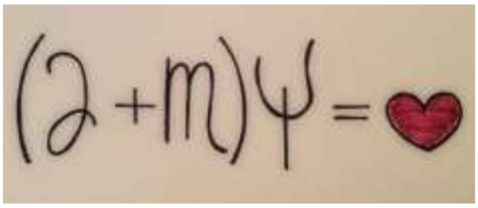
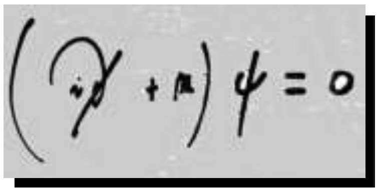
Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 309 – Ottobre 2024 – Anno Ventiseiesimo





Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM308 ha diffuso 3387 copie.

Abbiamo già parlato degli obbrobri generati dalla mania di tatuarsi addosso l'equazione di Dirac della meccanica quantistica; ***Lieke Klaver*** ha mostrato, alle Olimpiadi di Parigi, l'inarrivabile sobrietà dei classici.

1. Come Dumas (II) – Évariste Galois

*Sono passati solo quattro mesi da RM305, il numero dello scorso giugno, quando ci siamo inventati questo perfido artificio a cui abbiamo dato il nome “*Come Dumas*” nel vano tentativo di nobilitarlo un po’. Vi ricordate cosa avevamo scritto nel box introduttivo di quel numero? Niente paura, se non ve lo ricordate, almeno la parte più importante ve la ricordiamo noi:*

> *Così, quando il tempo si mostra tiranno (come, ad esempio, sta facendo in quest’incipiente estate del 2024) potremmo usare questo mediocre artificio: trasformeremo il titolo del romanzo di Dumas (“*Vent’anni dopo*”) in una segnalazione, e se troverete un compleanno che si intitola “Come Dumas (xxx)” sappiate che si tratta di un articolo uscito almeno vent’anni prima, anche se nel mese appropriato. Magari con qualche correzione di strafalcioni, magari con qualche osservazione aggiunta con il senno di poi, magari con qualche cosa di cui vergognarci che paleseremo, ma sostanzialmente una replica.*

Bene, il tempo continua spietatamente a tiranneggiare, ed eccoci qua, di nuovo puri e disposti a ricorrere a questo mezzuccio (i francesi, sempre snob, lo chiamerebbero “escamotage”, ma sempre di mezzuccio si tratta. Stavolta tocca al compleanno scritto in onore di Évariste Galois, pubblicato in RM069, Ottobre 2004, con il titolo “Group Fiction”. L’originale, che ha da poco diligentemente compiuto i vent’anni richiesti, lo trovate qui:

http://www.rudimathematici.com/archivio/069.pdf#page=1

C’è qualcosa che non cambia mai, sia arrivando in treno alla stazione di Buenos Aires sia atterrando sulla pista dell’aeroporto di Pechino. È la stessa cosa familiare che ci viene incontro attraccando al porto di New York, o anche, più comodamente e semplicemente, guardando un servizio al telegiornale in diretta da New Delhi. Oppure e ancora, quando sbadigliamo di fronte alla prima pagina del giornale del mattino, o quando cerchiamo un indirizzo complicato in una cartina toponomastica. Sempre, o quasi sempre, mentre lavoriamo; sempre, assolutamente sempre, quando studiamo, a casa o in un’aula scolastica. E, naturalmente, anche in questo preciso momento.

Le lettere dell’alfabeto. Parlano in continuazione, e sì, ci parlano anche da Pechino: in luoghi così remoti sono accompagnate da allegri ideogrammi, o da altri segni più familiari alla gente del posto, ma è davvero difficile che il nostro consueto alfabeto non abbia diritto di cittadinanza anche in quei paesi situati dall’altra parte del mondo. La scritta “Tokyo” è ormai frequente quanto, se non più, la coppia di ideogrammi giapponesi corrispondenti; i sette caratteri che formano la parola “Beijing” sono già familiari tanto ai cinesi quanto ai cileni, e lo saranno ancor di più fra quattro anni, quando le Olimpiadi si insedieranno proprio a Pechino[1]. Certo, è quasi inevitabile che quegli stessi caratteri che arredano la tastiera del vostro computer tendano a formare parole prevalentemente inglesi, in quei paesi; ma è pur sempre vero che l’inglese è scritto con gli stessi segni con i quali componiamo le nostre missive: i caratteri dell’alfabeto latino.

“Latino” è parola che viene da “*Latium*”, Lazio, e fa sorridere l’idea che il significato originario della parola sia “ampio, vasto”. La pianura laziale è ben piccola cosa, rispetto ai pianori sterminati del pianeta nei quali l’alfabeto latino ha oggi diritto di cittadinanza: ma l’Italia è avara di pianure, e lo è in maniera particolare al suo centro: il settentrione è caratterizzato dalla Pianura Padana, e il mezzogiorno riesce, col Tavoliere delle Puglie, ad occupare la seconda posizione nella classifica delle pianure più estese della penisola; la pianura laziale non può competere con loro, ma è ed era vasta abbastanza da dare la sensazione di ampiezza d’orizzonte a quegli uomini abituati al continuo altalenarsi degli Appennini, al punto da insediare nel nome di quel luogo il richiamo agli ampi spazi.

[1] [Edit 2024] – Sì, fa sempre un po’ impressione leggere “fra quattro anni” riferito a un evento passato da più di tre lustri, lo sappiamo.

Seppure nata da regione piccola su scala planetaria, la lingua che i primi abitanti del Lazio parlavano e scrivevano ha avuto una carriera strepitosa, come mostrano le scritte in alfabeto latino che ritroviamo in ogni parte del mondo: eppure, agli inizi, fu battaglia dura per la sopravvivenza. Appena a nord del Tevere, gli Etruschi parlavano una lingua (e scrivevano una scrittura) ben diversa. Appena a sud del Volturno, il greco era lingua colta e diffusa. Il latino veniva però scritto e parlato a Roma, che pure subì, nei suoi primi anni di vita, una forte influenza e anche una diretta dominazione etrusca; e sull'onda delle legioni romane il latino ha spiccato il volo verso ogni angolo del mondo.

L'onnipresenza dei caratteri latini è forse la più evidente eredità che Roma ha lasciato al mondo; ma è sufficiente scavare pochissimo, scalfire appena la superficie delle parole, per scoprire che sono davvero innumerevoli le tracce verbali che fanno esplicitamente riferimento all'Urbe. Quando scriviamo una formula sulla lavagna d'ardesia nera, forse non ricordiamo che il nome "lavagna" discende dalla cittadina ligure (Lavagna, provincia di Genova) che forniva la materia prima di quelle che proprio dal nome della città abbiamo imparato a chiamare "lavagne". E forse non è immediato riconoscere nello stato del Venezuela quella "piccola Venezia" che i primi occidentali riconobbero nelle lagune di Maracaibo. Di certo, è quasi impossibile tenere a mente tutti i nomi che discendono da nome "Roma". Restando nell'ambito meramente geografico, saltano agli occhi la Romagna, consorella dell'Emilia (che, per altro, prende il nome da un console romano) e la Romania; nell'arte si trova lo stile romanico, e gli esempi possono continuare per pagine intere. Ma, visto che inizialmente si considerava la natura della lingua latina, è più divertente notare come la contrapposizione tra Roma e Lazio abbia radici più antiche di quanto generalmente credano le tifoserie che periodicamente si fronteggiano all'Olimpico: i filologi raccontano di come si sia, nel Medioevo, creata ad un certo bel punto la distinzione tra il "*latine loqui*", ovvero il dotto e ortodosso "parlar latino" della cultura, e il "*romanice loqui*", cioè la parlata comune del popolo, del volgo dell'Impero Romano (che, non per caso, in Italia è nota come "volgare").

Quel "*romanice*" riconduce nuovamente a Roma, e nuovamente lo fa in contrapposizione al latino, quasi si fosse di nuovo ai primordi della storia dell'Urbe, con gli Orazi della tradizione romana contrapposti ai Curiazi, campioni di Alba Longa. Era guerra fratricida anche allora, a voler dare retta alle leggende, perché Romolo e Remo, fondatori di Roma, ad Alba Longa erano pur sempre nati. Il "*romanice loqui*" ha storia non meno illustre dell'aulico latino, visto che è il progenitore di tutte le lingue romanze. L'aggettivo "romanzo", seppur discendente diretto del nome della città eterna, arriva in Italia attraverso il francese medievale: come si può raccontare al popolo una bella e vecchia e storia, se il popolo indaffarato nei campi non ha ormai più la possibilità di capire il latino? Semplice: si prende una bella storia intrigante della tradizione, in latino, e la si riscrive nella lingua del popolo: per dirla alla francese, è insomma sufficiente "*mettre en romanz*", ed è così che comincia a far capolino anche il significato più comune della parola "romanzo".

Anche se i veri fruitori delle storie ricondotte in volgare non erano i contadini; di essi non ci si curava punto, almeno finché continuavano a lavorare nei campi senza protestare. I destinatari delle storie erano i nobili stessi, ormai anch'essi poveri di cultura classica, che non riuscivano più ad intendere la lingua colta. Per questo, ciò che veniva tradotto in volgare erano soprattutto storie accessibili, divertenti, narrazioni destinate alle piccole corti dei feudatari; storie d'amore e di battaglie, scelte apposta per divertire e rallegrare. Il nome passa poi dalle traduzioni latino-volgare anche ai nuovi componimenti scritti direttamente in lingua romanza, e la cesura tra il latino e il volgare si allarga; non più solo per la morfologia della lingua, ma anche peri i contenuti diversi che le due lingue veicolano. Le parole si moltiplicano, e il volgare predilige narrazioni inventate e dalla trama fitta, mentre la narrazione tipica del latino è sempre stata l'epica. La separazione resta e viene ribadita anche all'inizio del secolo, quando il Romanticismo si oppone, non a caso, al Neoclassicismo, rinnovando uno scontro le cui radici etimologiche si perdono nei meandri dell'Alto Medioevo.

Roma, romano, romanico, romantico, romanzo. La parola "romanzo" è ancor oggi viva e vegeta, anche se ha ulteriormente cambiato carattere e connotazione. Per un certo periodo, in lingua inglese "romanzo" era addirittura sinonimo di "gotico, surreale", mentre adesso, almeno in italiano, la sua iniziale connotazione d'attributo ha quasi del tutto lasciato spazio a quella di sostantivo: il romanzo è il libro che racconta una storia, lo strumento principe e di gran lunga maggioritario di tutta la narrativa. Perennemente dichiarato in crisi, continua a sopravvivere e a prosperare (anche sotto forme diverse; si pensi alla cinematografia: quanti sono, percentualmente, i film che non hanno struttura di romanzo?). Al punto che è tutt'altro che infrequente trovarselo come campione rappresentante dell'immaginario nei confronti del reale: "Ma questo che stai dicendo è vero o è falso? È cronaca o fantasia? È realtà o è romanzo?"

Il romanzo contrapposto alla realtà è la dicotomia più recente e più attuale; è in fondo curioso che si ponga nei termini esclusivi canonici delle contraddizioni assolute, al pari di bianco/nero, colpevole/innocente o giorno/notte. A ben vedere, il romanzo dovrebbe restare una forma narrativa autonoma, che può essere o no legata alla realtà, ma comunque tale da non essere vista necessariamente in contrapposizione esplicita con essa. Anche perché di fatto contrapposizione non c'è: basti ricordare la sola invenzione del "romanzo storico", con tutte le regole che lo governano e che regolamentano le dosi precise di invenzione e realtà storica, a mostrare come il romanzo si possa innestare in un tessuto realistico e reale arricchendone (e non contraddicendone) il contenuto. Però il romanzo agisce direttamente sulle emozioni, le emozioni creano i miti, e il mito è, quasi per definizione, irreale. Accade allora che quando uno storico (peggio che mai se oltre che storico è anche scienziato) si lascia prendere la mano e dipinge con tratti troppo romanzeschi un personaggio realmente esistito, contribuisce alla mitizzazione del personaggio. E se il personaggio in questione è anch'esso uno scienziato, questa sorta di canonizzazione laica rischia di irritare altri storici, o altri scienziati.

"Gli scienziati non dovrebbero essere così innamorati di sé stessi".

Questa frase lapidaria è la brutale conclusione di un interessante articolo di Tony Rothman, cosmologo. Il pezzo, facilmente reperibile in rete[2], si intitola "*Genius and Biographers: The Fictionalization of Évariste Galois*" nel quale l'autore sottopone a spietata critica il celebre capitolo "*Genius and Stupidity*" dell'ancor più celebre opera di E.T. Bell, "*Men of Mathematics*"[3]. L'articolo parte rammentando Freeman Dyson e la sua citazione entusiasta dell'articolo di E.T. Bell, osannato da Dyson come uno degli articoli migliori per accendere in un ragazzo l'entusiasmo nei confronti della scienza e della matematica in particolare. Da questo spunto, Rothman passa poi in rigorosa disamina quali e quante siano in realtà le libertà che Bell si è preso nella stesura del suo pezzo biografico su Galois, giungendo al punto di definire tutta l'impresa, come sancisce nel titolo della sua critica, niente più d'una "*fictionalization*". Ci sembra quasi d'aver chiuso un anello: "*to fictionalize*", verbo inglese, appare come una splendida traduzione del citato "*mettre en romanz*" francese, anche se le origini delle espressioni sono ragionevolmente diverse. L'italiano "romanzare" è traduzione accettata e riconosciuta, anche se in essa si perde (o forse si amplifica?) quell'assonanza perversa con la parola "fittizio" ("*fictitious*") che esplicita sia in inglese che in italiano il concetto di "non reale, immaginario", quando non esplicitamente "falso". La "*fictionalization*" della vita di Galois è insomma il renderla quale romanzo, storia appassionante ed emotiva, inoculando però il rischio della falsità storica. Non è certo la sua "falsificazione"[4] , ma è inevitabile pensare ad inganni consumati o nascosti, leggendo un titolo del genere.

Il cosmologo (che supponiamo pertanto essere fisico) Rothman, che ha l'hobby della storia della scienza e ha scritto un intero libro sulle leggende scientifiche, se la prende insomma con Eric Temple Bell, fisico di inizio Novecento, che ha scritto la più celebre delle storie "dei

[2] http://godel.ph.utexas.edu/~tonyr/galois.html - [Edit 2024]: Beh, abbiamo verificato: questo link non risponde più. Ma la Rete ha buona memoria, e l'articolo, a distanza di vent'anni, si trova ancora, e ancora "facilmente", se cercate il titolo completo.

[3] [Edit 2024] – Nel 2004 l'abbiamo scritto in nota, come adesso: già allora era disponibile la versione italiana, "*I Grandi Matematici*", Rizzoli 1997 (noi abbiamo un'edizione della Sansoni).

[4] Anche perché Karl Popper si arrabbierebbe moltissimo, a veder trattata così la sua parola preferita.

matematici". Nel corso dell'articolo, Rothman fustiga ancor più violentemente il libro[5] su Galois scritto da Leopold Infeld, altro fisico, celebre soprattutto per essere stato uno dei più vicini collaboratori di Einstein. Sembra quasi una lotta in famiglia, combattuta tra fisici sul terreno della storia della matematica. Il punto essenziale è però che è virtualmente impossibile raccontare la vita di Évariste Galois senza trascendere nel più puro romanzo. Anche se è vero, come è indubitabilmente vero, che la vita di ogni essere umano è un autentico romanzo, non si può non riconoscere che alcune vite sono tali da sembrare ardite opere di fantasia uscite dalla penna di scrittori particolarmente visionari. Se Freeman Dyson da giovanetto si è esaltato grazie agli scritti di Bell su Galois, non è perché Bell abbia esagerato troppo l'aspetto romantico del matematico francese; come sostiene Rothman, è in fondo probabile che esagerazione vi sia davvero stata, ma il senso di romantica avventura non è frutto dell'iperbolica narrazione di Bell: è piuttosto da ricercarsi nella naturale predisposizione alla leggenda che ogni ragazzo conserva nell'udire una storia particolarmente affascinante. Prima di ripassare per sommi capi la breve vita di Évariste, è opportuno considerare come sia, nella stragrande maggioranza dei casi, la vita dei ricercatori, degli scienziati. La quasi totalità vive negli ambienti accademici, nelle università, e alterna ricerca e didattica secondo le regole che gli atenei si danno[6]. Sorvolando su specificità nazionali (come l'improba italica difficoltà di mettere insieme il pranzo e la cena per i primi anni di carriera accademica), resta il fatto che la ricerca è intellettualmente dura e, proprio perché "ricerca", non ha nessuna garanzia aprioristica di successo. Uno dei migliori aneddoti in merito riguarda la matematica statunitense Julia Robinson: al momento di decidere sulla sua assunzione, i dirigenti dell'Istituto le chiesero di lavorare una settimana registrando accuratamente le attività svolte, in modo che loro si potessero fare un'idea del suo valore di candidata. Il rapporto che la Robinson presentò a fine settimana è rimasto famoso. Recitava: "Lunedì: Provato a dimostrare teorema; Martedì: Provato a dimostrare teorema; Mercoledì: Provato a dimostrare teorema; Giovedì: Provato a dimostrare teorema; Venerdì: Teorema falso". E non è detto che le cose siano sempre così rosee… in fondo, la Robinson è matematica celebre, è riuscita a risolvere il Decimo Problema di Hilbert[7], ed è stata protagonista di una celebre diatriba per la priorità[8]. Non si tratta esattamente di un oscuro ricercatore della vastissima comunità scientifica, e il suo aneddoto, anche solo per il fatto d'essere diventato tale, non è più un buon esempio di monotonia scientifica.

Provate invece ad immaginare di essere esattamente quel che la Robinson non è, ovvero un oscuro ricercatore della comunità scientifica internazionale. Immaginate un lavoro normale, una vita normale, una ricerca normale. Che so, qualcosa di molto tecnico e specifico, magari bloccato da molto tempo per colpa di una serie che non vuol saperne di convergere, mentre se si decidesse a farlo potreste procedere di un piccolo passo avanti; magari contribuendo, in maniera forse non decisiva ma comunque positiva, ai progressi di un gruppetto di ricercatori internazionali. Immaginate di entrare tre volte alla settimana in un'aula con pochi studenti, perlopiù stanchi, talvolta annoiati, qualche volta da voi sorpresi mentre parlano con maggiore (e magari legittimo) entusiasmo della crisi di Vieri

[5] Leopold Infeld: "*Whom the Gods Love: The Story of Evariste Galois*".

[6] [Edit 2024] – Ecco: chissà se oggi, scrivendo questa frase innocente, avremmo aggiunto anche "Terza Missione", o avremmo aspettato ancora un po'…

[7] "*Quali sono le condizioni di risolvibilità delle equazioni diofantee*?"

[8] Diatriba un po' diversa del solito, a dire il vero. Julia Robinson ha passato gran parte della sua vita a tentare di risolvere il decimo problema di Hilbert, riuscendoci quasi completamente. Quasi. Quando non era ormai più una giovanetta di belle speranze, entrò improvvisamente in scena un giovane matematico russo, Yuri Matiyasevich, che riuscì a mettere a posto l'ultima tessera del puzzle e a concludere la dimostrazione. È a questo punto che si scatenò la lotta per la priorità: Matiyasevich diceva che non aveva fatto granché, alla fin fine, e che quindi il merito della risoluzione dovesse andare comunque alla Robinson. Julia invece, che più d'ogni altra cosa al mondo voleva che la dimostrazione fosse completata, chiunque fosse a farlo, lottò accanitamente perché il merito della scoperta andasse a Matiyasevich, che ormai sentiva essere il suo "figlio" matematico.

e dell'Inter o dell'ultima scemenza passata dal Grande Fratello[9] alla tv. Immaginate anche di avere cinquant'anni, la certezza di non scoprire più nessun Grande Teorema, che era quello che volevate fare il giorno che vi siete iscritti all'università. Immaginate di riconoscere nel sorriso d'una studentessa del terzo anno la stessa piega del labbro superiore che aveva la vostra fidanzata dei tempi del liceo (che per altro aveva un carattere insopportabile) e che siate colti da un veloce istante di nostalgia. Immaginate una vita normale, insomma. Anche la felicità di vedere facce contente che vi sorridono, o la soddisfazione nel vedere un improvviso lampo negli occhi di quello studente del secondo banco che ha capito dove va a parare quella derivata. E l'indubbio piacere di tornare a casa dai figli e dalla moglie, che due volte su tre arriva a casa più stanca di voi; o magari le piccole tensioni con il direttore d'Istituto che col cavolo che si rende conto di come siate costretti a lavorare, dannazione, per non parlare di quella dannata pizza di ieri sera che ancora non avete digerito, e adesso lo stomaco comincia a far male sul serio (ulcera maledetta). Vita normale, neanche brutta, probabilmente migliore di quella di un buon 90% dell'umanità, insomma. Ulcera compresa, anche se adesso bisogna proprio aprire la finestra, almeno un po', per lenire il mal di stomaco con un po' d'aria fresca sul viso.

Adesso, invece, cambiate vita.

Il male allo stomaco c'è ancora, ma è dato dalla palla d'una pistola che vi ha squarciato le budella. Il fresco sul viso è dato non dall'aria, ma dall'erba sulla quale siete caduti, erba bagnata di rugiada, potrebbe quasi essere poetica se non fosse che siete in agonia, che sapete, sapete bene che il male di stomaco passerà, ma solo dopo che avrete tirato le cuoia. Roba di minuti, comunque. Anni: immaginate di non averne più cinquanta, ma solo venti; la fidanzatina non la riconoscete nei meandri d'una memoria stanca e distratta, ma nelle immagini fresche, vivide e feroci quanto il sangue che continuate a versare per terra: amore d'un mese, ma un mese è tempo infinito a vent'anni, specie quando l'innamoramento è il primo, l'unico mai avuto, l'unico che avrete mai, perché state già per morire. E anche perché, nonostante tutto, quell'amore è già finito per conto suo, scomparso prima ancora della vita stessa che sta scomparendo adesso, e Stephanie non la vedrete più. E i volti intorno non sono quelli degli studenti o dei colleghi indaffarati, ma quelli dei vostri compagni, ribelli, rivoluzionari, come voi imprigionati, processati, come voi decisi a lottare col pugnale e con le pistole. Le stesse pistole che hanno anche le spie che vi sorvegliano, lo stesso pugnale da voi brandito con arroganza al banchetto, e promesso al cuore del re. Liberté-Égalité-Fraternité-Stephanie, erba e sangue in bocca e niente più tempo. "Non ho tempo, non ho tempo", scritto in fretta e in margine, come tutti i matematici che si rispettino. Perché non avete il tempo stantio bloccato da una serie che diverge all'infinito, ma un tempo irrisorio per il mare di conoscenze che solo voi possedete, solo voi al mondo, scritte di fretta poche ore fa, insieme alle lettere agli amici, alle spiegazioni, alle istruzioni su cosa fare nel caso vi foste davvero trovati qui, erba piena di rugiada in bocca e viscere ormai sporche di fango sul terreno, strada aperta per loro da una pallottola repubblicana.

Repubblicana? Forse. Forse repubblicana come voi, forse armata da complotto realista, chi lo sa. Stephanie è bionda e bella, conta qualcosa che sia leggiadra o laida, borghese o prostituta, se non ti è più dato di vedere i suoi occhi? Incontrata così, appena fuori dalla prigione, appena dopo il secondo processo, vent'anni e due processi, vent'anni e scuole incomprensibilmente chiuse, sbarrate, vietate per sempre. Memorie nuove e rivoluzionarie mai lette, perdute come quella di Abel, e forse perdute sempre dalle stesse mani, quelle di quel Cauchy che insegue il rigore e sé stesso, sé stesso e il rigore, ma soprattutto sé stesso… Lontano, adesso. Lontano quasi quanto lo è Stephanie, quanto lo è vostro padre ucciso per delle poesie, si può morire per dei versi? Lontano quanto la rabbia pericolosa e dannosa che riusciva forse ad allineare i gruppi e le loro teorie, e con loro le soluzioni di equazioni mai prima risolte, ma che era rabbia che pure esplodeva e dirompeva in furia illogica e sorda. Scritte, quelle pagine, di corsa e senza tempo, senza tempo, senza tempo, al punto che non ricordate neanche più se sono solo il riassunto d'una vita (ma quanto breve!) di studi, o

[9] [Edit 2024] – Vabbè, qui non servono vent'anni per dover ricorrere ad aggiornamenti… frasi del genere rischiano di perdere significato nel giro di poche settimane.

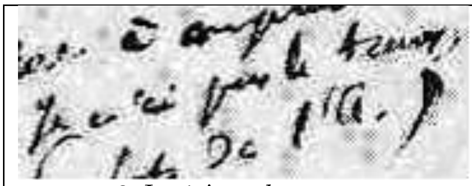
nuove scoperte appena fatte, appena viste, vecchie quasi quanto quella ferita dalla quale esce la vita, partorite in una notte di travaglio subito prima che la genitrice muoia di parto, poche ore dopo, in un'alba di maggio a Parigi.

Fictionalization. Ma a che serve, con una storia del genere?

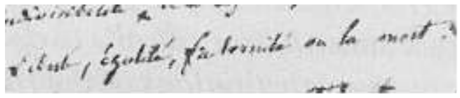
1 *Évariste Galois*

Évariste Galois muore il 31 Maggio 1832 all'ospedale Cochin di Parigi, dopo essere stato abbandonato morente nel luogo dove si era scontrato in duello. Poiché era nato il 25 Ottobre 1811 (a Bourg la Reine, non distante dalla capitale francese), morì senza aver compiuto ventun anni. Figlio di bonapartista (il padre fu sindaco della città natale di Galois durante i Cento Giorni di Napoleone), Galois nasce e cresce in uno dei periodi più agitati e complessi della storia di Francia. Viene iscritto ad uno dei più famosi licei di Francia, il College Louis-Le-Grand, che aveva già ospitato Victor Hugo e Robespierre. Di carattere ribelle e tutt'altro che facile, Évariste mostra fin da giovanissimo di essere terreno fertile per le passioni violente e decise che caratterizzavano la Francia dei suoi tempi. Ribellioni e proteste all'interno del Liceo lo vedono prima spettatore interessato, poi partecipe in prima persona. Crescendo, diventa un noto simpatizzante repubblicano, attirandosi di conseguenza la sorveglianza speciale delle forze di polizia di Carlo X e di Luigi Filippo. I suoi risultati scolastici sono di difficile giudizio: i suoi docenti alternano giudizi fortemente negativi (come, ad esempio, in retorica) ad appunti stupefatti per le profonde conoscenze matematiche dell'allievo. Dal punto di vista dei risultati, comunque, la carriera scolastica di Galois subisce più frustrazioni che successi, e culmina con il fallimento all'esame di ammissione della École Polytechnique. Forse anche perché i suoi progressi scolastici sono di difficile collocazione, Évariste si dedica soprattutto allo studio diretto delle opere dei grandi. Legendre, Abel, Jacobi: funzioni ellittiche, integrali abeliani. Scrive una memoria "Sulle condizioni per la solvibilità per radicali delle equazioni", che venne inizialmente persa e non servì a farlo riconoscere come matematico di classe. Mentre frequenta il Louis-le-Grand, nella sua città natale prende forza una calunnia che ha come destinatario suo padre, additato come l'autore di feroci versi satirici diretti verso persone di Bourg La Reine. Galois padre, persona integerrima che non sopporta tali sospetti, si uccide impiccandosi per la vergogna. Évariste frequenta sempre più spesso i circoli repubblicani, e nonostante la giovane età si distingue come uno dei più attivi. Durante un banchetto, mentre viene elevato un brindisi al nuovo re Luigi Filippo, anziché alzare il bicchiere grida "A Luigi Filippo!" alzando un pugnale. Viene processato, e assolto (in maniera abbastanza stupefacente, vista la debolissima difesa che addusse durante il processo). Un nuovo processo, per altre cause, lo porta in prigione insieme ad altri repubblicani. Nel mese che intercorre tra la liberazione e il duello fatale, Galois conosce e si innamora di una certa Stephanie, e a giudicare dagli scritti che di lui rimangono, se ne innamora con la passione integralista dei ventenni. Giunge infine a una lite con altri repubblicani, che secondo la logica del tempo non può risolversi altrimenti che con un duello. Presentendo la morte, Galois passa la notte precedente il duello scrivendo lettere agli amici, ai parenti, e soprattutto redigendo il suo testamento scientifico. All'alba del giorno dopo, muore per una pallottola allo stomaco. Le sue carte rivelano che Galois aveva risolto uno dei problemi più ardui della matematica del tempo, quello della solvibilità delle equazioni per radicali, e per farlo aveva usato un approccio radicalmente nuovo: la Teoria dei Gruppi, di cui è riconosciuto padre fondatore.

Fictionalization. Non sembra essercene granché bisogno, se su questi brevi cenni biografici sono sostanzialmente d'accordo tutti. È un coacervo di eventi straordinari e di emotività, che istantaneamente appassiona e richiede ulteriori dettagli, ulteriori risposte per coprire le inevitabili domande che una biografia breve e tempestosa come questa lascia aperte. È terreno fertilissimo per la nascita del mito.


2 *Je n'ai pas le temps...*

A Eric Temple Bell viene rimproverato di aver eccessivamente romanzato la parte relativa al "genio incompreso" di Évariste Galois: il suo articolo fustiga severamente le istituzioni (il Louis-le-Grand, l'École Polytechnique) e i professori che, ciecamente, non riuscirono a riconoscere il genio travolgente di Évariste Galois, costringendolo a una vita costellata di disillusioni scolastiche e, indirettamente, indirizzandolo verso altri interessi che lo avrebbero portato alla tragedia finale. Soprattutto, a Bell viene mossa l'accusa di aver creato, senza alcuna reale base storica, la "leggenda dell'ultima notte", ventilando l'idea che l'intera produzione scientifica di Galois sia stata prodotta in una corsa affannosa contro il tempo ("Non ho tempo, non ho tempo", è frase celebre scritta a margine di alcune delle lettere che Galois scrive nella notte tra il 30 e il 31 Maggio 1832) integralmente in quella notte famigerata. Tutta la Teoria dei Gruppi generata nell'ultima notte di vita d'un misconosciuto genio ventenne: sembra davvero incredibile. Ma Bell è indubbiamente affascinato dall'idea del "genio incompreso": anche gli altri "peccati" che gli vengono contestati sono leggibili attraverso la stessa chiave di lettura. Stephanie è e resta misteriosa, colpevole soprattutto di aver distratto Évariste, e forse di averlo condotto al duello. L'altro duellante è individuato in Perscheux d'Herbinville, e merita ancora meno attenzione di Stephanie, nel racconto di Bell; sia l'una che l'altro sono parte di coloro che "non capiscono" il genio di Galois.


3 *Liberté, Egalité, Fraternité ou la mort.*

Leopold Infeld è più creativo, e affascinato soprattutto dalla teoria del complotto. Visto che E.T. Bell ha già rimarcato la connotazione drammatica dello scienziato incompreso, Infeld esplora la possibilità che l'attività politica di Galois, le cause sconosciute che hanno portato al duello, il ruolo stesso di Stephanie meritino in realtà assai più attenzione di quanta gli abbia dedicato il capitolo di "*Men of Mathematics*". Si indaga allora sulla struttura della polizia segreta dell'epoca, si trovano documenti che dimostrano l'esistenza di molti "agenti segreti" infiltrati nei circoli repubblicani frequentati da Galois, si ipotizza che il ruolo politico di Évariste fosse tutt'altro che trascurabile. E Infeld arriva addirittura ad ipotizzare un complesso complotto ordito dai realisti per eliminare un troppo pericoloso avversario politico, quello scavezzacollo rabbioso che non esita a minacciare pubblicamente il re di Francia. Ecco allora la ragione della sua improvvisa liberazione, nonostante ci fossero gli estremi per mantenerlo in prigione: doveva essere ucciso, e senza che si creasse chiasso attorno al suo omicidio, cosa impossibile in una prigione. Ecco perché compare Stephanie: era un agente monarchico, o quanto meno una prezzolata, una prostituta che doveva adescarlo per dare poi adito all'ipotesi di un duello per cause passionali: in realtà, sono gli agenti segreti di Luigi Filippo che costruiscono l'inganno, lasciano che Stephanie seduca Évariste, infiltrano Perscheux d'Herbinville nei circoli repubblicani, inducono facilmente Galois ad uno scontro che si sa già perso in partenza. Non più la leggenda del genio incompreso, ma il thriller politico e spionistico.


4 *Stephanie.*

Rothman sembra scandalizzato da queste ipotesi romanzesche, e si mette a caccia di nuovi elementi: ne trova a bizzeffe, e sostiene che siano sempre stati disponibili, solo colpevolmente "trascurati" dai biografi precedenti. Riconosce la genialità di Galois, ma tende a dimostrare che la celebre "ultima notte" non è stata eccezionale, perché in quelle lettere Évariste riepilogava risultati ottenuti, non li creava di getto. Rispolvera i giudizi dei professori del Louis-le-Grand, e assolve gli insegnanti; Galois non era un tipo facile da trattare, ma in fondo molti giudizi mostravano comprensione nei suoi confronti, e alcuni rivelavano di aver riconosciuto una specialissima predisposizione dell'allievo Galois per la matematica. Persino troppa, a volte, visto che imputavano all'eccesso di attenzione verso di essa la scarsa produttività nelle altre materie. Galois non era poi così perseguitato, se un giudice francese, a pochi anni di distanza dallo sferragliare della ghigliottina in Place de la Revolution, accetta di liberarlo nonostante una esplicita minaccia di regicidio; se, a ben vedere, era noto come brillante matematico e aveva persino vinto già qualche premio minore. E Stephanie non era la losca adescatrice così malamente dipinta, anzi… esistono delle lettere che Stephanie ha scritto a Galois: in quelle lettere, si scopre e si intende che mademoiselle Stephanie D. vuole interrompere una storia, una relazione; una storia pulita, però, non un adescamento perverso e complesso. Rothman scopre che quelle lettere sono state sottoposte ad indagini e analisi degne della polizia scientifica del ventunesimo secolo (lente d'ingrandimento e "opportuna illuminazione"), fino al punto di consentire a C.A. Infantozzi di scoprire il nome completo della misteriosa fiamma di Galois: Stephanie Dumotel. Indagini ulteriori la identificano infine in Stephanie Felicie Poterin du Motel, figlia di un autorevole medico di Sieur Faultrier, amena località dove Galois trascorse gli ultimi mesi della sua breve vita. E poi, sfogliando le carte di Raspail[10], i giornali di Lione e molti altri documenti, Rothman arriva a concludere che non fu Perscheux d'Herbinville a sparare la mattina del 31 Maggio. Non fu un repubblicano infuriato, non fu un agente segreto monarchico, ma un buon amico di Galois, Ernest Duchatelet. Amico e compagno d'idee politiche, ma fatalmente innamorato anche lui di Stephanie. E Rothman, nemico della "*fictionalization*", arriva a concludere che i due amici, perdutamente innamorati della stessa ragazza, decisero di risolvere la cosa affrontandosi in duello. Ma un duello insolito: non come quello di Puskin, poeta e duellante, morto sotto i colpi spietati dell'amante della moglie; non un'epica battaglia con lame stridenti come quelli di Cyrano. Duchatelet e Galois sono amici, e decidono di caricare una sola delle due pistole scelte per lo scontro fatale, e di lasciare al caso la decisione su chi si ritroverà in mano un'arma scarica. Così, almeno uno dei due duellanti avrà la certezza di avere la vita salva e il corpo scevro di ferite, e uno solo cadrà.

È impossibile uccidere il mito.

A leggenda non può che sovrapporsi leggenda, e forse basterebbe riconoscere alla leggenda la stessa dignità, lo stesso contenuto di "realtà" che ha la storia. In fondo, ha senso parlare di non-esistenza di Babbo Natale? Cosa vuol dire, alla fin fine? Che non esiste in Lapponia un signore grassottello che manda avanti una fabbrica di giocattoli con elfi come maestranze e una dependance piena di renne volanti? D'accordo; ma che Babbo Natale, come idea, come entità, esista eccome lo vediamo ad ogni inverno. Come poter sostenere che non esista Topolino, come concionare se la reale esistenza di Achille e Ulisse contino davvero, al fine di ciò che Ulisse e Achille rappresentano nella storia della cultura? Mostrate la locandina di "Gli uomini preferiscono le bionde" ad un gruppo di persone che non conoscono il mito di Marilyn Monroe, e chiedete di indicarvi quale, tra la Monroe e Jane Russell, sia la donna che ritengono più bella. Ci aspettiamo una distribuzione delle preferenze attorno a 50%-50%, ma quest'indagine non ha più senso in una cultura che ha ormai canonizzato Marilyn come icona assoluta di bellezza. Chiedete ad un campione non specialistico di intervistati quale sia il più grande matematico del Novecento, e vedrete trionfare con indiscutibile distacco Albert Einstein, che matematico non era, e che non nascondeva le sue personali dannazioni con l'algebra tensoriale. Chiedete a Rothman di demolire la *fictionalization* di Bell e di Infeld su Galois, e riuscirà a farlo solo dandovene un'altra, a tratti persino più intrigante delle precedenti.

Genio incompreso, rivoluzionario, innamorato romantico ucciso da un amico stupito dal sentire il colpo di pistola al momento di premere il grilletto. Scegliete il vostro Galois, immaginate la vostra Stephanie come strega o come angelo; costruite le trame degne di un film di James Bond attorno a un ventenne travolto dalla rivoluzione che ha sconvolto la Francia nel 1830; chiamate in causa Freud e lo sconvolgimento procurato in un diciottenne

[10] Sì, proprio quel Raspail del boulevard e della fermata del Metro a Parigi, zona Montparnasse.

dalla scoperta di un padre impiccato. Fatene l'uso che più vi piace, perché come sempre, in fondo, la storia è sempre solo una ricostruzione, una via possibile, mai la verità. E come potrebbe esserlo? Provate a scrivere voi stessi la "verità vera" su quel che succede adesso, intorno a voi, e dite se siete davvero in grado di farlo. Figuriamoci quale sia la fatica dello storico, a scavare nelle tracce del tempo.

La classica versione di Bell ha comunque un merito: quella di aver affascinato Freeman Dyson, e di aver probabilmente contribuito a fare in modo che Freeman Dyson diventasse Freeman Dyson. Forse la versione di Rothman contribuirà nel futuro a creare un grande poeta, invece di uno scienziato. Quel che alla fine è piacevole è che, poeta o scienziato che sia, l'umanità avrà comunque di che congratularsi con Évariste Galois, e con la sua capacità di generare leggende. Dal canto suo, la matematica continuerà silenziosamente a sviluppare e a far crescere la Teoria dei Gruppi, perpetuando nei secoli il nome e il cognome d'un ragazzo morto a vent'anni.

2. Problemi

2.1 "Pensa un coso, senza dirmelo..."

Ormai, il vecchio gioco del "pensa un numero, senza dirmelo" non viene giocato neanche più all'asilo, ma di recente abbiamo trovato una variazione più complessa che ha l'aria interessante. Il guaio è che non abbiamo capito bene come gira; per adesso Rudy sta testandolo utilizzando Alice e Doc come cavie, ma siccome si stanno stufando sarebbe meglio che qualcuno ci spieghi come funziona. Di seguito, le regole.

Per cominciare, Alice e Doc pensano un polinomio $p(x)$: in una variabile, a coefficienti interi e positivi e di grado n; né n né il polinomio vengono comunicati a Rudy.

A questo punto, Rudy chiede il valore del polinomio per un certo numero a (che decide lui) e i due gli comunicano il risultato; a questo punto, il Nostro chiede il valore del polinomio per un certo numero b (sempre deciso da lui) e anche in questo caso gli viene comunicato il risultato.

E, a questo punto, basta. Nel senso che Rudy enuncia il polinomio, e per ora ci ha sempre azzeccato.

Come ha fatto?

Svelti a risolverlo, che vi hanno appena nominato animatori per la festa di Natale dell'Istituto di Matematica...

2.2 L'asta di Doc

Dopo lunghe insistenze Doc si è finalmente deciso: ha selezionato un certo numero di compleanni di matematici (sapete che questa tipologia di articoli è sostanzialmente di suo monopolio) che sono stati riformattati e stampati su carta "uso mano" (si dice così, ci pare) da Alice e amorevolmente rilegati da Rudy; il volume (sì, in copia unica) firmato da noi tre è valutato tra i 500 e i 1000 centesimi[11]. Doc ha provato a organizzare l'asta, ma al momento difetta di offerenti.

Fortunatamente, abbiamo degli amici (anche se un po' avvoltoi) che si sono offerti di procurarci degli astanti, al modico prezzo di 10 centesimi per ogni offerente; quindi, un offerente vale 10 centesimi, dieci offerenti ne valgono 100. E qui sta il problema.

Infatti l'asta sarà in "stile eBay": vince chi fa l'offerta più alta, ma chi vince paga la cifra indicata dall'offerta immediatamente inferiore[12]. Sappiamo che le offerte saranno distribuite uniformemente in modo casuale nell'intervallo [500, 1000] (sempre centesimi: la nostra opinione di noi non è cambiata).

Evidentemente Doc vuole più astanti possibile per alzare il prezzo, ma rancino (per i non torinofoni: diciamo "parsimonioso", per essere gentili...) com'è vorrebbe minimizzare la spesa (e massimizzare il guadagno).

Quanti astanti richiede agli avvoltoi?

Espansione? Espansione. E se non fosse in stile eBay, ma prendesse l'offerta massima? Quanti dovrebbe richiederne?

In questo andate pure con calma, che Rudy a rilegare è una lumaca (no, non per la bava. Per il tempo).

[11] *Evidentemente*, il problema originale parlava di euro (o meglio, di dollari). Ma non abbiamo una così magnificente idea di noi stessi.

[12] Quasi: su eBay, a quanto mi dicono, dovete aggiungere qualcosa per comunque superare la seconda offerta. Mai partecipato, quindi *relata refero*. Ma qui non importa.

3. Bungee Jumpers

Sono date n successioni aritmetiche a termini interi, estendentesi indefinitamente in entrambe le direzioni. Dimostrate che se, prese due qualsiasi di queste successioni, queste hanno un termine in comune, allora tutte queste successioni hanno un termine in comune.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Era Una Notte Buia e Tempestosa

Non cambieremo il nome di questa rubrica, perché siamo troppo affezionati a Snoopy che digita serissimo sulla sua macchina per scrivere sul tetto della cuccia, e soprattutto perché "Era Una Notte Buia e Tempestosa" è un incipit troppo bello per non essere copiato. Ciò detto, ci piace ricordare che l'ultima volta che abbiamo scritto una EuNBeT, l'abbiamo immodestamente apostrofata "irragionevole rubrica di recensioni di RM": denominazione che avrebbe certo una bella sigla (IRRR) e soprattutto un bellissimo aggettivo, quell' "irragionevole" che, per una ragione o un'altra, troviamo si addica splendidamente non solo alla rubrica, ma anche ai redattori e alla rivista tutta.

In particolare, questa rubrica è sempre stata molto irragionevole soprattutto a causa della sua saltuarietà: ogni tanto compare, e qualche volta è persino comparsa un paio di volte di seguito; ma quando cade in letargo ci cade serissimamente, e non c'è ghiro o plantigrado che non la invidi. Se l'abbiamo risvegliata è perché avremmo effettivamente bisogno di ratificare ai lettori di RM qualche notizia, anche se alcune novità sono state accennate con altri mezzi. Insomma, per non tirarla troppo per le lunghe, vi anticipiamo che abbiamo intenzione di stressare questa rubrichetta per tre o quattro mesi di fila. Poi, se siete lettori abituali e ci conoscete, sapete già benissimo che tra le nostre intenzioni e le nostre realizzazioni corre quasi la stessa distanza che c'è tra la vostra cucina e JADES-GS-z13-0.

A proposito, se siete davvero lettori abituali sapete già che EuNBeT rispetta rigorosamente due soli comandamenti: a) quello di recensire solo libri in cui sono coinvolte persone che la Redazione di RM ritiene amiche e b) quello di recensirli solo favorevolmente. Insomma, parzialità e nepotismo imperano: ciò ricordato, conoscendoci sapete bene quali siano le persone che amiamo e delle quali siamo disposti a parlare bene. Servono altri indizi per capire che razza di recensioni vi aspettano, appena finita questa inutile introduzione?

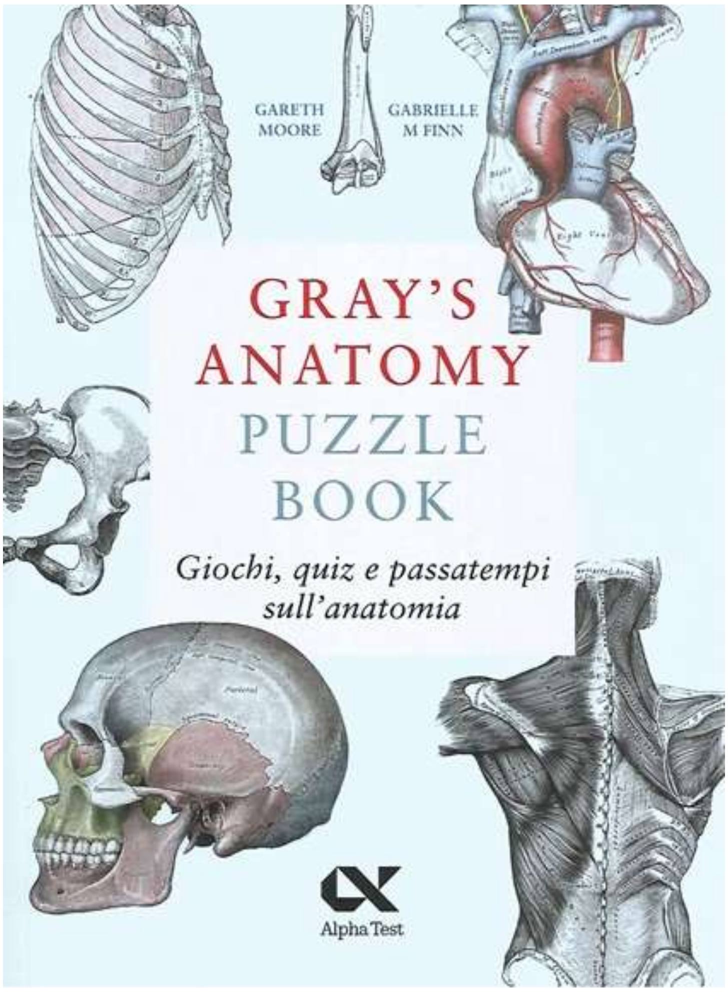
A proposito: questa inutile introduzione finisce proprio adesso, qui.

4.1 Gray's Anatomy Puzzle Book

"Si prenda uno dei tagli di carne più pregiati, che alcuni chiamano carré, e lo si tagli longitudinalmente in cinque parti: si tolga quindi quella di mezzo, la si dia ai cani e si riuniscano strettamente le quattro fette residue" (5=4).

Alcune recensioni sono più difficili da scrivere di altre. "Bella scoperta", penserete voi, "recensire un cartonato prescolare di sei pagine per bambini di due anni, privo di parole e con le pagine tre e quattro gonfiabili a forma di ranocchio deve per forza essere più semplice che recensire il manuale originale dei missili terra-aria nordcoreani". Questo è vero, almeno fino a un certo punto; ma forse un'analisi approfondita del cartonato per dueenni potrebbe presentare sorprese inaspettate (magari proprio nelle pagine centrali, quelle gonfiabili) e il manuale nordcoreano potrebbe non esistere neppure (anzi, con ogni probabilità non esiste davvero, almeno ufficialmente), e così il grado di difficoltà della recensione potrebbe cambiare improvvisamente segno e valore.

Ma non è questo il tipo di difficoltà a cui ci riferiamo. Ci riferiamo al fatto che di solito il recensore è persona diversa dal recensito. Quando recensore e recensito coincidono, per uno strano e complicato processo quantistico la recensione collassa e si trasforma in un altro oggetto, comunemente chiamato "marchetta". La cosa può apparire linguisticamente sorprendente, perché “recensore”, “recensito” e “recensione” sono parole che discendono con tutta evidenza dalla stessa radice, eppure è così: del resto la Meccanica Quantistica porta sempre a risultati sorprendenti.



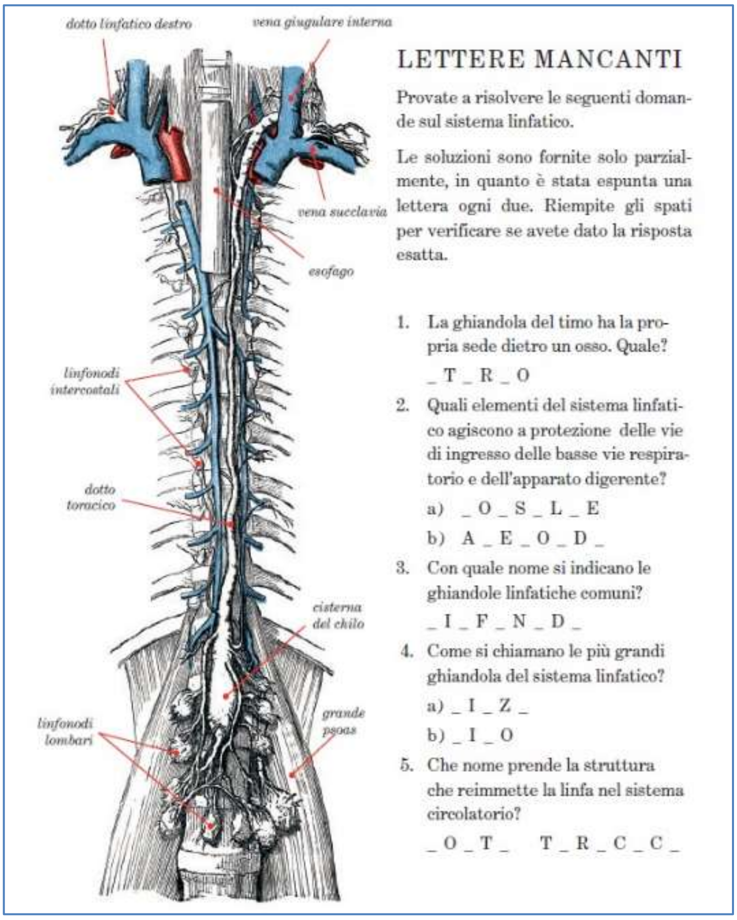
Torneremo più avanti su questa difficoltà, che sarà pure la principale, ma è comunque solo una fra molte. Un’altra niente male è quella di provare a giustificare la presenza, su una rivista di matematica, della recensione di un libro che con la matematica non ha niente a che fare. La sola possibilità è quella di far leva sul fatto che la Prestigiosa Rivista Italiana di Matematica Ricreativa è appunto “ricreativa”, e per “ricreare” fa largo uso di giochi, puzzle e indovinelli. Anche il libro in questione fa largo uso di giochi, puzzle e indovinelli, solo che non sono matematici: sono anatomici. Funziona così: il libro è diviso in 36 capitoli, e ognuno di essi quota – con precisione austroungarica – quattro 4+1 pagine. I capitoli sono 36 perché ognuno di essi è dedicato a una parte del corpo umano: naso, polmoni, intestino crasso, pavimento pelvico e così via, fino a 36 elementi. Inutile dire che di qualcuno di essi quasi non sospettavamo neppure l’esistenza.

La parte bella del libro sta tutta nelle prime due paroline del titolo, “Gray’s Anatomy”: se leggendole avete pensato alla serie tv americana, quella piena di bellocci e bellocce in camice bianco che è giunta ormai alla millemillesima stagione, smettete di leggere, che non vi parliamo più. La sola cosa meritoria di quella serie (che in realtà si intitola *Grey’s Anatomy*) è proprio nel gioco di parole del titolo, che è un esplicito riferimento all’insuperato grande manuale di anatomia generale realizzato da Henry Gray nel 1858 (e poi continuamente aggiornato, al punto che anch’esso è arrivato più o meno alla millemillesima edizione). Ebbene, quel manuale è un gran bell’esempio di come arte e scienza possano convolare a nozze con pieno successo, perché le immagini, pur scientifiche, sono tutte dei capolavori artistici. Ed è per questo che la parte bella di questo libretto sta lì: perché nelle quattro pagine dedicate ad ognuno dei trentasei capitoli in cui è suddiviso, le immagini del Gray abbondano.

Reso il dovuto merito a Henry Gray (ma a voler essere precisi il merito artistico va tutto a Henry Vandyke Carter, che è l’anatomista amico di Gray che ha fatto tutti i disegni), ci sarebbe da chiedersi quale sia il merito dei due autori del libretto, Gareth Moore e Gabrielle Finn; beh, non è trascurabile. Moore è un autore che ha alle spalle la pubblicazione di più di 200 libri, tutti basati su quiz, puzzle e indovinelli. Libri che sono stati tradotti in 35 lingue e che hanno venduto più di cinque milioni di copie: noi, anche se giochiamo a fare i matematici, non sapremmo neppure approssimare a quanto possa ammontare il totale delle sue royalties. Finn invece è una medica, professoressa ed editrice di riviste di anatomia; insomma una signora che non solo conosce il corpo umano molto meglio delle sue tasche, ma che è anche di grado di spiegarlo con esattezza da cronista e perizia da letterata.

E allora forse avrete già capito perché ogni capitolo è fatto di quattro pagine più una: un'illustrazione, una pagina introduttiva sulla parte anatomica protagonista del capitolo, e due pagine di giochi ispirati alla medesima. E sì, certo: la pagina "più una" si trova a fine libro, dove sono raccolte tutte le soluzioni dei giochi.

Giochi che non sono matematici, lo abbiamo già detto: e se vi chiedete se siano facili o difficili, beh, la risposta non può che essere "dipende". Dipende dal gioco, dall'attenzione con cui si legge l'introduzione di ogni capitolo, dalla voglia di giocare con le parole e anche dal gioco stesso, perché alcuni sono facili, altri effettivamente più complicati: prendete quello che abbiamo messo a mo' di citazione in testa a quest'articolo: fa parte della classe di giochi chiamati "Indizi Criptati", che sono in buona sostanza quei "*Cryptic Clues*" delle parole crociate inglesi, quelle difficili. Nel caso dell'esempio, bisogna capire che "il taglio pregiato che alcuni chiamano carré" è il lombo; che tagliarlo in cinque parti suggerisce di prendere in considerazione le cinque lettere della parola; dopo di che si dovrebbe capire che l'indizio suggerisce di eliminare la lettera centrale e ottenere dal "lombo" il "lobo", che è un termine che si incontra quando si parla di polmoni.



E così si arriva al punto cruciale, quello annunciato all'inizio dell'articolo: che diamine ci fa un libro di anatomia enigmistica (o, se preferite, di enigmistica anatomica) nella rubrica di recensioni di una rivista di matematica? Gli è che se i giochi non sono matematici, sono quasi sempre giochi di parole, e le parole solitamente dipendono dalla lingua che si parla, e gli autori Moore e Finn hanno il vizio di scrivere in inglese. Quindi bisogna tradurlo in italiano – e vabbè – ma la cosa complicata è che tradurre i giochi di parole letteralmente in un'altra lingua non funziona quasi mai. Quindi oltre a tradurre bisogna adattare i giochi, ed è qui che entra in gioco Rudi Mathematici, o almeno un pezzo di Rudi Mathematici.

Ed è anche qui che si ritorna al triste collasso quantistico tra recensione e marchetta: diamine, in questa rubrica abbiamo già recensito libri scritti da "Rudi Mathematici", ma i Rudi Mathematici sono tre, e quando ci autorecensiamo possiamo sempre giocarcela dicendo ognuno che è tutta colpa degli altri due[13]. Ma stavolta che l'avventurosa traduzione e il periglioso adattamento dei giochi se lo è accollato solo uno

[13] Ricordate il meccanismo alla base della società di RM? "Il merito è sempre di tutti e tre, la colpa è sempre degli altri due": ricetta indispensabile, se si vuole sopravvivere per un quarto di secolo.

dei tre, non sarebbe stato forse naturale che della recensione se ne occupassero gli altri due? Certo che era naturale!

E invece no, niente. Peggio per loro due: si sono persi un'occasione più unica che rara di stroncare questo innocente libretto, e fare un dispetto al terzo.

Titolo	Gray's Anatomy Puzzle Book
Sottotitolo	Giochi, quiz e passatempi sull'anatomia
Autori	Gareth Moore e Gabrielle M. Finn
Titolo Originale	Gray's Anatomy Puzzle Book
Traduzione e Adattamento dei Giochi	Piero Fabbri
Editore	Alpha Test
Collana	Vitamine
Data Pubblicazione	Luglio 2024
Pagine	192
ISBN	978-88-483-2808-1
Prezzo	17,90 euro

5. Soluzioni e Note

Ottobre!

5.1 [308]

5.1.1 Gara a moltiplicazioni

Un gioco a crescita infinita per i nostri amanti di conti:

> *Dati due giocatori, il primo parte con il valore 1, che viene passato al secondo. Questo moltiplica il valore per un intero a sua scelta tra 2 e 9 ottenendo un qualche valore, che viene passato al primo, il quale moltiplica il valore per un intero tra 2 e 9, e avanti così. Vince il primo che arriva a – o supera – un milione.*
>
> *Qualcuno dei due ha una strategia?*

Il Capo propone anche estensioni dove i numeri da moltiplicare sono in range diversi. Vediamo subito come se la sono cavata i nostri lettori, a partire da ***Valter***:

> Mi pare che sia l'economista ad avere una strategia vincente. La propongo con uno schema dei turni alternati tra pazzo ed economista (letto dall'inizio fornisce come costruirla, dalla fine come procede):
>
> - [⌈1'999'999/18⌉=111'112, ⌊1'999'999/2⌋=999'999] range di valore che l'economista può ricevere dal pazzo per vincere (con ognuno di tali valori riesce a superare 1'000'000 … e vincere)
> - [⌈ 999'999/18⌉= 55'556, ⌊ 999'999/9⌋=111'111] range di valori che l'economista deve passare al pazzo per vincere
> - [⌈ 111'111/18⌉= 6'173, ⌊ 111'111/2⌋= 55'555] range di valore che l'economista può ricevere dal pazzo
> - [⌈ 55'555/18⌉= 3'087, ⌊ 55'555/9⌋= 6'172] range di valori che l'economista deve passare al pazzo per vincere
> - [⌈ 6'172/18⌉= 343, ⌊ 6'172/2⌋= 3'086] range di valore che l'economista può ricevere dal pazzo
> - [⌈ 3.086/18⌉= 172, ⌊ 3'086/9⌋= 342] range di valori che l'economista deve passare al pazzo per vincere (vedi quanto detto al turno successivo dell'economista; non ripeto più)

$\in [\lceil 342/18 \rceil = 19, \lfloor 342/2 \rfloor = 171]$ range di valore che l'economista può ricevere dal pazzo (con il range precedente il pazzo ottiene valori solo in tale range)
$\in [\lceil 171/18 \rceil = 10, \lfloor 171/9 \rfloor = 19]$ range di valori che l'economista deve passare al pazzo per vincere (con qualsiasi dei valori ricevuto dal pazzo riesce ad ottenerne uno)
$\in [\lceil 19/18 \rceil = 2, \lfloor 19/2 \rfloor = 9]$ range di valore che l'economista può ricevere dal pazzo (è il range di interi con cui poter moltiplicare il valore precedente).

Ho scritto un programma per verificare che lo schema funzioni sempre.

Come sapete benissimo, il programma ce lo siamo tenuto. Chiedete, se volete. Vediamo che cosa ha pensato il nostro grande ***Alberto R.***:

Chiamo **P**aolo quello che gioca per **P**rimo e **S**andro quello che gioca per **S**econdo.

Sandro ha questa strategia vincente:

- Alla sua prima mossa moltiplica il numero X ricevuto da Paolo per ceil(12/X) ("ceil" indica l'arrotondamento all'intero superiore)
- Alla sua seconda mossa moltiplica il numero X ricevuto da Paolo per ceil(200/X)
- Alla sua terza mossa moltiplica il numero X ricevuto da Paolo per ceil(3200/X)
- Alla sua quarta mossa moltiplica il numero X ricevuto da Paolo per ceil(57000/X)
- Alla sua quinta mossa moltiplica per 9 il numero X ricevuto da Paolo.

Notare che le moltiplicazioni indicate rispettano le regole del gioco perché le quattro espressioni del tipo ceil(N/X) producono sempre interi compresi tra 2 e 9.

Segnalo infine che l'algoritmo resta valido anche se i numeratori delle quattro frazioni che vi compaiono subiscono piccole modifiche, ad esempio il 12 può essere sostituito da qualunque numero compreso tra 11 e 14, il 200 con qualunque numero compreso tra 169 e 216, analoghe piccole variazioni sono consentite per gli altri due numeratori.

Siamo un po' preoccupati per la mancanza di critiche al testo, ma andiamo avanti. Ci ha poi scritto ***Luigi***:

I numeri chiave sono:

- Il punto di partenza = $S = 1$
- il minimo moltiplicatore = $m = 2$
- il massimo moltiplicatore = $M = 9$
- la soglia di vittoria = $N = 1.000.000$

Partiamo dalla semplice osservazione che il concorrente che si trova per primo sopra la soglia $N/M = 111.111$ vince (moltiplicando il numero per 9).

Quindi il giocatore che si trova per primo sopra la soglia di $(N/M)/m$ da scrivere meglio come $N/(M*m) = 55.555$ perde perché sarà costretto (anche moltiplicando solo per 2) a superare la soglia di 111.111.

Poiché questo ragionamento è ricorsivo vince chi riuscirà per primo con la propria mossa a superare la soglia di $N/(M+m)^i$. Nel nostro caso il massimo di i è 4 e la soglia minima da superare è 9.

Poiché il primo a giocare, essendo $S = 1$ ed $M = 9$, non riuscirà a superare la soglia, ma al massimo ad uguagliarla, il giocatore ha la strategia vincente per vincere moltiplicando il numero in modo che ricada sempre nell'intervallo $N/(M*m)^i$ – $N/(M^i*m^{i-1})$.

Si può notare che il giocatore vincente (in questo caso il secondo) può attuare la sua strategia giocando solo con m ed M trascurando i numeri intermedi.

Quindi il gioco da quanto detto è caratterizzato solo in base a questi 4 parametri e quindi i numeri intermedi sono ininfluenti. Se si cambia uno o più dei 4 parametri la strategia vincente rimane la stessa ma può capitare che sia il primo giocatore a poterla attuare.

La generalizzazione piace molto, come vedete nel prossimo esempio, quello di ***Galluto***:

Generalizzo subito, e uso il problema base come esempio.

Mi sembra che la strategia sia sempre la stessa, e che non contino quanti e quali siano i possibili moltiplicatori ma solo quali sono il moltiplicatore minimo ("min", 2 nell'esempio), quello massimo ("MAX", 9 nell'esempio), il punto di partenza (1 nell'esempio) ed il valore da raggiungere ("Target", 1.000.000 nell'esempio).

La **penultima mossa del giocatore vincente** deve consistere in un numero compreso tra **Target/Max – ε** (piccolo a piacere) e **Target/(Max * min) + ε**. Chiamo questo intervallo la **"comfort zone".**

Inevitabilmente, l'ultima mossa del perdente non potrà superare il Target, ma consisterà in un numero più grande di **Target/Max** e il vincente, moltiplicando per Max, supererà il Target.

Nell'esempio, e rimanendo con numeri interi:

- **Target/Max – ε = int(1.000.000/9) – 1 = 111.110**
- **Target/(Max * min) + ε = int(1.000.000/(9*2)) +1 = 55.556**

Ma allora vince chi raggiunge, o supera, **Target/(Max * min) + ε,** che di fatto è il nuovo Target.

Perciò, itero il procedimento, andando all'indietro verso il punto di partenza e trovando le varie comfort zone; se dal punto di partenza si può arrivare alla comfort zone, vince il primo giocatore (e quindi il punto di partenza è esso stesso una comfort zone); in caso contrario, vince il secondo.

Nell'esempio, le comfort zone sono:

111.110	55.556
6.172	3.087
342	172
19	10

E partendo da 1 non si può entrare nell'intervallo 10-19; quindi il primo giocatore (il pazzo) perde e il secondo (l'astuto economista) vince.

Non che ci dispiacciano i personaggi scelti dal Capo per questo quesito, ma a dire il vero il pazzo è più simpatico, per cui ci dispiacciamo almeno un pochino. Ma non c'è tempo da perdere, che come al solito siamo molto in ritardo. Concludiamo con la versione di ***Emanuele***:

Dati x e A_0 con $x < A_0$ e p, q con $1 \leq p \leq q$

considero le 2 progressioni geometriche di ragione 1/pq dove il primo termine della successione A è A_0

mentre $B_0 = A_0/p$:

$$A = \{ A_0/(pq)^0, A_0/(pq)^1, A_0/(pq)^2, \ldots , A_0/(pq)^i, \ldots \}$$
$$B = \{ B_0/(pq)^0, B_0/(pq)^1, B_0/(pq)^2, \ldots , B_0/(pq)^i, \ldots \}$$

Si noti che $A_0 > B_0 > A_1 > B_1 > A_2 \ldots$

e che l'indice dei termini come di consueto è l'esponente. Inoltre $B_i = A_i / p$.

È facile dim. che se x si trova fra 2 termini con lo stesso indice la partita è persa se no è vinta.

Gli indici fra i quali si trova x sono rispettivamente l'intero inf e sup del logaritmo in base pq di A_0/x e di B_0/x.

Ciò significa che se siamo nell'intervallo sbagliato qualunque k compreso fra p e q manda la x in un intervallo favorevole all'altro giocatore[14].

Invece, costruttivamente, se ci si trova in un intervallo giusto, l'area delle y utili per moltiplicare la x e spedirla nell'intervallo successivo favorevole, è un quarilateroide appuntito **Q** (in azzurrino – Desmos) che ha come lati inf e sup le costanti p e q, e lati obliqui i segmenti delle iperboli[15] $y = qA_{i+1}/x$ e $y = A_i/x$ cioè:

$$p < y < q$$

e

$$qA_{i+1}/x < y < A_i/x$$

Per quanto riguarda le sol intere, se p o q non sono interi vi saranno delle punte estreme di Q vicine al p o al q non intero nelle quali non esisteranno sol intere. Se p e q sono interi invece esiste sempre almeno una sol intera.

Complimenti a tutti i solutori, che hanno capito il problema! La fretta ci obbliga ad andare avanti senza altri commenti.

5.1.2 Just in time

Un duello senza troppo sangue ambienta questo problema:

> *Due duellanti A e B si sono sfidati a un duello a torte in faccia, dove (a) ne hanno a disposizione una sola ciascuno e (b) esiste una distribuzione di probabilità (funzione della distanza) della capacità di centrare l'avversario. I nostri due partono a una distanza d=1, ciascuno con la sua torta, e si avvicinano lentamente uno all'altro entrambi alla stessa velocità; A ha una accuratezza nel tiro descritta da a(d), mentre B ha una accuratezza b(d). Quando tirano la torta?*

E anche qui ci muoviamo velocemente, partendo come sempre da ***Valter***:

> Tento di rispondere ad "istinto": in problemi di probabilità sono "imbranato". Mi pare che, comunque, la probabilità di uno sia la complementare dell'altro.
>
> Un esempio:
>
> - A tira la torta quando la funzione fornisce un'accuratezza del 60% (ovviamente assumo che B, in quel momento, non l'abbia ancora tirata)
> - B, se non è centrato, può perciò giungere a distanza 0 per tirare la sua
> - a quel punto B avrebbe un'accuratezza del 100% di centrare A
> - al 60%, però, potrebbe già essere stato centrato da A in precedenza
> - la sua probabilità, quindi, dovrebbe essere del 100% - 60% = 40%.
>
> Propongo due soluzioni in base a come interpretare il problema:
>
> - i due conoscono entrambi la funzione di accuratezza dell'altro
> - i due conoscono solo la loro funzione di accuratezza.

[14] Intervalli cattivi – Questo è un "per ogni", ovvero proprietà universale, vicina all'entropia, quindi al disordine , alla sconfitta, al comunque vada non c'è scampo).

[15] Intervalli buoni – e invece questo è un "esiste", ovvero proprietà esistenziale, vicina alla neg-entropia, quindi al'ordine, alla vittoria, al forse ce la si fa, al costruire).

Primo caso.

I due tirano quando la probabilità di uno è la complementare dell'altro:

- chi giunge per primo al 50% ha poi più probabilità di centrare che fallire (e l'altro, per quanto detto, più probabilità di fallire che centrare)
- da quel momento, penso, possa ipotizzare di tirare la torta in ogni istante (avrebbe, infatti, sempre più probabilità di centrare che di fallire)
- l'altro, sapendo ciò, può attendere a tirare dopo il 50% dell'altro (al 50% la sua probabilità è inferiore alla complementare dell'altro)
- può attende sino a quando la sua diventa uguale alla complementare
- a quel punto, ad entrambi, almeno penso, convenga tirare la loro torta (… potrebbero centrarsi o salvarsi entrambi oltre a salvarsi solo uno).

Secondo caso:

Il primo che raggiunge il 50% tira la torta in quel preciso momento:

- l'altro potrebbe tirare la torta in qualsiasi altro momento successivo (non sapendo pure un attimo dopo che lui ha giunge al 50% di accuratezza)
- inoltre, se attendesse il tiro dell'altro avrebbe il 50%, …o pure meno
- in questo modo entrambi hanno il 50% di probabilità di centrare l'avversario (se raggiungono il 50% nello stesso istante vale quanto detto nel primo caso).

Per fortuna in questo duello la risoluzione peggiore è lo scorno della torta in faccia (potenzialmente lo spreco alimentare), per cui cerchiamo di preoccuparci poco. Vediamo che cosa ne dice ***Alberto R.***:

Sia Xa la massima distanza alla quale A è capace di lanciare la sua torta. Quindi Xa è anche la distanza alla quale, durante l'avvicinamento, la prob di A di colpire l'avversario comincia a diventare diversa da zero.

Analogo significato per Xb.

Sia Pa(X) la prob che A, lanciando dalla distanza X, colpisca l'avversario.

Analogo significato per Pb(X).

Per devozione a S. Pigrizia suppongo che le suddette funzioni siano lineari, quindi pongo:

$$Pa = 1 - X/Xa \quad Pb = 1 - X/Xb$$

Osservo anzitutto che vale la legge "Chi lancia e non colpisce sarà colpito" perché, non essendo previsto il "Tira e scappa", il bersagliato incolume può portarsi vicinissimo all'avversario restato senza munizioni.

****

A può vincere in due modi (la cui scelta dipende da chi, tra A e B, decide per primo):

1) Perché lancia e colpisce: prob = Pa

2) In forza della legge su citata perché B lancia e non colpisce: prob = 1 – Pb

Quindi A ha interesse a far sì che risulti massimo il più piccolo tra Pa e 1 – Pb, il che accade per quel valore di X che rende

$$Pa = 1 - Pb$$

Perché il massimo del minimo tra due funzioni l'una strettamente decrescente e l'altra strettamente crescente si ha nel punto in cui le due funzioni si incontrano. Dunque:

$$1 - X/Xa = 1 - (1 - X/Xb)$$

Da cui

$$\mathbf{X = Xa \cdot Xb / (Xa + Xb)}$$

> Questa è la distanza che A sceglierà per effettuare il suo lancio, ma è anche la distanza più conveniente per B perché tutto quanto scritto dopo gli asterischi resta valido se si scambiano A con B, Xa con Xb, Pa con Pb.
>
> Nota: Ovviamente se le funzioni Pa(X) e Pb(X) non fossero quelle lineari che ho scelto, la formula finale cambierebbe, ma sarebbe sempre ottenibile dalla condizione Pa (x) = 1 – Pb(x).

Anche qui, poca critica. Forse Alberto non sta bene… qualche acciacco di stagione, siamo sicuri che tornerà in forma entro il prossimo RM. Vediamo la soluzione di ***Luigi***:

> Possiamo constatare che il primo che tira la torta, se non colpisce l'avversario, ha perso perché l'altro avrà tutto il tempo di avvicinarsi e colpirlo.
>
> Supponiamo ora che, all'inizio si abbia $a(d) > b(d)$ con $a(d)$ e $b(d)$ < del 50%
>
> Finché $b(d) < 1–a(d)$ al giocatore B conviene aspettare, è infatti più probabile che A manchi il bersaglio piuttosto che lui, B, colpisca A. Nel momento in cui $b(d)$ uguaglia $1–a(d)$ al giocatore B converrà tirare immediatamente onde evitare che sia A a tirare (al che avrebbe minori probabilità di successo).
>
> Anche per il giocatore A il punto di equilibrio $b(d) = 1–a(d)$ sarebbe il momento giusto di tirare la torta. Infatti finché la sua probabilità di sbagliare è più alta della probabilità di B di colpire non sarebbe per lui conveniente rischiare di più.

Le strategie tendono a convergere, concludiamo con la versione di ***Galluto***:

> Diamo per scontato che ciascuno dei duellanti conosca la funzione propria e anche quella dell'avversario.
>
> Inoltre, per il momento, supponiamo che le probabilità $a(d)$ e $b(d)$ arrivino al 100% quando la distanza d si è ridotta a zero.
>
> In questo caso, se ad un certo punto (ad esempio, avendo il 55% di probabilità) lancio la mia torta, o vinco (55%) o perdo sicuramente (45%) perché l'avversario aspetterà di essermi appiccicato per colpirmi con certezza.
>
> O meglio, parafrasando il finale de I Duellanti di Ridley Scott, quando Feraud ha sprecato il suo colpo e D'Hubert ha ancora il suo, il mio avversario mi dirà "considerati intortato", e la torta se la mangerà lui.
>
> Partendo da questo principio…
>
> - In ogni momento ci sarà un giocatore con una probabilità superiore a quella dell'avversario (e non è detto che sia sempre lo stesso)
> - Finché la probabilità del giocatore in vantaggio è inferiore al 50% non conviene a nessuno tirare la torta: lascerebbe all'avversario più del 50%
> - Anche quando la probabilità del giocatore in vantaggio diventa superiore al 50%, ma quella dell'avversario è inferiore anche alla probabilità contraria dell'avvantaggiato, nessuno tira (esempio: ad una certa distanza ho 51% a favore e il mio avversario ha il 47%, che è meno del 49% della mia probabilità contraria)
> - Nel momento in cui la probabilità contraria dell'avvantaggiato è uguale a quella a favore dello svantaggiato (che è equivalente a dire, quando la somma delle probabilità favorevoli dei due duellanti fa esattamente 100%), all'avvantaggiato conviene tirare
> - Se non lo facesse, immediatamente dopo tirerebbe lo svantaggiato: avrebbe (forse) meno del 50% ma comunque sempre più di quello che, da quel punto in poi, gli toccherebbe se tirasse l'avversario, e sbagliasse.
>
> E adesso rimuoviamo la condizione che $a(d)$ e $b(d)$ arrivino al 100%, e chiamiamo Max(a) e Max(b) le probabilità massime (per d=0) di $a(d)$ e $b(d)$.
>
> Quello che succede se le due funzioni non arrivano al 100% è che ad un certo punto uno dei duellanti tira e, se sbaglia, l'altro aspetta comunque fino alla fine per tirare,

ma poiché c'è una certa probabilità che sbagli anche il secondo, qualche volta l'incontro finisce "0 a 0".

Per poter elaborare una strategia, sono andato a consultare il Codice del Duello, che, per le tenzoni dove l'arma scelta è la torta in faccia, prevede che i contendenti si dotino di una seconda torta e ricomincino ad avvicinarsi dalla distanza d, e così via finché qualcuno viene colpito.

Con questo principio, posso normalizzare la probabilità complessiva dei due duellanti:

- Se A tira la sua prima torta ad una distanza d_1,
  - la sua probabilità a favore è $a(d_1)$
  - la sua probabilità contraria è $(1- a(d_1))$ * Max(b)
  - i casi "nulli" sono il complemento a 100% delle due righe precedenti
- nei casi nulli, si ricomincia ed A tira ancora alla distanza d_1, e così via
- la probabilità complessiva di A ($ac(d)$), se tira alla distanza d_1, è: $\boldsymbol{ac(d) = a(d_1)/(a(d_1)+(1- a(d_1)) * \mathrm{Max}(b))}$
- analogamente, quella complessiva di B ($bc(d)$ è: $\boldsymbol{bc/d = b(d_1)/(b(d_1)+(1- b(d_1)) * \mathrm{Max}(a))}$

e la strategia è la stessa del caso precedente: chi è in vantaggio tira quando la sua probabilità contraria complessiva diventa uguale a quella complessiva favorevole dello svantaggiato (anche in questo caso, più semplicemente, quanto la somma delle due probabilità complessive raggiunge il 100%).

Ci fermiamo qui, tra il ritardo e la pressione del lancio del nuovo blog ci siamo completamente persi il mese, ma Galluto, che continua a tirare torte contro il costrutto del problema, ci è molto piaciuto. Alla prossima!

6. Quick & Dirty

Siccome Doc è sempre in ritardo, per passare il tempo Alice e Rudy si sono inventati un gioco. Alice scrive una lista dei numeri da 1 a N e la passa a Rudy. Rudy cancella due numeri (x e y) e aggiunge alla lista il numero differenza tra i due (anche se questo significa avere in lista un numero in duplice copia) e passa la lista ad Alice. Alice segue esattamente la stessa procedura e ripassa la lista a Rudy… e avanti così sin quando non resta un solo numero. Se il numero finale è pari vince Alice, se il numero è dispari vince Rudy.

Uno dei due ha una strategia?

7. Pagina 46

La dimostrazione procede per induzione.

Per n=2 l'affermazione è ovvia.

Supponiamo che l'affermazione sia stata dimostrata per n–1 successioni e consideriamo un insieme di n successioni, ogni coppia delle quali ha un termine in comune: per 'ipotesi di induzione, n–1 di queste successioni avranno tutte un termine comune A tra loro.

Sottraiamo ora il termine A da tutti i termini delle n successioni: otterremo n successioni, di cui n–1 avranno il termine 0 in comune tra di loro: se possiamo il provare il teorema per queste nuove n progressioni, ovviamente sarà valido anche per l'insieme delle progressioni originali.

Indichiamo le ragioni delle diverse successioni come d_1, d_2, …, d_n, dove i diversi d_i sono tutti interi. Le prime n–1 successioni contengono tutte multipli di, rispettivamente, d_1, d_2, …, d_{n-1}, contenendo tutte il termine 0. Il termine generale dell'n-esima progressione è $a+kd_n$, dove a è un qualsiasi temine della progressione e k un numero (intero) che può essere positivo, negativo o nullo.

Mostreremo che esiste un termine $a+kd_n$ che appartiene a tutte le sequenze, ossia che esiste un intero k per cui $a+kd_n$ è divisibile per tutti i numeri d_1, d_2, …, d_{n-1}: o, equivalentemente, che esiste un intero k tale che $a+kd_n$ è divisibile per il *minimo comune multiplo* N dei numeri d_1, d_2, …, d_{n-1}.

> Sia D il *massimo comun divisore* dei numeri N e d_n; questo significa che esistono due interi p e q tali che $D=pN+qd_n$; questo fatto non è ovvio, e ne diamo la dimostrazione indentata.
>
> Dobbiamo dimostrare l'esistenza degli interi p e q tali che $D=px-qy$, dove D è il massimo comun divisore di x e y. A tal proposito, consideriamo l'insieme I di tutti gli interi della forma $px+qy$, dove p e q sono interi positivi, negativi o nulli: la somma o la differenza di due qualsiasi elementi di I è ancora un elemento di I *[in quanto i termini sono combinazioni lineari e la combinazione lineare di due combinazioni lineari è una combinazione lineare]*, e un qualsiasi multiplo di un elemento di I è un elemento di I.
>
> I ha almeno un elemento positivo: sia E il più piccolo elemento positivo di I: vogliamo mostrare che $E=D$.
>
> Per prima cosa, mostriamo che I è formato da tutti i multipli (positivi, negativi o nulli) di E. Sia t un arbitrario elemento di I: dividendo t per E otteniamo un resto r compreso tra 0 e $E-1$, ossia $t=nE+r$, $0\leq r<E$.
>
> Ma E è in I, e quindi lo è anche nE; e t è in I, e quindi lo è anche $r=t-nE$. Ma abbiamo scelto E come il più piccolo elemento positivo di I, e r è minore di E: quindi, deve essere $r=0$. Questo significa che ogni termine t di I è della forma nE; in particolare, E è un fattore comune di x e y, entrambi in I, e quindi divide D. D'altra parte, ogni numero della forma $px+qy$ è divisibile per D, e E è in questa forma, essendo un membro di I. Siccome i due numeri positivi D e E sono divisibili l'uno per l'altro, devono essere uguali. Possiamo quindi scrivere $D=E=px+qy$, che è l'ipotesi che volevamo provare.

Proviamo ora che a è divisibile per D: data la scomposizione in fattori primi di D:

$$D=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_r^{\alpha_r}$$

Il fatto che D sia divisibile per uno dei suoi fattori primi significa che sia d_n che N sono divisibili per questo fattore, e il fatto che il minimo comune multiplo N dei numeri d_1, d_2, …, d_{n-1} sia divisibile per il medesimo fattore significa che almeno uno di questi numeri (sia esso d_1) è divisibile per questo fattore: ma, per la premessa del problema che due *qualsiasi* delle n successioni abbiano un termine in comune, la prima e l'n-esima progressione avranno un termine in comune: in alte parole, esistono due numeri k' e k'' per cui $k'd_1=a+k''d_n$, ossia $a=k'd_1-k''d_n$, da cui segue (essendo sia d_1 che d_n divisibili per un qualsiasi elemento della scomposizione in fattori primi di D) che a è divisibile per uno qualsiasi degli elementi della scomposizione in fattori primi di D. E quindi a è divisibile per D.

Moltiplichiamo l'espressione $D=pN+qd_n$ per il fattore $m=a/D$, otteniamo $a=pmn+qmd_n$, ossia $a-qmd_n=pmN$, ossia il termine $a-qmd_n$ è divisibile per N, il che era la nostra tesi.

8. Paraphernalia Mathematica

Facciamo un paio di outing.

Tanto per cominciare, non abbiamo mai amato molto i *problemi* di dissezione: ci è sempre sembrato che si limitassero a quello che Martin Gardner chiamava un "momento ah ha!", lasciando poi un po' di amaro in bocca per quanto "era facile". Ci sono invece sempre piaciute le *soluzioni* dei suddetti problemi, principalmente perché riuscire a trovare come costruirle geometricamente era spesso tutt'altro che semplice e abbastanza divertente.

L'altro outing è che siamo sempre molto contenti quando scopriamo (da soli: se ce lo dicono gli altri, un po' meno) di avere torto.

I primi dubbi ci erano sorti un paio di mesi fa (BJ&P46307); ***Alessandro***, nel numero passato (PM307, "Le pagine dopo la 46") ci ha dato una gentile ma decisiva spinta nel convincerci che sul primo punto avevamo torto.

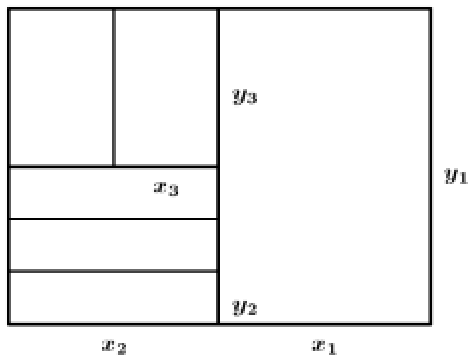
Se il pezzo che segue vi sembra noioso (a noi no), prendetevela con ***Byung-Ku Chung***, ***Andy Liu*** e ***Daniel van Vliet***., dei quali avevamo citato l'inizio dell'articolo ma vi avevamo lasciato nell'ignoranza del seguito.

8.1 Ancora sulle dissezioni (ma poi basta)

Uno dei problemi che avevamo presentato nel BJ del numero 307 consisteva nel sezionare un quadrato in tre pezzi simili tali che esattamente due fossero tra di loro congruenti; il problema si può dividere in due sottoproblemi, richiedendo che i due pezzi congruenti siano *più piccoli* o *più grandi* del pezzo restante. Si è visto che tutte le soluzioni a questo problema sono del primo tipo, mente il secondo tipo è impossibile.

È possibile generalizzare il problema: dato un intero $m>1$ e le sue 2^{m-1} decomposizioni (o partizioni *ordinate*) $m=a_1+a_2+...+a_n$, sezionare un quadrato in m parti simili tali che ci siano esattamente a_1 pezzi della dimensione più grande, a_2 della dimensione immediatamente inferiore e così via. Nel problema originale avevamo $m=3$ e le decomposizioni possibili erano (1): 3, (2a): 1+2, (2b): 2+1, (3):1+1+1 ("2a" e "2b" sono i due sottoproblemi visti poco sopra). Dividiamo il problema generalizzato in alcuni sottocasi.

Supponiamo per prima cosa $m=a_1+a_2+...+a_n$, con $a_n>1$: iniziamo con un rettangolo R e dividiamolo in una serie di rettangoli definiti in questo modo: il rettangolo R_1 è la metà destra di R, il rettangolo R_2 la metà inferiore di $R–R_1$, R_3 come metà destra di $R–R_1–R_2$, R_4 come metà inferiore di $R–R_1–R_2–R_3–R_4$ e avanti in questo modo, sino a $R_n=R–R_1–R_2–...–R_{n-1}$ (affineremo le dimensioni di questi rettangoli in seguito). Dividiamo quindi R_i in a_i parti rettangolari attraverso linee verticali se i è dispari e orizzontali se i è pari, e siano le dimensioni orizzontali e verticali di ogni parte R_i rispettivamente x_i e y_i; la situazione per $m=6=1+2+3$ è mostrata nella figura.

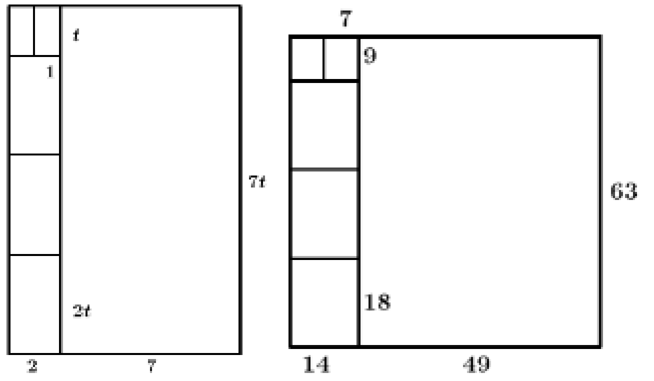


5 *Una divisione generale.*

Il passo successivo consiste nel rendere i diversi pezzi simili tra di loro imponendo $y_i=x_it$ per ogni i, dove t è un numero positivo dato: dall'assunto $a_n>1$ segue che un pezzo in R_i è maggiore di un pezzo in R_j se $i>j$. Scegliamo $x_n=1$, in modo tale che $y_n=t$; in questo modo, se n è pari, $y_{n-1}=a_ny_n=a_nt=a_nt$ e $x_{n-1}=a_n$; se invece $n>1$ è dispari, $x_{n-1}=a_nx_n=a_n$ e $y_{n-1}=a_nt$.

Procedendo a ritroso attraverso le formule ricorsive $y_{i-1}=a_iy_i+y_{i+1}$ per i pari e $x_{i-1}=a_ix_i+y_{i+1}$ per i dispari è possibile calcolare la dimensione delle figure R_{n-2}, R_{n-3},..., R_1 e R; nella figura, si vede il risultato dell'applicazione di questo processo alla figura precedente.

L'ultimo passo consiste nel calcolare t in modo tale che R sia un quadrato: in altre parole, t deve essere soluzione dell'equazione $y_1=a_1x_1+x_2$; essendo y_1 lineare in t ed essendo $a_1x_1+x_2$ una costante, per valori sufficientemente grandi di t sarà $y_1> a_1x_1+x_2$. Se t=1 tutti i pezzi ottenuti saranno quadrati e sarà $y_1 = x_1 \leq a_1x_1 \leq a_1x_1+x_2$. Essendo m>1, dovrà essere o a_1>1 o x_2>0, in modo tale che $y_1 < a_1x_1+x_2$: questo dimostra che esiste un numero reale t>1 per cui $y_1= a_1x_1+x_2$.



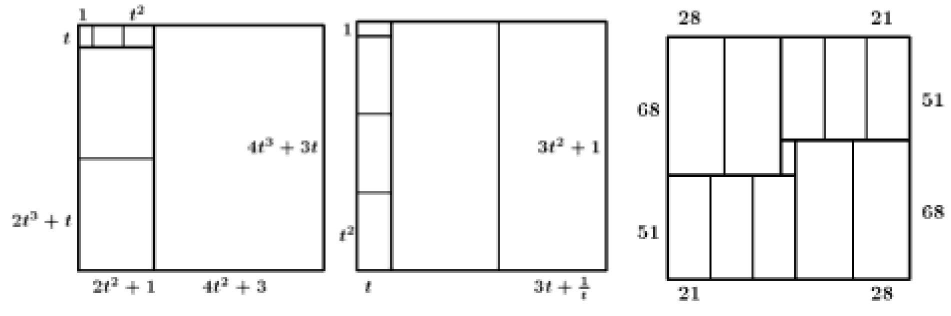
6 *Il caso particolare e la sua "quadratura".*

Sempre nel caso della figura, si ha $7t$=9, ossia t=9/7. In generale, essendo t soluzione di un'equazione lineare a coefficienti interi, sarà un numero razionale e quindi possiamo applicare un ingrandimento tale da portare i lati di tutte le parti a dimensioni intere; nel caso particolare, applicando un fattore di ingrandimento pari a 7 si ottiene quanto richiesto (seconda parte della figura).

Il secondo caso da esaminare è quello nel quale $m=a_1+a_2+...+a_n$, con però a_n=1 e $n\geq 3$.

Il primo passaggio è identico a quello esaminato qui sopra: rendiamo tutti i diversi pezzi simili tra loro imponendo $y_i=x_it$ tranne per l'ultimo i dispari, per cui $x_i=y_it$. Lo scopo è di dimostrare che l'equazione $y_1=a_1x_1+x_2$ ha soluzioni reali (come punto di partenza si noti che, esattamente come sopra, $y_1<a_1x_1+x_2$ per t=1).

Supponiamo che $n\geq 4$ sia pari, e siano x_n=1 e $y_n=t$. In questo caso, $y_{n-1}=t$, $x_{n-1}=t^2$, $x_{n-2}=t^2+1$ e $y_{n-2}=t^3+t$. Per induzione, si vede che x_i è della forma at^2+b, mentre y_i è della forma ct^3+dt, dove a, b, c e d sono interi dipendenti solo da i. Quindi, deve essere $y_1>a_1x_1+x_2$ per valori di t sufficientemente grandi *[e, ricordando il "punto di partenza" di questa parte, da qualche parte deve esserci l'uguaglianza, vista la linearità].*



7 *Tre casi particolari.*

Supponiamo ora che $n\geq 3$ sia dispari e siano $x_n=t$ e y_n=1. Allora $x_{n-1}=t$, $y_{n-1}=t^2$, $y_{n-2}=t^2+1$, e $x_{n-2}=t+1/t$. Per induzione, x_i è della forma $at+b/t$ e y_i della forma ct^2+d per ogni i, dove a, b, c e d sono interi dipendenti solo da i. Quindi, deve essere $y_1>a_1x_1+x_2$ per valori di t sufficientemente grandi *[sempre per linearità, da qualche parte deve esserci l'uguaglianza].*

Nella figura si vedono tre casi: i primi due sono le partizioni esprimibili come 6=1+2+2+1 e 6=2+3+1; la terza mostra un caso nel quale possiamo utilizzare pezzi con lati interi e lo stesso orientamento: questo è il caso 11=4+6+1.

Ci restano da verificare i casi definiti come $m=k$+1, dove k è un qualsiasi intero positivo *[attenzione che è una divisione: k rettangoli uguali e uno no]*. Supponiamo la soluzione esista, formata da un pezzo "1 per t" e k pezzi "s per st", con $t\geq 1$ e s>1 entrambi numeri reali.

Sia la lunghezza del lato del quadrato pari a l, e consideriamo una linea verticale o orizzontale che tagli il quadrato e che non comprenda il lato di un pezzo; in questo caso, deve essere $l=as+bst$ per valori interi di a e b, se il segmento non taglia il pezzo; se invece taglia il pezzo possiamo avere o $l=cs+dst+1$ o $l=es+sft+t$, per dei valori interi di c, d, e e f.

Da $as+bst=cs+dst=1$ si ha che s è razionale se e solo se lo è t; esaminiamo per primo il caso nel quale entrambi siano razionali. Sia $s=g/h$ e $t=i/j$, dove g e h siano interi primi tra loro, come i e j. Allora $agj+bgi=cgj+dgi+hj=egj+fgi+hi$; ossia, g divide hi e hj. Ma essendo g e h primi tra loro, deve essere $g=1$. Quindi $s=1/h\leq 1$, che è un assurdo.

Dobbiamo anche considerare il caso nel quale s e t siano irrazionali, il che porta a $t>1$. Con la medesima costruzione vista qui sopra, abbiamo $l=as+bst$ per una qualche coppia di interi a e b.

Si noti che a e b sono indipendenti dalla scelta del segmento: se avessimo $l=a's+b'st$ per degli $a'\neq a$ e $b'\neq b$, sarebbe $t=(a-a')/(b-b')$, e quindi t sarebbe razionale. E dato che il segmento può essere orizzontale o verticale, dovrà essere $a>0$ e $b>0$.

Definiamo come *linea di divisione* la linea che divide il quadrato in due rettangoli, ciascuno dei quali contiene solo pezzi interi e, eventualmente, riaggiustiamo i pezzi in modo tale che i più grandi siano tutti da una parte della linea di divisione, e dividiamo il rettangolo risultante in strisce di larghezza *[in realtà, è l'altezza delle strisce]* s dalla cima: ogni striscia conterrà b pezzi "st per s" e a o 2^a quadrati di lato s, ognuno dei quali conterrà parti di uno o due pezzi "s per st". Quindi l'altezza del rettangolo originale sarà pari a ps per un qualche intero p.

Possiamo riaggiustare i pezzi all'interno di questo rettangolo in modo tale che tutti gli orizzontali siano sulla sinistra e tutti i verticali sulla destra; questo però porterebbe ad avere $ps=qst$ per un qualche intero p: ma essendo t irrazionale, questa è una contraddizione, e quindi il nostro quadrato *non ha una linea di divisione*.

Possiamo ora combinare i pezzi più larghi in rettangoli sin quando l'unione di due qualsiasi di loro non dà più un rettangolo; se questa combinazione non è unica, scegliamo quella per la quale il numero r di rettangoli è minimo; se $r\leq 3$, si viene a creare una linea di divisione, il che abbiamo visto non essere possibile: quindi, deve essere $r\geq 4$.

Nel caso $r=4$, l'unica configurazione possibile è quella data da quattro rettangoli *[uguali tra loro]* agli angoli e un piccolo pezzo centrale; essendo $l=as+bst$ (con a e b maggiori di zero), due rettangoli possono essere divisi in a colonne e b righe di rettangoli "s per st" e gli altri due *[che sono orientati perpendicolarmente ai precedenti]* possono essere divisi in a righe e b colonne di rettangoli "st per s". Questo però porterebbe il piccolo pezzo centrale ad essere un quadrato, e quindi ad avere $t=1$, che è una contraddizione.

Supponiamo allora $r\geq 5$: ci sarà, in un qualche angolo, un rettangolo non adiacente al pezzo più piccolo. Almeno uno dei due lati all'interno del quadrato originale è l'unione di due lati di almeno altri due rettangoli *[se non lo è il lato verticale, lo sarà quello orizzontale]*.

Questo rettangolo e quelli adiacenti possono essere sezionati in parti orientate tutte nella medesima direzione (altrimenti t sarebbe razionale, per quanto visto qui sopra); possiamo adesso espandere il rettangolo nell'angolo sin quando non "inghiotte" il rettangolo a lui collegato: questo però porta ad una riduzione di r, che contraddice l'assunto che questo valore sia minimo. Quindi il caso $m=k+1$ non è risolubile con pezzi rettangolari.

[...e noi la chiuderemmo qui… Se però qualcuno ha ancora qualcosa da dire, valuteremo].

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms