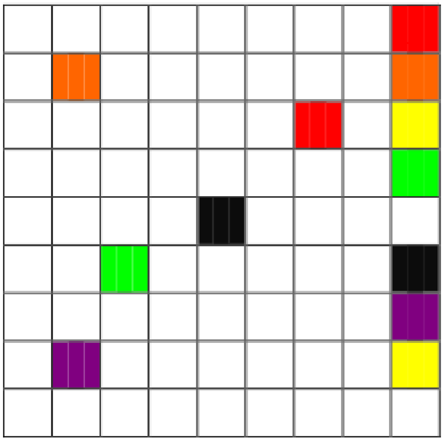
[3] Come per le Olimpiadi sportive anche il WPC ha avuto un'interruzione causa COVID nel 2020 e nel 2021.

[4] Esiste (ovviamente?) anche un "*World Jigsaw Puzzle Championship*" annuale che quest'anno si terrà in Spagna, a settembre.

					A				
6									
			4				6		6
	2	4						2	
						A			
					2				
		8		4				9	
						4			
			6						6
5				6					

Shikaku - da RM103

Dividere lo schema in rettangoli, utilizzando solo linee della griglia già fornita, in modo tale che ogni rettangolo contenga una ed una sola casella numerata ed il numero identifichi l'area del rettangolo che la contiene. La "A" sta per un 10.



Numberlink - da RM103

Unire ogni coppia di caselle dello stesso colore con una linea continua che passa per il centro di altre celle muovendosi solo in orizzontale ed in verticale e senza che due linee si intersechino o si tocchino.

(Solitamente al posto dei colori si forniscono numeri o lettere)

	4			5			4
2			2			4	
		3			2		
	1		3			5	
4		2		1			
	2		4				
				3		3	
2			3				3

Hashi (variante) - da RM103

Ogni casella con un numero rappresenta un'isola, le isole sono collegate tra di loro da alcuni ponti; i ponti collegano sempre due e solo due isole tra di loro, sono paralleli ai bordi delle caselle, non si intersecano mai tra di loro e possono esserci più ponti che collegano la medesima coppia di isole.

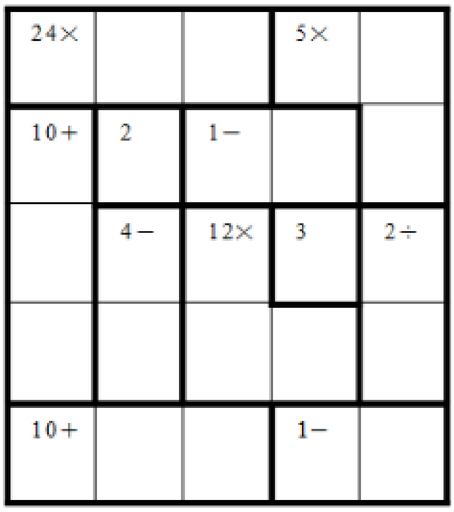
Il numero di ponti partenti da ogni isola è indicato all'interno della casella rappresentante l'isola. Ricostruire la posizione dei ponti sapendo che da ogni isola deve essere possibile raggiungere ogni altra isola.

N.B.: nella versione standard dell'Hashi si pone un limite massimo di 2 ponti tra ogni coppia di isole.

	5			2			3	
2					1	7		8
4		7	6					
					5			
5	2						4	7
			7					
					3	5		4
3		6	5					1
	9			7			6	

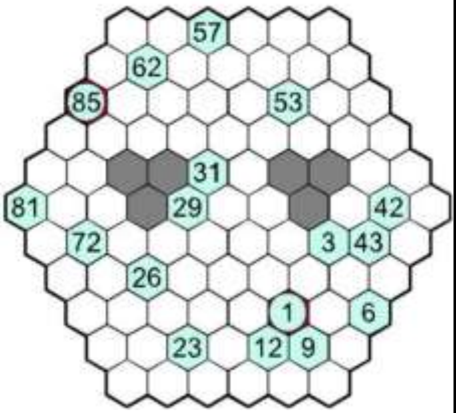
Sudoku - da RM124

Riempire ogni cella con una cifra da 1 a 9 in maniera tale che ogni riga, ogni colonna ed ogni riquadro 3x3 con i bordi più spessi contenga tutte le cifre da 1 a 9



KenKen- da RM192

Riempire ogni riquadro con una cifra da 1 ad n (5 nell'esempio) in maniera tale che effettuando l'operazione riportata in ciascun blocco tra le sue cifre, si ottenga esattamente il risultato richiesto.



Hidato (hex) - da RM303

Partendo dal numero 1 costruire una catena di esagoni, aventi tra di loro un lato in comune, con tutti i numeri in successione

Ma cosa hanno in comune Sudoku, KenKen, Hidato, Shikaku, Numberlink ed Hashi? Perché possiamo accomunare questi giochi in una stessa categoria ludica che viene solitamente definita "puzzle"?

Prima di tutto perché sono tutti dei giochi da risolversi in solitaria su uno schema con delle regole ben precise e con una soluzione unica. Ancora, sono giochi che non presuppongono alcuna conoscenza "culturale" se non, in alcuni casi, l'aritmetica di base delle 4 operazioni. In ultimo, sono tutti giochi per cui, date le regole, possono essere prodotti a mano o tramite programmi per computer un numero innumerabile di schemi da risolvere.

La lista dei puzzle esistenti non contiene ovviamente solo quelli elencati sopra ma possiamo trovare: Slitherlink, Kakuro, Fillomino, Heyawake, Hitori, Light Up, Masyu, Nurikabe e tanti, tanti, tanti altri generi. Abbiamo detto che non si presuppongono conoscenze particolari, neanche di matematica, per le risoluzioni di questi schemi ma la pura e semplice logica. Bisogna però evidenziare che una base di matematica spesso aiuta e può semplificare la risoluzione di alcuni schemi, ad esempio a volte si può procedere analogamente ad una dimostrazione "per assurdo" mentre altre volte possono venire in aiuto conoscenze basiche di topologia.

Non dovrebbe quindi sorprendere i lettori di RM sapere che se c'è un audience di appassionati di questo tipo di puzzle che possono trovarli su riviste in edicola, su siti specializzati, su app per cellulari e, come anticipato, in Campionati Mondiali.

Il WPC - *World Puzzle Championship* - è organizzato dalla *World Puzzle Federation* - WPF - che conta federazioni nazionali affiliate in decine di paesi del mondo, in Italia la *Federazione Italiana Sudoku e Puzzle* (FISP), ed ogni anno richiama tra i 150 ed i 200 appassionati ognuno in rappresentanza della propria nazione. Nell'arco di tre giorni ai partecipanti vengono sottoposti centinaia di puzzle da risolvere in decine di round a tempo che si svolgono dalla mattina alla sera. Alla fine del campionato viene stilata sia una classifica individuale che una classifica dei team nazionali, ogni nazione può infatti schierare un team di 4 membri. A partire dal 2006, anno che ha rappresentato il boom mondiale del sudoku, la WPF ha affiancato al WPC anche il *World Sudoku Championship* - WSC - che ormai si svolge ogni anno nei 3 giorni precedenti il WPC ed è ovviamente incentrato su sudoku e tutte le varianti possibili di questo specifico puzzle. Gli appassionati che partecipano ad entrambi i campionati, e sono tanti, fanno quindi una full-immersion di sudoku ed altri puzzle per un'intera settimana.

1 *2022 World Puzzle Championship, Varsavia, partecipanti subito prima del via.*

La *community* che si è creata intorno ai puzzle è ormai ben consolidata, anche se purtroppo non numerosa, ed oltre a WPC e WSC ci sono altri appuntamenti periodici a cui prendono parte gli appassionati di tutto il mondo: diversi contest online sono organizzati nel corso dell'anno sia dalla stessa World Puzzle Federation che dalle federazioni delle singole nazioni. Contest che, a volte, servono proprio per individuare la squadra di 4 persone che rappresenterà la singola nazione nei successivi Campionati Mondiali. Le Nazioni più forti rappresentate nel WPC, e che possono vantare predominio sia nella classifica individuale che in quella a squadre, sono senza dubbio USA, Germania e Giappone che a partire dal 2010 si sono divise tutti e 3 i gradini del podio, alternando ogni volta l'ordine delle medaglie, sia della classifica a squadre che di quella individuale ad eccezione di un singolo bronzo per la squadra Ungherese nel 2017 ed un argento individuale per un Indiano nel 2022. Nei WSC le cose sono solo leggermente più movimentate senza un predominio così netto di sole tre nazioni ma comunque negli ultimi 10 anni si sono alternati sui tre gradini del podio solo sette persone: due giapponesi, due cinesi, un estone, un ceco ed un francese con Germania e USA che hanno conquistato "solo" dei podi a squadra ma non individuali.

E l'Italia? Come detto, l'Italia ha una sua federazione, la FISP, ed è sempre stata presente sia ai WPC che ai WSC a partire dal 2005 ed ha anche ospitato il primo WSC nel 2006 a Lucca (fino al 2010 WPC e WSC si svolgevano in nazioni diverse). Il miglior risultato per un italiano nella classifica individuale in un WPC è per Giuliano Montelucci, ventinovesimo a Toronto nel 2023, mentre a livello di team nazionale il miglior piazzamento è un quattordicesimo posto in Croazia nel 2012. Per quanto riguarda il WSC, invece, il miglior piazzamento individuale è per Giulia Franceschina, diciannovesima a Lucca nel 2006, ed un undicesimo posto di team in Slovacchia nel 2009.

Risultati non d'altissima classifica ma neanche da sottovalutare, i primi in classifica hanno infatti una velocità di risoluzione di puzzle che non sembra umana, e a cui possiamo aggiungere anche due bellissime medaglie d'oro e due d'argento ad altrettanti WPC per il connazionale Stefano Forcolin nella speciale classifica *Over 50* che viene premiata a partire dai campionati di Beijing del 2013 e 4 bronzi ai WSC nelle classifiche *Over 50*, due ancora di Stefano Forcolin ed una di Laura Tarchetti, e *Under 18*, per Valerio Stancanelli.

2 *Foto di gruppo dei partecipanti al WPC del 2022.*

Insomma: il movimento italiano esiste ed è attivo ma conta poche decine di appassionati, c'è quindi tanto spazio per altri *solutori più che abili* che abbiano voglia di cimentarsi in sfide a tempo su giochi di logica e che vogliano confrontarsi con altri appassionati italiani e, perché no?, anche mondiali. Per i campionati cinesi di ottobre 2024 le squadre sono già formate ma nell'autunno del 2025 sono previsti i campionati in Ungheria e, prima di allora, tanti contest on-line su cui esercitarsi (e divertirsi!) per farsi trovare pronti e magari schierare qualche faccia nuova in terra Magiara.

2. Problemi

2.1 Pronti per Natale?

No, non siamo impazziti. Ma quest'anno ci lanciamo nel business e, per motivi che vi saranno chiari nel prosieguo, dobbiamo prepararci da prima di subito.

L'idea è di vendere alberi di Natale.

Il nostro fornitore ha deciso di lavorare su dati certi (lui può permetterselo...), quindi intende mettere a dimora esattamente il numero di alberi che sa di venderci, e quindi dobbiamo fare l'ordine esatto al più presto. E non potremo cambiarlo in corso d'opera.

Quello che noi sappiamo è che venderemo da 0 a 100 alberi (o, se preferite, da 0 a n), con probabilità uniforme su tutti i valori (eh? Sì, interi, ovvio); se compriamo troppi alberi, questi ci restano sul gobbo (no, non possiamo tenerli per l'anno prossimo: l'unica cosa che possiamo fare è regalarli a un servizio di rimboschimento, che ci dirà "grazie!", ci farà un bel sorriso e amici come prima), se invece ne compriamo troppi pochi, venduti quelli smetteremo di guadagnare.

Il nostro fornitore ci ha garantito che ci venderà gli alberi a 3 euro (o, se preferite, a v euro) l'uno, senza possibilità di offerte speciali o sconti: a Natale son tutti più buoni, ma si paga adesso e qui è luglio. La nostra intenzione è di rivenderli a 4 euro (o, se preferite, a r euro) l'uno e diventare il più ricchi possibile.

Visto che dobbiamo ordinare adesso gli alberi, si tratta di fare il business case, e avete già capito dove vogliamo andare a parare: quanti alberi dobbiamo comprare?

Sappiamo che il vostro intuito vi avrà già fatto notare che la generalizzazione del problema è insita nel problema medesimo: quindi, niente espansioni, stavolta.

Fateci sapere, e Buon Natale!

2.2 Promesso, è l'ultimo!

...diciamo sempre così, poi non è vero; ma questa volta forse abbiamo trovato il problema definitivo "dei cappelli" (sì, i soliti con i nani e l'orco che mette i cappelli in testa); non solo, ma siamo reduci da una roba piuttosto faticosa che richiedeva la collaborazione di un certo numero di gatti di Schroedinger (sì, stanno bene e vi salutano tutti: non fate domande, a tempo debito ve ne parleremo). Cerchiamo, una volta tanto, di trovare un'ambientazione meno sanguinaria del solito.

Rudy, nella parte dello studioso di telepatia incentivata (quella che dice che se hai un incentivo aumenti le capacità telepatiche), ha proposto il seguente esperimento ad Alice e a Doc: ciascuno di loro sarà nella propria stanza, tirerà una moneta e dovrà indovinare il *risultato ottenuto dall'altro giocatore*, comunicandolo a Rudy. Se uno dei due (sì, ne basta uno: se ci azzeccano tutti e due, conta uguale) dice il risultato corretto, allora entrambi ricevono una birra e si ricomincia; se nessuno dei due ci azzecca, Rudy si beve tutte le birre restanti lasciando a becco asciutto gli altri due.

Bene, i pochi secondi necessari a Rudy per andare a prendere le prime due birre e poi si parte! Voi due, non state a chiacchierare troppo! Nelle vostre stanze, *marsch*!

Qualcuno ha un'idea?

3. Bungee Jumpers

Generalizzate il problema della ricerca delle terne pitagoriche nel seguente modo:

Mostrate che l'equazione

$$x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + x_3^{\,2} + \cdots + x_{n-1}^{\,2} + x_n^{\,2} = y_n^{\,2}$$

ha soluzioni intere diverse da zero $x_i=a_i$, con $i = 1, 2, \ldots, n$ e con $y_n=b_n$ per n=2, 3, 4, ...

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Luglio!

Presto, che è tardi.

4.1 [305]

4.1.1 Divide et Impera

I nostri eroi ricominciano a giocare con le monetine, che carini:

> *Rudy e Doc dividono N monetine in M mucchietti, quindi i due giocatori si alternano nel compiere un'operazione: questa operazione può essere di due tipi:*
>
> - *Divide richiede che un mucchietto venga diviso in due mucchietti; ognuno dei due mucchietti risultanti deve contenere almeno una monetina.*
> - *Impera sottrae una monetina da ogni mucchietto.*
>
> *Comincia Rudy, e perde il primo che fa diminuire il numero dei mucchietti, esaurendone uno. Se ci sono* 7 *mucchietti di* 7 *monete ciascuno, Rudy ha una strategia per vincere? Se abbiamo* $M \geq 1$ *mucchietti composti da* $n_1 \geq 1$, $n_2 \geq 1$, *…,* $n_M \geq 1$, *chi vince?*

Andiamo un po' di corsa, così non vi diciamo che il Capo ha recentemente ripreso il suo vecchio amore della teoria dei giochi, quindi aspettatevi il peggio. Oh… appena detto. Partiamo da ***Valter***, la cui soluzione è quasi senza parole:

> Prima una premessa; la frase: "…perde il primo che fa diminuire il numero dei mucchietti, esaurendone uno" è da intendersi?: "…perde il primo che fa diminuire il numero *di monetine*, *dai* mucchietti, esaurendone *almeno* uno."; lo chiedo perché i due giocatori, sino a quando possono, eseguono l'operazione: "Divide". Cioè, piuttosto che eseguire un "Impera" che li farebbe perdere, proseguono con "Divide".
> Ciò dovrebbe portare, se non si inizia con uno solo, a più mucchietti con una monetina (solo a quel punto un giocatore sarà costretto ad eseguire "Impera" e, quindi, a perdere).
>
> Per brevità, da qui in poi uso: monete invece di monetine e pile al posto di mucchietti.
>
> <u>(*) Inizio esaminando il caso in cui almeno una delle pile in partenza contiene una sola moneta.</u>
>
> I due giocatori, in questo caso, sino a quando possono, eseguono l'operazione "Divide". Se uno dei giocatori eseguisse "Impera" perderebbe perché esaurisce almeno una pila. Il gioco si svolge, quindi, sino a quando è possibile, eseguendo l'operazione "Divide".
>
> Considero il numero di pile che hanno più di una moneta; escludendo dai conteggi le altre. Calcolo il numero totale di monete presenti nelle sole pile che hanno più di una moneta. Sottraggo, dal totale calcolato di monete, il numero di pile che hanno più di una moneta. Chiamo, per brevità, tale valore, ottenuto dalla sottrazione, "S", perché servirà più avanti.
>
> Faccio notare che le operazioni "Divide" e "Impera" fanno cambiare la parità di "S"; dettaglio poi. Se "S" è dispari è il primo a giocare a vincere il gioco altrimenti è il secondo a vincere. Nel primo caso, cioè totale dispari, è il primo a giocare a poter eseguire per ultimo "Divide" (il secondo a giocare, quindi, dovendo eseguire poi "Impera" su pile con una sola moneta, perde). Nell'altro caso, cioè totale pari, il secondo a giocare è l'ultimo a poter eseguire "Divide" (il primo a giocare, quindi, dovendo poi eseguire "Impera" su pile con una sola moneta, perde).
>
> <u>Esamino ora il caso il cui tutte le pile presenti all'inizio hanno, almeno, due monete.</u>
> Considero come prosegue il gioco a fronte delle operazioni che può eseguire il primo a giocare (se il primo vincerebbe con 1. non serve considerare 2. e 3.; altre strategie non esistono):
>
> 1. il primo a giocare esegue l'operazione "Divide" creando una nuova pila con una moneta: ci si riconduce alla situazione esaminata sopra (*) scambiando primo e

secondo a giocare. Il primo a giocare, quindi, la esegue solo se il secondo è messo in posizione perdente. Questo significa che il primo a giocare la esegue se, prima del "Divide", "S" era dispari. Con "S" dispari il numero di monete e quello delle pile devono avere parità diversa. Con tale "Divide", che crea una, o due pile nel caso che divida una pila di due monete,

si passa all'avversario un "S" pari con almeno una pila di una moneta quindi perdente (in questa disposizione la parità di "S" passa a dispari; mostro i due casi possibili):

1.1. se crea una sola pila con una moneta, il numero monete da considerare diminuisce di uno

1.2. con due pile di una moneta, il numero di pile scende di uno, quello delle monete di due (si hanno due pile di una moneta se il giocatore esegue "Divide" in una pila di due monete).

2. il primo a giocare esegue l'operazione "Divide" creando una nuova pila con più di una moneta: considero 2. solo se, eseguendo 1., si avrebbe una posizione vincente per l'altro giocatore. Anche qui, però, con le stesse considerazioni fatte in 1., il secondo a giocare vincerebbe.

3. Il primo a giocare esegue l'operazione "Impera" riducendo tutte le pile di una moneta. Come detto al punto 2., è da considerare solo se, eseguendo 1., vincerebbe l'altro giocatore. Sappiamo, come detto in 1., che è da verificare solo se, prima di eseguirla, "S" era pari. Con "S" pari il numero delle pile e delle monete da considerare hanno la stessa parità (ricordo che sono da considera solo le pile con più di una moneta e le monete in tali pile). Con "Impera" si riduce il numero di monete del numero di pile quindi la parità di "S" non varia. I due giocatori, quindi, con "S" pari, sinché possono, eseguiranno l'operazione "Impera". Intendo dire che eseguiranno "Impera" fino a quando tutte le pile hanno più di una moneta. A quel punto, con almeno una pila con due monete, chi deve giocare vince o perde in base a (ricordo che sappiamo da prima che, comunque, se decidesse per "Impera" perde sicuramente):

3.1. se con "Impera" lascia all'avversario una configurazione di pile con "S" pari ha vinto

3.2. se con "Impera" rimane una configurazione di pile con "S" dispari ha vinto l'avversario.

Concludendo, per sapere quale dei giocatori vince va fatta la seguente verifica a inizio gioco:

- si simula l'operazione "Impera" sino a restare con almeno una delle pile di una sola moneta
- se, a quel punto, chi di turno a giocare si ritrova con "S" pari "perde" altrimenti "vince"
- resta quindi solo da definire chi è il giocatore di turno a quel punto per sapere chi vince:
    - è chi ha iniziato a giocare se sono state eseguite un numero dispari di operazioni "Impera"
    - è il secondo iniziare a giocare se sono state eseguite un numero pari di operazioni "Impera".

Ricordo che: "S" = (numero totale monete in pile con almeno due monete) - (numero tali pile).

Nel caso di 7 pile con 7 monete ciascuna:

- eseguendo sei operazioni "Impera" si ottengono alla fine sette pile con una sola moneta

- a quel punto è di turno chi ha iniziato a giocare; potendo eseguire solo "Impera" perde.

Tutto questo pistolotto si può ridurre a poche parole che risolvono le domande del problema: (l'ho fatto perché sovente sono accusato giustamente di essere poco chiaro; …almeno ci provo):

- se "S" dispari, vince chi inizia per primo a giocare
- se "S" pari, ha una strategia vincente il secondo a giocare.

A corollario, come sovente, inizialmente avevo interpretato diversamente il problema.
"Impera" l'avevo intesa che eliminasse una moneta da uno solo dei mucchietti presenti (forse, oltre alla solita mia distrazione, sono stato ingannato da: "…esaurendone uno"). La soluzione che ho trovato, se corretta, è un po' più elaborata di quella prevista (però mi pare di aver trovato uno "stratagemma" che mi ha permesso di semplificarla).

Speriamo di aver impaginato più o meno coerentemente, a volte abbiamo dei problemi con ***Valter***. Passiamo ora alla versione di ***Alberto R.***, il grande fustigatore:

Un mucchietto di K monetine può essere diviso in due mucchietti K-1 volte, al termine delle quali il mucchietto di K monete si è trasformato in K mucchietti unitari (cioè formati da un'unica moneta) quindi indivisibili. Questo risultato è indipendente dal modo in cui sono fatte le singole divisioni. Quindi un mucchio, poniamo, di 5 monete può subire l'operazione "Divide" 4 volte, indipendentemente dal fatto che, ad esempio, il primo "Divide" consista nella trasformazione di 5 in 3+2 o in 4+1.

Se dunque abbiamo N monete ripartite su M mucchietti l'operazione Divide può essere eseguita D volte con

$$D = N - M$$

"L'operazione Impera sottrae una monetina da ogni mucchietto" e "perde il primo che fa diminuire il numero dei mucchietti esaurendone uno". Ciò significa che se sul tavolo c'è anche un solo mucchietto unitario (cioè una moneta solitaria) l'operazione Impera decreta la sconfitta di chi la esegue.

1° caso) D è dispari

Supponiamo che io giochi per primo. Se sia io che il mio avversario usiamo solo l'operazione Divide e io faccio la prima mossa, con D dispari farò anche l'ultima, lasciando l'avversario con N gruppi unitari cioè sconfitto. Ma come faccio a costringere il mio avversario a eseguire solo l'azione Divide? Semplice: eseguendo alla prima mossa un Divide che produca (se non esiste già) un mucchietto unitario e ciò impedisce per sempre al mio avversario di eseguire un Impera. **Conclusione**: se N e M hanno parità opposte (quindi D è dispari) chi gioca per primo ha una strategia vincente.

2° caso) D pari con M ed N entrambi dispari

Io che gioco per primo, sia che esegua un Divide che un Impera, trasformerò il D pari in un D dispari, sicché ora il mio avversario vince perché si trova nelle stesse condizioni in cui mi trovavo io nel 1° caso. **Conclusione**: con N e M sono entrambi dispari chi gioca per secondo ha una strategia vincente.

3° caso) D pari con M ed N entrambi pari

Io che gioco per primo non posso giocare un Divide perché lascerei un D dispari al mio avversario che vincerebbe trovandosi nella stessa situazione in cui ero io nel 1° caso. Se invece gioco un Impera lascio la situazione immutata, cioè D, M, N che erano tutti pari restano tutti pari, però in tal caso il mio avversario può ripagarmi con la stessa moneta facendo la mia stessa mossa, ma fino a quando? Ad ogni Impera ogni mucchietto diminuisce di 1, ma quando, così facendo, il mucchio più piccolo formato da K monete è ridotto a una sola moneta l'operazione Impera non è più possibile e non resta che eseguire un Divide che però conduce alla sconfitta per il meccanismo descritto al caso 1. Ciò accadrà a me se K è dispari o al mio avversario se K è pari. **Conclusione**: Con M ed N entrambi pari, detto K il numero di monete del mucchietto più piccolo, vince chi gioca per primo se K è pari, chi gioca per secondo se K è dispari

Postilla: Bello il titolo "Divide et Impera", ma io, parafrasando Thackeray, avrei chiamato questo problema "La fiera delle parità".

Il Capo ha trovato il titolo fantastico, ma Siamo un tantino preoccupati che ***Alberto*** non abbia trovato problemi nella formulazione, ma passiamo avanti, il prossimo è ***Galluto***:

Supponiamo per un attimo che l'unica operazione consentita sia la Divide.

Il gioco si ridurrebbe ad una noiosa sequenza di suddivisioni e risuddivisioni dei vari mucchietti, fino ad arrivare a N mucchietti con una sola monetina, e l'ultima mossa valida sarebbe la suddivisione dell'ultimo mucchietto di due monetine in due mucchietti mono-monetina; il giocatore che potesse effettuare questa ultima mossa sarebbe il vincitore.

Ora, qualunque strategia di suddivisione di un mucchietto di n monetine, porta ad n mucchietti di una sola monetina nello stesso numero di mosse, che sono n-1; ad esempio, se parto da un mucchietto di 4 monetine, arrivo a quattro mucchietti mono-monetina sia se all'inizio lo divido in due mucchietti da 2, sia se lo divido in un mucchietto da 3 ed uno da 1, e sempre in tre mosse. Né una Divide applicata ad un mucchietto ha effetto su tutti gli altri mucchietti.

Quindi, se non ci fosse la Impera, il numero di mosse totali sarebbe pari alla somma delle n_i-1 mosse possibili per ciascuno degli **i** mucchietti iniziali.

Se questa somma è dispari, chi comincia vincer, perché sarebbe sua anche l'ultima mossa valida; se la somma fosse pari, chi comincia perde di sicuro, perché lascerebbe la situazione "dispari" all'avversario.

Torniamo al gioco completo, con tutte e due le operazioni possibili:

- Se il numero iniziale di mosse totali (cioè, la somma delle n_i-1 mosse di tutti gli **i** mucchietti) è **dispari**, chi comincia effettua una Divide suddividendo un qualsiasi mucchietto in due, di cui uno contenete una sola monetina; **in questo modo "sterilizza" la Impera** (che esaurirebbe il mucchietto mono-monetina) e si garantisce la vittoria dopo la noiosa sequenza di mosse già discussa più sopra
- Se il numero di mosse iniziale è **pari**, bisogna vedere quanti sono i mucchietti iniziali (cioè quanto è **i**)
    - Se **i** è dispari, sia una Divide che una Impera lascerebbero all'avversario un totale dispari, e l'avversario vincerebbe con la strategia del punto precedente; per inciso, questa è la situazione della domanda di "riscaldamento", con 7 mucchietti di 7 monete ciascuno: le mosse sono 7*6= 42, e cioè pari, la Divide ne lascerebbe a Doc 41 e la Impera ne lascerebbe 42-7=35, e quindi Rudy non ha una strategia vincente
    - Se **i** è pari, il primo a giocare, con una Impera, può lasciare al secondo un totale ugualmente pari; ad esempio, con 6 mucchietti di 7 monete, il totale iniziale è 6*6=36, ma una Impera toglie 6 mosse e ne lascia 30 (comunque pari) al secondo: ovviamente il secondo giocatore può replicare esattamente con la stessa strategia, e così via, finchè, a furia di Impera, il mucchietto che nasceva più piccolo non si è ridotto ad sola monetina, impedendo una ennesima Impera; e perciò, vince il primo giocatore se le Impera possibili sono in quantità dispari (e quindi il mucchietto più piccolo nasce pari) e vince il secondo in caso contrario

Riassumendo:

Totale iniziale mosse	Numero iniziale mucchietti	Monete iniziali del mucchietto più piccolo	Esito
Dispari	Qualsiasi	Qualsiasi	Vince il primo giocatore
Pari	Dispari	Qualsiasi	Vince il secondo giocatore
Pari	Pari	Pari	Vince il primo giocatore
Pari	Pari	Dispari	Vince il secondo giocatore

Benissimo, ancora una soluzione, da ***Bluemonday***:

Statement Strategia Vincente. Siano N monete divise in m pile. Allora se abbiamo $N \neq m \bmod 2$ abbiamo una strategia vincente in virtù del Teorema 1. Se invece $N = m \bmod 2$ abbiamo una strategia vincente in virtù del Teorema 2 se e solo se la dimensione della pila più piccola che chiameremo h è pari e N è pari.

Statement Teorema 1. Se $N \neq m \bmod 2$ la strategia vincente è fare Divide con la pila più piccola e creare una nuova pila di dimensione 1.

Proof. Facendo questa mossa, nessuno dei giocatori potrà più usare la mossa Impera perché se la facesse, andrebbe a ridurre il numero di pile e perderebbe. Quindi d'ora in poi tutte le mosse saranno Divide. Ogni mossa D va ad aumentare di 1 il numero di pile e dunque fa invertire la parità di m. Poiché N resta invariato, la disuguaglianza diventa uguaglianza e viceversa a ogni turno.

Nel caso limite uno dei giocatori avrà davanti a sé N pile da 1. In questo caso $N = m$ e dunque $N = m \bmod 2$. Questo caso è perdente: una mossa D o I risulta comunque in una riduzione di pile. Poiché abbiamo iniziato con $N \neq m \bmod 2$ e in virtù dell'alternanza dei giocatori e delle uguaglianze, in ogni nostro turno rimarrà sempre $N \neq m \bmod 2$, quindi dimostriamo che sarà il nostro nemico a dover perdere e quindi noi vinciamo.

Statement Teorema 2. Se $N = m \bmod 2$ una strategia vincente esiste se e solo se N è pari e h è pari (dove con h indichiamo la dimensione della pila più piccola) e in questo unico caso la strategia e fare Impera.

Proof. Assumiamo $N = m \bmod 2$.

Notiamo innanzitutto che se vogliamo vincere, non possiamo fare la mossa D: questa mantiene N invariata e cambia la parità di m, e regaleremmo così una configurazione vincente in virtù del teorema 1 al nostro avversario.

Assumiamo ora anche $N = 0 \bmod 2$

Possiamo dimostrare che in questo caso vinciamo solo per i casi in cui h è pari per induzione su h.

Casi base:

Se $h = 1$, vuol dire che abbiamo almeno una pila di 1 moneta e possiamo usare lo stesso ragionamento del teorema 1 per vedere che sia noi e l'avversario siamo costretti a fare varie mosse D. Ma abbiamo già notato che non possiamo fare una mossa D senza regalare la vittoria, quindi perdiamo sicuramente.

Se $h = 2$, vinciamo facendo I: poiché sia N e m sono pari, il nuovo numero di monete sarà $N - m$, pari e il numero di pile resta invariato. Inoltre questa nuova configurazione avrà sicuramente un nuovo $h' = h - 1 = 1$, quindi il nostro avversario si troverà nel caso precedente, che è per forza perdente e noi vinciamo.

In generale, assumendo vero il teorema per $h = 1, 2, ..., k - 1$, Se k è pari e poiché so anche che N è pari, posso fare impera, ottenendo una nuova configurazione dove i nuovi N e m hanno la stessa parità, e il nuovo $h' = h - 1 = k - 1$ è dispari, che è perdente per induzione, e quindi vinco. Mentre se k è dispari non posso fare Impera perché andrei in un caso che è sicuramente vincente per induzione. Poiché non posso nemmeno fare D per l'osservazione iniziale, sono spacciato.

Assumiamo ora invece $N = 1 \bmod 2$.

> In questo caso è facile vedere che facendo *I* andrò a invertire l'uguaglianza, e quindi per il Teorema 1, regalo una configurazione vincente al mio avversario. Poiché non posso neanche fare *D*, perdo sicuramente.

Anche qui, abbiamo fatto un po' di pasticci con il formattamento, speriamo bene. Ci fermiamo qui e passiamo di corsa al secondo problema.

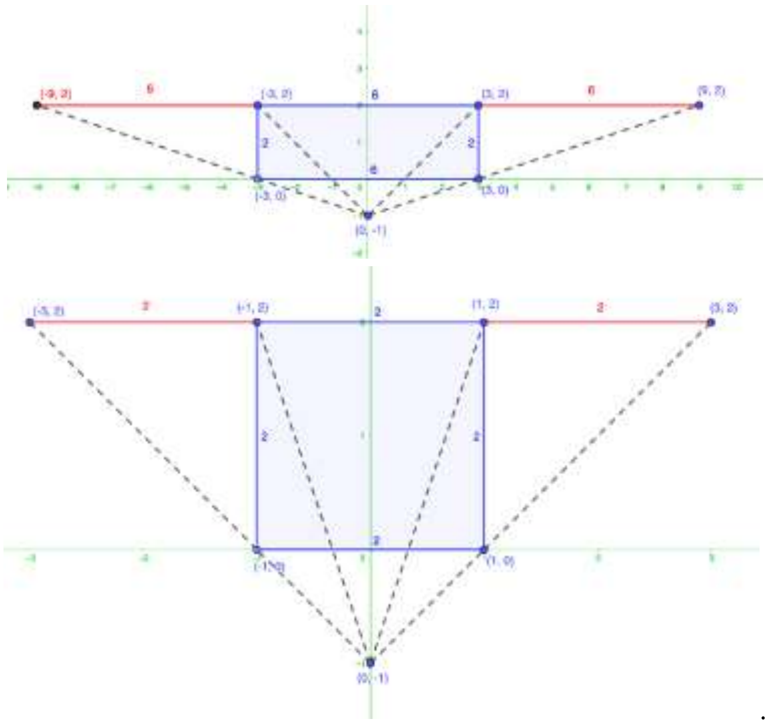
4.1.2 Oltre il giardino

Finalmente un problema geometrico! Capo, le bende ti fanno più simpatico… ecco il testo:

> *Il giardino è un rettangolo le cui dimensioni (espresse in metri) sono interi, e ai cui quattro vertici ci sono quattro alberi. Da un punto di vista P, il punto medio del lato più vicino dista un metro e gli alberi sembrano tutti sulla stessa linea e equispaziati. Quanto è grande il giardino? E se lasciamo cadere l'ipotesi che i lati siano degli interi e sapendo che il giardino è quadrato?*

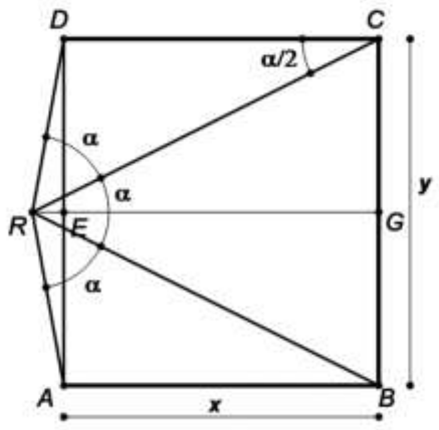
Partiamo da ***Valter***, la cui soluzione è quasi senza parole:

> I giardini che soddisfano i requisiti del problema hanno base un intero e altezza due metri (il giardino che è, pure, quadrato ha, quindi, sia la sua base che l'altezza di due metri):



La seconda soluzione è quella di ***trentatre*** e ci dà un po' più di dettagli:

> In figura la soluzione: il giardino *ABCD* con Rudy posto in *R* e l'angolo *DRA* diviso in tre parti α uguali; i lati *AB*, *BC*, *CD* sono quindi visti da *P* sotto lo stesso angolo α



- i lati del giardino sono $x = AB = EG = DC$ e $y = AD = BC$ con $RE = 1$
- valgono le

$RC^2 = (1+x)^2 + y^2/4$

$RD^2 = 1 + y^2/4$

- dal triangolo (RCD) per il teorema dei seni

$DC/RD = \sin(\alpha)/\sin(\alpha/2) = 2\cos(\alpha/2)$

$RC\cos(\alpha/2) = 1+x$

- da cui

$$\cos(\alpha/2) = \frac{x}{2RD} = \frac{1+x}{RC}$$

- sostituendo i valori trovati si ha la relazione fra i lati

$$\frac{x^2}{4+y^2} = \frac{(1+x)^2}{(1+x)^2 + y^2/4}$$

- che separando y^2 si riduce a

[1] $\boxed{1 + y^2/4 = x^3/(2+3x)}$

- trovare da questa l'<u>unica coppia</u> (x, y) di <u>interi positivi</u> è un complicato problema algebrico
- ho ripiegato sul solito trucco: un programma che valuta le m^2 coppie con i due valori nell'intervallo $[1, m]$; l'unica soluzione per $m = 1000$ (un giardino di 1 kmq) è

$\boxed{x = 10,\ \ y = 11}$.

Nel caso del giardino quadrato basta porre $y = x$ in [1] e si ha l'equazione del 3° grado

$(4 + 4x - x^2)(2 + x) = 0$

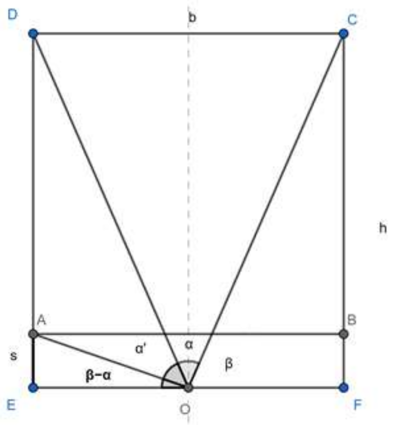
- dove chiaramente la sola soluzione è la radice positiva di $4 + 4x - x^2 = 0$

$\boxed{x = 2 + \sqrt{8} = 4.82843}$.

Non vi preoccupate delle differenze e preparatevi alla versione di ***Galluto***:

Anche questo problema lo ho risolto a quattro mani con ***Salvatore***.

Il fatto che Rudy veda i 4 alberi equispaziati significa che (i) gli angoli di visuale tra gli alberi sono tutti e tre uguali e che (ii) sta, ad una distanza di un metro dal punto medio del lato del giardino, sulla perpendicolare al lato stesso, altrimenti per vedere i quattro alberi equispaziati il segmento che unisce i due alberi posteriori non sarebbe parallelo al lato vicino a Rudy; quindi il disegno è il seguente:



Partiamo da un rettangolo qualsiasi DCEF, di base *b* ed altezza *h*, con O, punto medio di EF, posizione di Rudy e quindi punto di "Osservazione".

Chiamiamo α l'angolo COD e ß l'angolo EOD (e COF).

Tracciamo un segmento AB, parallelo a EF e distante s da EF stesso, con s tale che l'angolo DOA sia uguale ad α; di conseguenza l'angolo AOE è uguale a $\beta - \alpha$.

Il giardino di Rudy è il rettangolo ABCD, di base b e altezza (h-s), e i quattro alberi stanno in A, B, C e D

Considerando i vari triangoli rettangoli possiamo scrivere:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{b/2}{h} = \frac{b}{2h} \quad \tan\beta = \frac{h}{b/2} = \frac{2h}{b} \quad \tan(\beta-\alpha) = \frac{s}{b/2} = \frac{2s}{b}$$

Applicando le formule di sottrazione e duplicazione della tangente e dopo sostituzioni assortite (tutti i passaggi in allegato), arriviamo alla seguente equazione generale:

$$s = h\frac{1-\frac{3}{4}\left(\frac{b}{h}\right)^2}{3-\frac{1}{4}\left(\frac{b}{h}\right)^2}\ (1)$$

A questo punto poniamo s = 1 e cerchiamo le soluzioni per b ed h (e quindi anche h–1) interi

$$h\left(1-\frac{3}{4}\left(\frac{b}{h}\right)^2\right) = 3-\frac{1}{4}\left(\frac{b}{h}\right)^2\ (2)$$

Se il rapporto $\frac{b}{h} = 1$, l'equazione qua sopra si semplifica in $\frac{h}{4} = \frac{11}{4}$ e quindi h = b = 11, con il giardino di Rudy che misura 11 mt di base per 10 di altezza.

Il problema è dimostrare che questa è l'unica soluzione; per fare questo facciamo qualche altra trasformazione della (2) e arriviamo alla seguente forma:

$$b^2 = 4h^2\frac{h-3}{3h-1}\ (3)$$

e imponiamo che h sia un intero; perché lo sia anche b, e quindi b^2 sia il quadrato di un intero, deve essere un quadrato (di una frazione) anche $\frac{h-3}{3h-1}$ visto che ovviamente è un quadrato di un intero $4h^2$; cioè:

$$\frac{h-3}{3h-1} = \frac{n^2}{d^2}$$

Con n (numeratore) e d (denominatore) interi positivi ed n < d; ora, n può essere qualsiasi, ma d deve essere tale da "semplificarsi" con tutto o parte di $4h^2$ o altrimenti rimarrebbe nella (3) una parte al denominatore e b non sarebbe un intero.

Il caso banale di b = h corrisponde a d = 2 (ed n = 1) per cui $d^2 = 4$ si semplifica con il 4 di $4h^2$ e da $\frac{h-3}{3h-1} = \frac{1}{4}$ si ricava velocemente (come già visto) h = 11.

Qualsiasi altra soluzione dovrebbe semplificare d^2 con una parte di h^2; cioè d dovrebbe essere uno dei fattori di h: h = d*e;

Allora $\frac{h-3}{3h-1} = \frac{n^2}{d^2}$ potrebbe essere scritta $\frac{ed-3}{3ed-1} = \frac{n^2}{d^2}$; ma <u>3ed–1 non può essere multiplo di d</u> (e non lo diventa quello che ne rimane dopo la eventuale riduzione ai minimi termini con il numeratore) e in particolare non può valere d^2 (o un suo multiplo); quindi l'uguaglianza non è possibile con d ed e interi, il denominatore non viene mai semplificato ad 1, b^2 è il quadrato di una frazione e non di un intero e dunque non ci sono altre soluzioni.

Con ogni probabilità ci sono modi meno tortuosi per arrivare al risultato, ma questo è l'unico che abbiamo partorito.

<u>2 caso (giardino quadrato)</u>

In questo caso, b = h – 1 e la (2) diventa:

$$h\left(1-\frac{3}{4}\left(\frac{h-1}{h}\right)^2\right) = 3-\frac{1}{4}\left(\frac{h-1}{h}\right)^2$$

Sviluppando arriviamo alla seguente equazione di terzo grado:

$$h^3 - 5h^2 - 5h + 1 = 0$$

le tre soluzioni sono:

h = – 1 (che scartiamo perché h deve essere positivo)

h = $\sqrt{3} - 2$ (che scartiamo perché b = h–1 sarebbe negativo)

h = $\sqrt{3} + 2 = 5{,}828$

e quindi il giardin(ett)o di Rudy in questo caso è un quadrato di lato di mt 4,828. Per inciso, in questo caso α è uguale a 45°.

…

N.B. esiste una altra soluzione, geometricamente ineccepibile, e che risolve sia il primo quesito che il secondo (cioè b ed h sono sia uguali che interi!), ma che richiede una verifica sulla fisiologia del proprietario del giardino: Rudy è una capra? O un qualsiasi altro animale (camaleonte, ragno zebra, …) con un'ampiezza visiva superiore a 270°?

Se è così, Rudy può stare al centro del suo giardinetto di ben 2 mt x 2 e anche così vedere i suoi alberi equispaziati, secondo angoli di 90°.

In altre parole, il testo del problema non vieta che Rudy sia a un metro dal lato più vicino (che poi, sarebbero tutti vicini nella stessa misura), ma standо dentro al giardino.

Questa soluzione si trova ponendo nella (1) (che, da brava equazione generale, rimane valida anche per s negativo!) s = –1; la (3) diventerebbe:

$$b^2 = 4h^2\,\frac{h-3}{1-3h}$$

e l'unico valore intero di h a cui corrisponde un b intero è h = 1 (se h > 3 il rapporto diventa negativo e b diventa un numero immaginario) e quindi b = 2, con un claustrofobico giardino di b = 2mt e h = 1 – (–1) = 2 mt.

Avete visto? Tutto torna, tutti i risultati sono validi, solo Rudy è particolarmente difficile da interpretare. Oppure, ha più interpretazioni di quante ci si aspetterebbe.

E qui ci fermiamo, che ancora una volta siamo in ritardo. Alla prossima!

5. Quick & Dirty

Grandi notizie! Rudy ha appena scoperto che il Piemonte è *in-quadrabile*! Nel senso che potete disegnare un *quadrato* (OK, un po' storto... ma non si può avere tutto dalla vita) che è tangente al Piemonte in quattro punti e lo contiene tutto.

Colta da invidia, Alice è sbottata in un "...non è possibile che, con il loro amore per la precisione, gli svizzeri abbiano fatto una nazione non *in-quadrabile*!". Potete darle una mano? Oh, non considerate le enclave o cose del genere: le nazioni sono considerate blocco unico. E la Terra, notoriamente, è piatta.

> *La cosa è possibile per qualsiasi nazione, purché in blocco unico. Iniziate chiudendo la Svizzera in un rettangolo: supponiamo i lati AB e DC in direzione Nord-Sud abbiano lunghezza a, e quelli AD e BC in direzione Est-Ovest abbiano lunghezza b (con, nel caso particolare, b>a).*
>
> *Iniziate ora a ruotare il rettangolo, allungando e accorciando i lati in modo da mantenere l'oggetto rettangolo e con sempre quattro punti di tangenza. Dopo una rotazione di 90°, il lato AD sarà stato sostituito dal lato BA e, da lunghezza b, sarà passato a lunghezza a con continuità, mente il lato BC subirà la trasformazione inversa, da a a b. Identico ragionamento per gli altri due lati.*
>
> *Ma essendo b>a, se le variazioni dei lati avvengono con continuità ci sarà un momento nel quale AD=BA, e in quel momento il rettangolo è un quadrato.*

6. Pagina 46

Risolviamo il problema per induzione.

Per n=2, l'equazione $x_1^2+x_2^2=b_2^2$ ha una soluzione x_1=3, x_2=4 e b_2=5; notiamo che 5 è dispari.

Supponiamo che per qualche n l'equazione:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 = y_n^2$$

abbia soluzioni intere $x_i=a_i$ e $y_n=b_n$ con b_n dispari pari a $2k+1$.

Notiamo che $(2k+1)^2+(2k^2+2k)^2=(2k^2+2k+1)^2$; di conseguenza, aggiungendo $(2k^2+2k)^2$ a entrambi i membri dell'identità:

$$a_1^2 + a_1^2 + \cdots + a_n^2 = (2k+1)^2$$

questa diventa:

$$a_1^2 + a_1^2 + \cdots + a_n^2 + (2k^2+2k)^2 = (2k^2+2k+1)^2$$

In altre parole, $x_1=a_1$, $x_2=a_2$, …, $x_n=a_n$, $x_{n+1}=2k^2+2k$ e $y_{n+1}=2k^2+2k+1$ sono soluzioni dell'equazione:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = y_{n+1}^2$$

e quindi l'equazione

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = y_n^2$$

ha soluzioni intere per ogni n=2, 3, …

Questa soluzione è attribuita a Sierpinsky.

7. Paraphernalia Mathematica

Abbiamo un problema, ma ne parliamo dopo. Cominciamo con un problema che siamo sicuri di avervi già fatto (probabilmente come Q&D) e, se non ve lo ricordate, non leggete il paragrafo dopo, che è la soluzione.

7.1 Numeri (per ora) senza nome

Il problema: Avete a disposizione due candele, delle quali sapete che bruciano irregolarmente, ma ciascuna di loro dura esattamente un minuto. Vi si chiede di misurare 45 secondi usando le candele. Come fate?

Piccola nota inutile che funge da separatore: Avete anche un accendino perfettamente funzionante.

La soluzione: Accendete una candela a un'estremità e la seconda candela a entrambe le estremità. Quando la seconda candela è esaurita (dopo 30 secondi), la prima candela avrà ancora una durata di 30 secondi: accendete anche la seconda estremità della prima candela: questo farà durare la parte restante 15 secondi che, sommati ai 30 precedenti, danno il risultato di 45 secondi richiesto.

Pare sia uno di quei problemi che quei simpaticoni di Risorse Umane vi fanno all'assunzione per misurare la vostra creatività; visto che buona parte di quelli che abbiamo conosciuto avevano un'educazione piuttosto limitata in matematica, ci chiediamo cosa sarebbe successo se avessimo proposto di espandere il problema. Siccome con certa gente è brutto fare domande senza avere la soluzione, studiare l'ambiente attorno è esattamente quello che intendiamo fare qui. E, come vi dicevamo, abbiamo un problema (linguistico), che poteste aver subodorato dal titolo. Abbiamo anche una specie di soluzione, ma non siamo sicuri sia quella giusta.

In inglese, i numeri "realizzabili" con un qualsiasi numero di candele (ciascuna delle quali brucia in un'unità di tempo) sono detti "fusible numbers" o, per brevità, "fuse numbers". La traduzione italiana ci ha riportato alla mente una vecchia barzelletta di quando eravamo giovani e non solo non c'era Internet, ma non c'erano neanche i circuiti integrati: "Il fusibile è quella componente del circuito del costo di cinque lire che viene salvata dal bruciare di un transistor del costo di ventimila lire" (sì, i transistor c'erano. Non siamo *così* vecchi). Ora, "numeri fusibili" a noi piace sicuramente più di "numeri fondibili" o "bruciabili", ma le preferenze personali non sono mai state un buon metodo per stabilire degli standard, quindi se trovate il nome corretto fateci sapere. Per ora, "fusibili" va benissimo.

Nella versione standard del problema, le candele durano una singola unità di tempo e l'unica operazione permessa è quella di accendere una o più estremità di alcune candele in un dato momento (scandito comunque da altre candele o a inizio della misurazione); un qualche artificio (ad esempio l'irregolarità delle candele) impedisce di "rompere a metà" una candela ed è vietato spegnerle per poi riaccenderle.

Per fare un po' di conti, cominciamo con il generalizzare il numero di candele: partiamo dall'idea di averne un numero piuttosto grande, in grado di soddisfare qualsiasi esigenza calcolatoria; ci chiediamo quali intervalli di tempo siano generabili.

Visto che possiamo sprecare candele (e che conosciamo la soluzione), a questo punto i Veri Matematici fanno una proposta: di far cadere la condizione "accendere una candela a un'estremità", mantenendo quella di "accendere la candela a due estremità"; e, in effetti, se vi serve misurare l'unità di tempo della candela, ne accendete una a due estremità e quando è finita ne accendete un'altra a due estremità... Certe volte, ci si chiede se il confine tra il genio e la follia non sia stato da tempo superato.

Generalizzando (in un altro senso), possiamo definire una generica operazione (detta all'inglese "fuse") tra due numeri x e y; se accendiamo un estremo della candela al momento x e l'altro estremo della stessa candela al momento y, dopo quanto tempo la candela sarà consumata?

Se non cominciamo a farci domande su x e y, la risposta è ragionevolmente semplice, e ne approfittiamo per introdurre un simbolo per indicare l'operazione:

$$x \sim y = \frac{x+y+1}{2}$$

Siccome appena diciamo "non fate domande su..." la prima cosa che fa una persona ragionevole è farsi domande, adesso che abbiamo trovato una formula generale possiamo chiederci *come misuriamo x e y* (a "candele", logicamente): semplicemente, con il metodo ricorsivo.

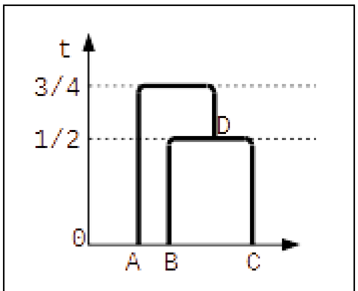
Infatti, se accendiamo entrambe le estremità al tempo zero, abbiamo che

$$0 \sim 0 = \frac{0+0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

e a questo punto, con qualche candela in più, possiamo ricavare altri tempi:

$$0 \sim \frac{1}{2} = \frac{0+\frac{1}{2}+1}{2} = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

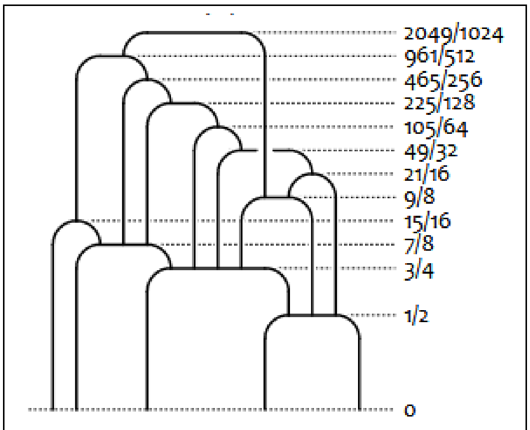
che è, sia detto tra parentesi, la soluzione al nostro problema originale: accendete un'estremità al tempo 0, e l'altra al tempo 1/2, ma per ottenere il tempo 1/2 vi serve un'altra candela accesa a entrambe le estremità al tempo 0... Forse viene più semplice con uno schemino, che trovate in figura. Nel tempo t=0 accendiamo un estremo della prima candela in A e due estremi della seconda candela in B e C; a t=1/2 la seconda candela si esaurisce e accendiamo l'altro estremo della prima candela in D; siccome adesso la mezza prima candela brucia a velocità doppia, impiegherà 1/4 del tempo ad esaurirsi, e quindi il tutto finirà a 3/4 dell'unità di tempo.



3 *Un paio di candele.*

Non sappiamo voi, ma a noi il disegnino sembra più chiaro rispetto alla descrizione attraverso i tilde... ma anche con i disegnini non si scherza: infatti, guardate quello dopo.

Se non siete rimasti sopraffatti da una cosa del genere qui di fianco (sì, vi servono *dodici* candele, e andate quasi sei centesimi di secondo sopra i due minuti, se non abbiamo sbagliato i conti), potreste porvi la domanda di *che tempi* si possano generare: tanto per cominciare, potete evidentemente (accendendo una candela a un'estremità, aspettando che finisca, accendendo un'altra candela a un'estremità, eccetera...) generare *tutti i naturali*; inoltre, con il trucco dell'accensione prima a un estremo e poi a un altro, potete generare anche altri intervalli, come abbiamo visto per il valore 1/2 e ¾ qui sopra.



4 *Un mucchio di candele.*

In genere, potete usare il "trucco" per generare uno qualsiasi dei due numeri x e y coinvolti nel "fuse", e quindi partendo da una candela accesa al tempo zero e applicando il metodo usato al "giro" precedente, potete ottenere i tempi (per il primo caso vi diamo un po' di valori, per i prossimi solo la formula finale):

$$0 \sim 0 = \frac{1}{2}$$
$$0 \sim \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$
$$0 \sim \frac{3}{4} = \frac{7}{8}$$
$$\dots$$
$$0 \sim (1-2^{-n}) = 1-2^{-(n+1)}$$

Se invece partite da 1/2:

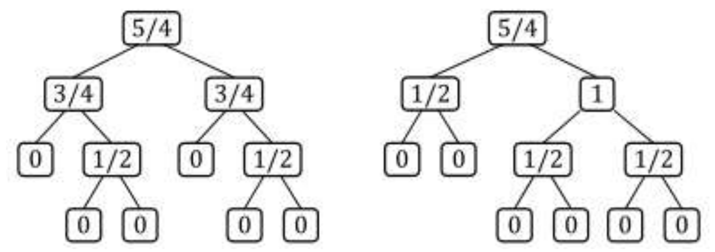
$$\frac{1}{2} \sim (1-2^{-n}) = \frac{5}{4} - 2^{-(n+1)}$$

e avanti in questo modo.

Se tutto questo ai più diversamente giovani ricorda qualcosa di cui abbiamo parlato nel numero 39 di una Prestigiosa Rivista di Matematica Ricreativa, è *quasi* sulla buona strada: la differenza rispetto alle *frazioni egizie* è che qui non abbiamo la limitazione di usare sempre denominatori diversi, ma possiamo tranquillamente usare dei numeri già utilizzati.

Poteva, in un ambito di questo genere, mancare un contributo di Paul Erdős?

Si sa, attraverso gli stessi metodi utilizzati per la costruzione delle frazioni egizie, che qualsiasi razionale x/y (con $x<y$) necessita di sole $O\left(\sqrt{logy}\right)$ candele; secondo il buon Paul (ma la congettura non è stata provata) in realtà ne sono sufficienti $O(loglogy)$. Quindi, prendetevela comoda.



5 *Due strade per lo stesso posto.*

Adesso, se promettete di non litigare, arriva il problemino: riuscite a generare 5/4?

"...e perché dovremmo litigare?" Per decidere chi ha sbagliato; infatti, anche se sono un insieme ben ordinato, *non è detto che per un dato numero la rappresentazione sia unica*: per 5/4, qualcuno di voi potrebbe aver trovato:

$$\frac{5}{4} = \big(0 \sim (0 \sim 0)\big) \sim \big(0 \sim (0 \sim 0)\big)$$

mentre qualcun altro avrebbe potuto seguire la strada:

$$\frac{5}{4} = (0 \sim 0) \sim \big((0 \sim 0) \sim (0 \sim 0)\big)$$

Trovate una rappresentazione più comprensibile nella figura qui sopra (no, non ve lo facciamo, il *bruciogramma*!).

Come amiamo dire, è raro che un matematico si lasci influenzare dalla realtà: e infatti sono state inventate (ma, fortunatamente, mai costruite) le *candele a n accensioni*, per qualsiasi valore di n; vi garantiscono che la parte selezionata brucerà in $1/n$ dell'unità di tempo (quindi, la candela continua a bruciare tutta in un'unità di tempo, e l'accendete da persone normali). Se volete provarci, auguri...

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms