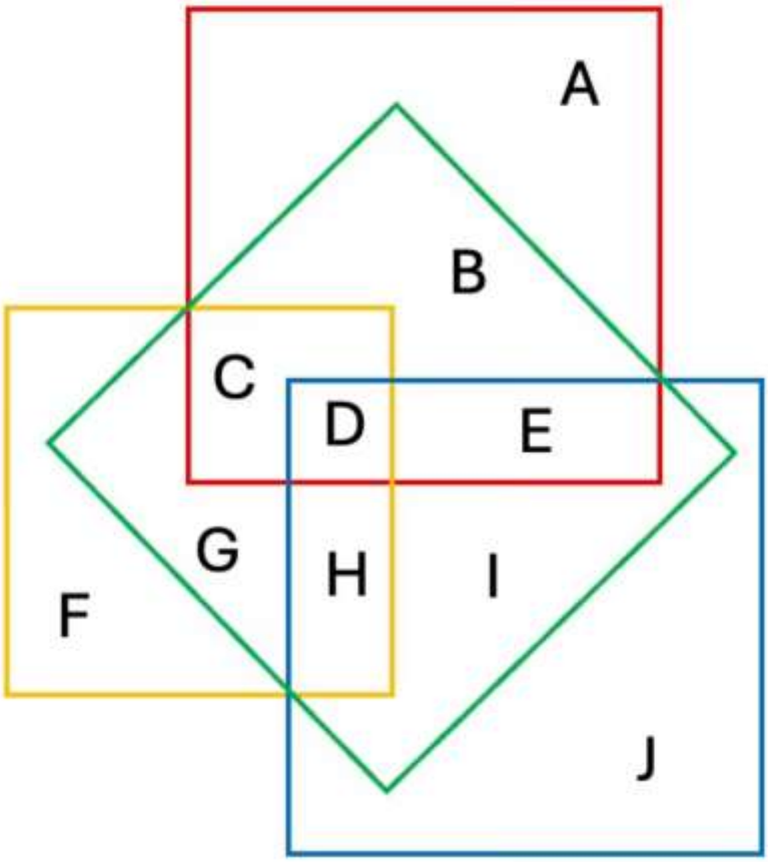
Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 310 – Novembre 2024 – Anno Ventiseiesimo



Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM308 ha diffuso 3387 copie.

...fatevene una ragione: ogni volta che non troviamo una copertina decente, vi beccate un puzzle di quelli non ambientabili (ma che noi troviamo simpatici). Nella figura, le lettere da A a J rappresentano i numeri da 1 a 10, e a lettera diversa corrisponde numero diverso; le somme all'interno dello stesso quadrato sono tutte uguali tra loro. Quanto vale D?

1. La fine della terra

"Aqui...
Onde a terra se acaba
e o mar começa..."[1]

Forse dipende dal fatto che è quasi impossibile separare l'idea della navigazione avventurosa e trionfale dalla figura di Cristoforo Colombo, soprattutto per noi italiani. O forse – per motivazioni diametralmente opposte – perché le grandi esplorazioni marittime dei secoli successivi hanno messo la nostra penisola in disparte, proprio quando l'Europa cominciava a mostrare la sua grande potenza (e anche la sua certo non meno grande prepotenza) al resto del mondo. Fatto sta che tutti ricordano l'arrivo di Colombo nel Nuovo Mondo, e la conseguente espansione della Spagna in tutte le Americhe; tutti sanno che subito dopo Inghilterra, Francia e Olanda si lanciano sull'Atlantico settentrionale per contendere a Madrid le terre della ricca coppia di continenti, e le mille contese che ne derivano. Del resto, è davvero un momento cruciale nella storia del mondo: dai tempi più remoti le due parti più popolate del pianeta, l'Occidente europeo e l'Oriente asiatico, si fronteggiavano in cagnesco senza realmente conoscersi. La via diretta, lungo l'asse est-ovest, era sempre stata disseminata da guerre e invasioni, ma era troppo lunga e vasta per consentire alle due culture sia di massacrarsi per bene che di imparare a conoscersi e rispettarsi. L'Oriente appoggiato sul Pacifico e l'Occidente schiacciato sull'Atlantico si conoscevano quasi solo per sentito dire: la grande mole d'Africa a sud, coperta dalle sabbie del Sahara, e le distese quasi infinite, tra est e ovest, delle steppe e dei deserti che costellano l'Asia centrale, consentivano solo incursioni, razzie, e infinite guerre che non si potevano neppure chiamare guerre di confine, perché la linea di confine che le separava era larga quanto un quarto di mondo. E diventò tutto ancora più complicato quando l'Islam unì milioni di persone che dai deserti d'Arabia emersero conquistando gran parte del mondo di mezzo: tutto il Nordafrica, tutti i paesi che ancora oggi chiamiamo "arabi", e un gran bel pezzo d'Asia centrale. I pochi contatti commerciali tra Europa ed estremo Oriente – concentrati soprattutto sull'importazione di spezie – furono quasi del tutto interrotti, e quei pochi che sopravvivevano erano in mano a Turchi e Veneziani, che facevano pagare carissime le spezie d'Oriente.

1 *Sul gigantesco "Monumento delle Scoperte", a Lisbona, Enrico il Navigatore tiene in mano una caravella e lancia lo sguardo verso l'Atlantico.*

Ma poi i nuovi vascelli inventati dai portoghesi riescono a restringere l'Atlantico e a far tracimare l'Occidente, che dilaga così per le lunghe rotte degli oceani. Da estrema propaggine d'Eurasia, l'Occidente si muta in qualcosa di diverso: un organismo più mobile, oceanico, transcontinentale. E la storia del mondo comincia seriamente a cambiare.

Così, è in fondo un po' strano scordarsi così spesso che il primo continente seriamente affrontato per via mare, la prima rotta degli Europei verso le altre parti del mondo non è quella tracciata da Colombo, ma quella aperta dai portoghesi. Certo, è vero che Vasco da Gama supera il capo di Buona Speranza solo cinque anni dopo che Colombo tocca terra su

[1] "Qui… dove la terra finisce e il mare comincia…"

un isolotto delle Bahamas, ma l'impresa di Colombo è diventata possibile solo perché era da decenni che da Lisbona partivano le timide caravelle per provare a capire com'era davvero fatto quel mare immenso, per scoprire se fosse davvero popolato di mostri o semplicemente infinito, come raccontavano altri.

È proprio l'estremo lembo occidentale d'Europa ad affacciarsi con decisione verso il mare: troppo periferica rispetto al cuore politico del continente, la piccola striscia allungata da nord a sud nell'ovest nella penisola iberica decide di guardare seriamente verso il mare. Anzi, verso l'Oceano: verso l'occidente ignoto e misterioso, certo, nonostante non si abbia memoria di terra conosciuta, in quella direzione; ma, soprattutto, punta le prue delle sue rivoluzionarie caravelle verso sud, tenendo sempre l'immensa e sconosciuta Africa a sinistra. Anzi, a babordo.

La natura ha piazzato il Portogallo già oltre le Colonne d'Ercole, fuori da Mediterraneo, quel mare chiuso che da sempre si vanta di essere il centro del mondo e la culla della civiltà: il Portogallo invece è l'ultimo lembo di terra prima dell'ignoto, perché oltre il Portogallo non c'è niente. Sì, si sa che c'è l'Africa a sud, ma provaci, ad arrivare in Africa via mare. C'è il mostruoso Capo Bojador, e per "mostruoso" si intende proprio il significato letterale, popolato di mostri che divorano le navi che provano a superarlo ma non ci riescono, e non rientrano nei porti di Lisbona.

Non solo di Lisbona, a dire il vero: con la via della seta e delle spezie chiusa dagli eserciti dei successori di Maometto, sono molte le nazioni che provano a cercare di capire se sia possibile aggirare l'Africa, tenendola sempre a sinistra, con la bussola puntata a sud, e con la speranza che prima o poi l'ago cominci a piegare, prima verso est e poi finalmente verso il nord. Dalla Catalogna e dall'Italia, soprattutto da Genova, partono intrepidi navigli ancora in pieno Medioevo: mettono coraggiosamente la prua fuori dallo Stretto di Gibilterra e navigano alla cieca anch'essi, con la speranza di trovare qualcosa, prima o poi, qualcosa non ancora conosciuto, al di fuori dalla culla del Mediterraneo. Ad esempio, tra i primi ci sono i fratelli Ugolino e Vadino Vivaldi, genovesi che già nel 1291 provano a superare il terribile Capo Bojador, e ancora oggi non si sa se ci siano riusciti o meno, perché nessuno li ha mai più visti. È un promontorio davvero misterioso, anche se oggi, a guardarlo su una cartina del Sahara Occidentale, sembra del tutto innocente, neppure notevole, persino quasi immeritevole del termine "capo". Eppure, anche gli arabi che lo conoscono da terra, dal deserto, sembrano avere un rispetto mistico verso quel promontorio: lo chiamano *Abū Khaṭar*, "padre del pericolo".


2 *Vasco da Gama.*

Di certo è diventato un'ossessione per il più famoso dei principi portoghesi, quell'Enrico detto il Navigatore che vuol trasformare tutti i portoghesi – non potendo averli come sudditi, essendo quintogenito del re[2] – in marinai del Mare Oceano. Per almeno quindici volte ha mandato navigli portoghesi a cercare di superarlo, per quindici volte hanno fallito. Ma Enrico, affascinato dal mare, non desiste: è a causa sua – quasi del tutto a causa sua – se il Portogallo diventa la maggiore potenza marittima del mondo, durante il XV secolo. La Spagna non sarà poi da meno, Francia, Olanda e soprattutto Inghilterra finiranno poi per superarlo, ma negli anni centrali del Quattrocento i portoghesi surclassano tutti: genovesi, veneziani, castigliani e catalani. Con le nuove caravelle, al cui progetto lo stesso principe

[2] Cioè di Giovanni I, o per meglio dire João I d'Aviz, re del Portogallo.

Enrico ha sostanzialmente collaborato, i marinai di Porto e di Lisbona trovano le Azzorre e Madera, superano le Canarie già occupate da Genovesi e Spagnoli e arrivano a Capo Verde, dove l'Africa si spinge al suo vertice occidentale.

Quando Vasco da Gama riesce infine a circumnavigare tutta l'Africa, Enrico il Navigatore è ormai morto da quasi quarant'anni: lo stesso capitano che per primo doppia il Capo di Buona Speranza e l'ancora più meridionale Capo Agulhas non era ancora nato, quando l'Infante di Portogallo Enrico d'Aviz passa miglior vita nel 1460. Ma il suo sogno si è davvero avverato: una nave portoghese è arrivata fino in India. Partita da Lisbona l'8 luglio 1497, vi ritorna il 9 settembre 1499, carica di merci di Calicut, dopo 26 mesi di navigazione e dopo aver navigato per più chilometri di quanti ne servano a fare il giro del mondo, che ancora nessuno sa con esattezza quanto sia grande[3]. Ma tutti cominciano a capire che, piccolo o grande che sia, il mondo sta diventando davvero un mondo nuovo.

Poi tutto sembra correre, cambiare, e cambiare in fretta. Sulle orme di Vasco da Gama parte quasi subito la spedizione di Pedro Alvares Cabral, che cerca di abbreviare il viaggio allontanandosi dalle coste africane verso ovest, alla ricerca di correnti che potessero fargli superare quelle contrarie che regnano oltre Capo Verde. È così che, quasi per caso, diventa il primo europeo a sbarcare in Brasile; anche per questo si renderà necessario il Trattato di Tordesillas che, sacramentato da papa Alessandro VI, affida alla Spagna tutto il nuovo mondo americano e al Portogallo tutto il vecchio mondo africano e asiatico raggiungibile dal mare, ma con la grande eccezione dell'estrema regione orientale del Sudamerica, dove i portoghesi hanno già le prime basi del futuro Brasile.

3 *Cabo da Roca, Portogallo, limite ovest dell'Europa continentale.*

È il momento del massimo splendore portoghese. Il periodo che viene cantato in quello che per i lusitani è ancora il poema epico nazionale, studiato nelle scuole come in Italia si studia la Divina Commedia di Dante: *Os Lusíadas,* "I Lusiadi", di Luís Vaz de Camões, scritto nel 1572. Ed è forse anche per questo che, anche se il grande *Padrão dos Descobrimentos* – che è una gigantesca caravella di pietra e cemento che sembra galleggiare sulle acque del Tago, proprio là dove il Tago comincia ad essere indistinguibile dall'Atlantico – è certo il ricordo più maestoso ed evidente di quel periodo, i portoghesi non hanno dimenticato di arrivare fino a Cabo Roca, a una trentina di chilometri dal centro di Lisbona, e mettere un cippo che ricordi come quel promontorio sia il punto più occidentale del continente europeo (anzi, a ben vedere di tutta l'immensa Eurasia), per segnare quella che per loro è la fine della terra e di conseguenza (e forse per fortuna) l'inizio del mare. I versi di Camões incisi nella pietra sottolineano proprio questo, in fondo: per i naviganti,

[3] I dotti del tempo sapevano abbastanza bene che il mondo era sferico, e non piatto, ma le opinioni divergevano sulle dimensioni della sfera. Le obiezioni che i "saggi di Salamanca" opponevano al progetto di Colombo non erano basate sull'idea che le Indie non fossero raggiungibili navigando verso Occidente, ma sulla valutazione delle dimensioni della Terra, che a loro dire era troppo grande per affrontare il viaggio, mentre Colombo pensava fosse più piccola. I saggi di Salamanca erano assolutamente nel giusto: non ci fossero state le Americhe in mezzo, il nostro eroe genovese avrebbe fatto una brutta fine. È comunque curioso notare che anche gli ignoranti che sostenevano la piattezza della Terra non avrebbero avuto motivo di contestare il viaggio di Vasco da Gama, che si limitava ad andare verso est via mare, anziché via terra, mentre probabilmente pensavano fosse matto il buon Cristoforo, che difendeva quell'idea di "*buscar el levante jendo por el ponente*". E poi dicono che studiare la geometria solida non serve…

per tutti i portoghesi, la fine della loro amata terra è stata anche l'inizio del momento che ricordano come il più glorioso.

Anche se molti di loro non riescono ad immaginare di restare distanti dal mare, gli esseri umani sono animali terrestri. Hanno bisogno della terra, non possono vivere senza avere la superficie solida del pianeta sotto i piedi; non possono costruire case nel mare, non possono neppure respirare, nell'acqua. Ne segue che, immancabilmente, ogni costa diventa un luogo di confine, una cesura mentale prima ancora che fisica. Da una parte l'acqua, dall'altra la terra; e, per quanto il mare possa essere fascinoso e attraente, per un animale terrestre una costa è più una "fine di terra" che un "inizio di mare".

Però, fosse tutto qui, ogni singolo metro di costa dovrebbe meritarsi l'epiteto di "fine della terra", mentre invece questo sembra essere riservato solo a qualche punto speciale. E in questo caso "speciale" non significa solo particolare dal punto di vista geografico, come la punta estrema di una lunga penisola allungata verso il mare: quel che conta di più è l'aspetto umano e culturale.

Basta pensare proprio all'Italia: il suo limite estremo, dal punto di vista peninsulare, è la costa più meridionale della Calabria, più o meno all'altezza di Palizzi Marina, in provincia di Reggio Calabria. Eppure, nonostante dal punto di vista geografico sia un punto notevole, non è mai stato celebrato come "fine della terra". In realtà, non c'è nessun promontorio, nel Mediterraneo, che si può fregiare di un titolo del genere: il Mediterraneo è un mare chiuso, e fin dai tempi più remoti le sue coste, più che come segni di un viaggio che finisce, sono state vissute come punti in cui i viaggi cominciano; viaggi per raggiungere altre terre. La stessa cosa vale un po', forse, anche per tutte le coste cinesi: anche se si aprono sull'immenso Pacifico, prima di arrivare nell'oceano aperto ci sono isole, arcipelaghi conosciuti, come quello giapponese e tutta la catena delle penisole e isole indocinesi. Come a dire che non basta che la terra finisca; deve anche finire verso l'ignoto.

In compenso, quasi tutte le coste europee che si affacciano sull'Atlantico hanno posti che rivendicano di diritto di chiamarsi "fine della terra". Gli inglesi chiamano "Land's End" l'estremo sinistro della Cornovaglia, mentre gli Spagnoli, nell'angolo superiore del loro territorio, in Galizia, a meno di 500 chilometri a nord e quasi allo stesso meridiano del portoghese Capo Roca, segnano la fine del Camino di Santiago proprio sul mare più vicino a Santiago de Compostela, nella penisola che chiamano Finisterre.

4 *Quimper, capoluogo del Finistére. Particolare della sua famosa "Place au Beurre".*

Ma sono come al solito i francesi coloro che evidenziano la meglio la presupposta grandezza: paragonano la loro nazione a un esagono, e il vertice del poligono situato a Nordovest è la vasta punta della Bretagna, che termina in una regione che tutta, intera, si chiama Finistère[4], nella regione della Bretagna: un po' come dire che lì finisce la Francia, la terra, e il mondo.

La città capoluogo del Dipartimento del Finistére è Quimper; è famosa per il burro, per i dolmen, per i corsari, e per essere il luogo di nascita di un matematico.

[4] A proposito di "grandeur" francese: stando a Wikipedia, il nome in lingua bretone dovrebbe essere *Penn-ar-berd*, che significa direttamente "fine del mondo".

5 *Émile Michel Hyacinthe Lemoine*

Émile Michel Hyacinthe Lemoine nasce il 22 novembre 1840 proprio nella "fine della terra" dei francesi, figlio di un soldato di Napoleone. Non un soldato qualunque, però, visto che aveva incarichi di una certa importanza nel progetto napoleonico di trasferire il Pritaneo di Saint-Cyr negli edifici dell'ex College di La Flèche. È già abbastanza complicato provare a seguire le decisioni del Bonaparte anche quando non coinvolgono parole difficili, quindi forse è meglio prendersi una piccola pausa consultando le infinite risorse della Rete: il Pritaneo (*Prytanée* in francese) è un edificio pubblico delle città dell'antica Grecia, dove risiedeva il maggior magistrato della comunità. Oltre a ciò, svolgeva un po' anche il ruolo che a Roma aveva il tempio di Vesta, perché vi veniva conservato il fuoco sacro, e forte di queste importanti caratteristiche aveva anche altre funzioni pubbliche di altissimo grado: vi si accoglievano gli ambasciatori, vi si celebravano i maggiori sacrifici; insomma era, per molti versi, il luogo più sacro della città. Col passare del tempo, alcune funzioni mutarono, e altre nuove di aggiunsero: ad esempio, divenne il luogo dove venivano alloggiati e nutriti gli ospiti di riguardo, e lì si celebrava anche una sorta di rito che prevedeva l'offerta di cibo agli eroi che si distinguevano in battaglia. Da queste premesse, non dovrebbe risultare poi troppo strano che con il termine *Prytanée* i francesi intendessero alla fine una vera e propria scuola militare. E infatti, con il nome di *Prytanée de Saint-Cyr* Napoleone fonda, nel 1808, una sezione speciale della sua Accademia Militare Saint-Cyr, da lui fondata nel 1802. La sede prescelta è l'ex Collegio dei Gesuiti di La Flèche, piccolo centro a metà strada tra Parigi e Quimper.

Fondazioni e spostamenti napoleonici a parte, quel che è evidente è che la famiglia Lemoine si trasferisce a La Flèche, e che il giovane Émile riceve una speciale borsa di studio per portare avanti i suoi studi all'interno del *Prytanée*. Non si può certo dire che la borsa di studio fosse una sorta di favoritismo: a 19 anni, quando è ancora studente a Le Flèche, pubblica la sua prima memoria, risolvendo un problema posto dai *Nouvelles annales de mathématiques*[5]. L'anno successivo prende il diploma e corre a Parigi per iscriversi alla celeberrima *École Polytechnique*.

Quando si raccontano i fatti salienti della biografia di un matematico – ma la cosa è abbastanza simile anche per altre discipline di ricerca – il percorso abituale è quasi sempre lo stesso: il protagonista entra all'università da matricola, dimostra subito di essere particolarmente brillante e assai spesso, se si escludono viaggi di studio e permanenze di approfondimento, lo studente rientra alla sua *alma mater* bell'e pronto a iniziare la sua carriera di accademico. Per dirla con una libera metafora, l'ingresso all'università per molti scienziati[6] è un passo non molto diverso da quello che si compie con il matrimonio; si resta spesso legati per la vita. Beh, non è quello che succede Émile Lemoine: proprio no.

Ottiene la laurea dall'*École Polytechnique* nel 1866, sei anni dopo la sua iscrizione, e non sappiamo dire se fosse il tempo normalmente previsto o meno: ma di certo l'impressione che si ricava dalla sua biografia è che il giovanotto che esce dal Politecnico non sia animato dal sacro fuoco della passione per la ricerca, per l'insegnamento, e neppure per un solido

[5] Era un giornale scritto dai candidati del Politecnico e della Normale.

[6] O, perlomeno, per molti scienziati diventati poi sufficientemente famosi da poterci scrivere sopra un "compleanno".

lavoro da ingegnere. A quel tempo, ogni laureato dall'*École Polytechnique* aveva il futuro assicurato: era lo stesso stato francese a garantire l'assunzione e carriera ad ogni ingegnere. Lemoine però non sembra particolarmente attratto all'idea di mettersi seriamente al lavoro: tiene occasionalmente qualche lezione proprio al Politecnico, ma i suoi ventisei anni d'età sembrano reclamare con più forza la voglia di divertirsi, rispetto alla placida costruzione di una carriera accademica. Forse proprio perché è nato così vicino alla "fine della terra" è particolarmente sensibile alle sirene della città più carnalmente terrestre del mondo conosciuto, e dedica i suoi anni giovanili a godersi appieno la *Ville Lumière*.

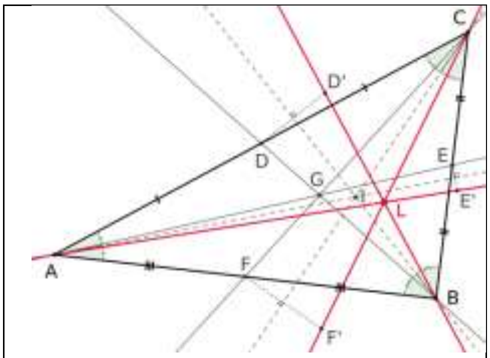
6 *Camille Saint-Saëns.*

Émile si dimentica della scienza, della matematica e dell'ingegneria per quasi un intero lustro; non ci sentiamo neanche di criticarlo, visto che per lui si trattava del lustro migliore, quello in cui si ha ancora il cuore di un ragazzo e le possibilità di un adulto. E poi, a dire la verità, già nei sei anni da studente aveva palesato una certa predisposizione verso interessi più allegri e giocosi della risoluzione di problemi e della dimostrazione dei teoremi. Se negli anni Sessanta del Novecento era quasi inevitabile che gli studenti universitari mettessero in piedi dei complessi musicali non appena trovavano un paio di strimpellatori e un batterista, negli anni Sessanta dell'Ottocento la cosa era assai meno comune; eppure, Lemoine lo fa. Il suo gruppo musicale ha il vigoroso nome "*La Trompette*"[7], e non doveva essere malaccio: certo non avrà avuto lo stesso impatto che avranno i Beatles un secolo dopo, ma è diventato abbastanza famoso ed è durato abbastanza da mobilitare Camille Saint-Saëns, il celebre autore de "*Il Carnevale degli Animali*" e della "*Danza Macabra*", fino al punto di comporre un'opera per esso. "*Quanto mi hai tormentato per farmi scrivere, controvoglia, un pezzo che non volevo scrivere, e che è diventato uno dei miei grandi successi. E non ho mai capito perché!*", commenterà anni dopo il compositore, in una lettera a Lemoine[8].

Ma forse non stiamo rendendo un bel servizio al nostro Émile, disegnandolo come un giovane scavezzacollo dedito solo alla ricerca del piacere e del divertimento. Alla fin fine, per campare era solito dare lezioni private e anche pubbliche, proprio al Politecnico; e aveva anche progettato di dedicarsi alla carriera giuridica. Quest'ultimo progetto lo lasciò cadere per ragioni essenzialmente politiche: era di opinioni repubblicane, e il clima politico francese del tempo non era il migliore per chi la pensava come lui. Poi, il suo modo di quadrare il bilancio gli viene a mancare per la sfortuna di incorrere in una delle poche malattie professionali degli insegnanti: una patologia alla laringe gli toglie la possibilità di tenere lezioni. A Lemoine non resta che prendersi un periodo di riposo a Grenoble e quindi tornare a Parigi, e soprattutto tornare alla matematica. Corre l'anno 1870, Émile è già trentenne.

[7] Siamo rimasti molto indecisi sulla possibile traduzione: ovviamente la più diretta è "*La Tromba*", ma se Lemoine avesse voluto chiamarlo "*La Trombetta*", non ci pare che avrebbe potuto chiamarlo in maniera diversa…

[8] Come sempre, la storia è molto più lunga e dettagliata di quanto valga la pena ricordare in un articoletto di chiacchiere sulla matematica come questo. Il brano in questione è il *Septuor in mi bemolle maggiore op. 65 per tromba, cinque archi e pianoforte*, ed è ancora oggi tra i pezzi più famosi e apprezzati del compositore francese. Lemoine confessa di aver davvero tormentato Saint-Saëns, di cui era amico, per avere da lui una composizione che prevedesse una tromba, archi e pianoforte, perché erano gli strumenti che possedeva il suo gruppo musicale. La risposta abituale di Saint-Saëns a tale richiesta era di solito che, prima di scrivere un pezzo per quell'assemblaggio assurdo di strumenti, avrebbe preferito scriverne uno per chitarra e tredici tromboni. Alla fine, comunque, il pezzo lo compose davvero, lo intitolò *Preambule* e finì addirittura per inserirlo in una sua suite. Vale la pena leggere la storia completa: noi l'abbiamo trovata nel sito "Orchestra Virtuale del Flaminio", a questo link: https://www.flaminioonline.it/Guide/Saint-Saens/Saintsaens-Settimino65.html.



7 *Il punto di Lemoine*[9].

Farà molto per la matematica, Émile Lemoine, nel resto della sua vita: fonderà riviste di matematica, propugnerà un nuovo approccio alla geometria, applicherà la matematica ad impegni da ingegnere, e molto altro. Ma ciò che ha perpetuato il suo nome – e di conseguenza ciò che è anche la ragione per cui scriviamo questo articolo – è la "scoperta" del punto che nella figura a fianco è indicato con la lettera "L". Viene anche chiamato "punto simmediano" perché è l'intersezione delle tre mediane riflesse sulle bisettrici degli angoli associati di un triangolo, che sono appunto chiamate simmediane. I triangoli, si sa, hanno diversi punti notevoli: fin dalle elementari si imparano i fondamentali, baricentro, incentro, ortocentro, circocentro, eccetera. Ma la geometria del triangolo, che sembra essere poco più del primo, elementare passo della geometria euclidea, in realtà è una voragine profondissima, nella quale solo alcuni eroici matematici hanno il coraggio di avventurarsi. Tanto per fare un esempio: quale impressione avreste se vi dicessimo che la voce della Wikipedia italiana (peraltro ancora di forma di "abbozzo") afferma che il Punto di Lemoine "*corrisponde al punto di Brianchon dell'inellisse di Brocard*"? Se state leggendo questo articolo siete certamente interessati alla matematica, ma quanti sono in grado di visualizzare, o anche solo di immaginare, il significato di questi termini? Ma si può fare di più: non è difficile immaginare che, oltre ai pochi punti notevoli citati poco sopra, in un triangolo generico ce ne possano essere altri, ma avete un'idea di quanti possano essere, anche solo come ordine di grandezza? Ebbene, per fortuna esiste l'*Encyclopedia of Triangle Centers* (ETC per gli amici), disponibile online, curata dall'Università di Evansville e iniziata sulla base di un libro del 1998 del professor Clark Kimberling che di punti notevoli ne elencava ben 400. L'ETC ha continuato a registrare altri punti notevoli del triangolo, e a Ottobre 2024 la lista superava le 65.000 voci. Tutti i punti sono indicati nella forma X(n), e gli viene attribuito un nome, nel caso non ne abbiano già uno per ragioni storiche: ad esempio, X(1) nel catalogo dell'ETC corrisponde all'incentro, X(3) al circocentro, e così via; ovviamente, tanto più il numero è basso, tanto più il punto notevole è davvero notevole. Dovrebbe essere clamorosamente indicativo, a questo proposito, il fatto che al Punto di Lemoine l'ETC ha associato il codice X(6). Ed è anche curioso notare che se non c'è né una precedente ragione storica o culturale, né un nome dello scopritore da attribuire, i curatori dell'ETC associano al codice X(n) il nome di una stella, quasi a prevedere che il triangolo di punti notevoli ne contenga di infiniti, o quasi. Così Émile, nato alla fine della terra, sembra aver davvero cominciato una sorta di viaggio verso l'infinito.

[9] La figura l'abbiamo presa, come al solito, da Wikipedia. L'ha disegnata qualcuno che si fa chiamare *Kmhkmh*.

2. Problemi

2.1 Al Bar dei Mancini

Rudy e Doc si sono dati appuntamento al Bar dei Mancini, che Rudy apprezza particolarmente perché sono a disposizione tazze mancine[10]. Uscendo di casa, Doc lancia un veloce sguardo all'orologio e scopre di essere stranamente (per lui) in perfetto orario, quindi con il suo passo costante e metodico si reca all'appuntamento. Esattamente un'ora dopo il proprio arrivo Doc torna a casa, ma alzandosi dalla sedia lancia un veloce sguardo all'orologio sopra la testa di Rudy e resta piuttosto stupito dal fatto che l'orologio segna esattamente la stessa ora di quando è partito da casa.

Cercando di capire come un maniaco della puntualità come Rudy possa sopravvivere con un orologio incombente su di lui che segna un'ora sbagliata, il ritorno a casa di Doc si svolge ad una velocità che è la metà di quella a lui abituale; giunto a casa, verifica sul proprio orologio che l'intera operazione di andata, stazionamento e ritorno ha impegnato due ore e un quarto del suo tempo. Non avendo risolto l'arzigogolo dell'orologio, si decide a telefonare a Rudy, il quale gli spiega che, essendo il Bar dei Mancini un posto strano, l'orologio si muoveva in senso antiorario, e andava guardato nello specchio di fronte.

A che ora è uscito di casa Doc?

Potreste incoccare in un paio di soluzioni ma, conoscendo il nostro eroe, non dovreste avere eccessivi problemi a identificare quella corretta…

2.2 Non ditelo ad Alice

No, va bene, diteglielo pure. Tanto lei sa benissimo che Rudy non cambierà idea.

Una delle grandi diatribe da queste parti è se i documenti che circolano debbano essere prodotti con MS Word o con LibreOffice Writer; pur essendo per buona parte compatibili tra di loro, ogni tanto salta fuori un guaio, e Rudy di solito si appella al fatto che il linguaggio nel quale scrivere le formule in LO (Math) è molto più flessibile del Formula Editor (vi risparmiamo la replica di Alice: sappiamo che voi avete orecchie sensibili).

Rudy sa benissimo dove si trovano un paio di guai di Math, e evita accuratamente i problemi che coinvolgano quei costrutti; questo però ha l'aria interessante e abbastanza insolita (non ci risulta esista un metodo generale per risolvere cose del genere, a parte usare Excel): non dite ad Alice che quella è un'immagine...

Quali valori reali di x soddisfano la seguente equazione:

$$\lfloor x \rfloor + \{2x\} + \lceil 3x \rceil = 5$$

dove la parentesi quadra senza il pezzo di sopra significa "approssimate all'intero immediatamente inferiore o uguale", la parentesi quadra senza il pezzo di sotto significa "approssimate all'intero immediatamente superiore o uguale" e la parentesi graffa significa "se la parte decimale è minore di 0.5 approssimate all'intero inferiore, se maggiore o uguale all'intero superiore[11]".

...ma esiste, un metodo generale e più o meno automatico per risolvere 'sti aggeggi? O per scrivere in Math le parentesi senza un pezzo?

[10] E se la cosa vi sembra la solita stupidaggine di Rudy, non avete mai visto il suo *mug* preferito: se impugnato da un mancino, solo quest'ultimo vede la scritta; se impugnato da un destrimane, tutti la vedono (tranne lui). La scritta è *I'm surrounded by right handed idiots*. Usatela a vostro rischio e pericolo.

[11] Quando eravamo giovani e frequentavamo losche contrade, questo era detto "l'arrotondamento del fisico".

3. Bungee Jumpers

Un bastone è spezzato in tre pezzi, con i due punti di frattura scelti casualmente; qual è la probabilità che i tre pezzi formino un triangolo *acutangolo*?

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Era Una Notte Buia e Tempestosa

Beh, ve l'avevamo promesso, no? Ve lo avevamo annunciato nel numero scorso che questa irrequieta rubrica (che affettuosamente chiamiamo EuNBeT) sarebbe tornata presto a tormentare le vostre letture. La previsione, in realtà, era abbastanza placida, visto che ci tocca, immodestamente, parlare di roba scritta da noi; e voi lo sapete già, che siamo un trio di vanitosi. Però, del resto, che volete che facciamo? Questa rubrica nasce con l'intento – ormai ribadito e ripetuto fino alla noia – di pubblicizzare opere che vedono coinvolte persone che sono amiche, o quantomeno simpatiche, alla Redazione di RM: è per questa semplice ragione che questa non è una vera e propria rubrica di recensioni. Perché le recensioni vere possono essere buone o cattive, o perfino neutre; possono manifestare entusiasmi o brividi d'orrore, o anche tremebonde manifestazioni di noia. Le nostre, invece no: il solo fatto di comparire in questa rubrica sancisce che il libro (o qualunque altra cosa) di cui si parlerà è apprezzato dalla tutt'altro che imparziale Redazione di Rudi Mathematici.
Consci di questo, che cosa volete aspettarvi che succeda quando riserviamo questa rubrica a un libro scritto da noi? Che non ci è piaciuto? Che ci ha annoiato? Suvvia…

4.1 La Matematica dei Calendari

> *"Guardare con attenzione un calendario […] è, almeno in parte, come ripassare un antichissimo compito in classe di matematica, con gli astri nel ruolo dei professori e l'umanità in quello degli scolaretti. E come tutti i compiti degli studenti mediocri, il risultato è pieno zeppo di cancellature, correzioni, ditate sui fogli e stropicciature; e se guardate con attenzione i fogli di un calendario, vi accorgerete che sono quasi tutte ancora ben evidenti."*

Se le recensioni che scriviamo su questo giornalino avessero un titolo, invece di ripetere pedissequamente il titolo del libro recensito, questa potrebbe intitolarsi "La lunga via verso la carta". La curiosità sulla struttura del calendario – anzi, dei vari e diversi calendari – è sempre stata una caratteristica condivisa da tutti e tre i redattori di Rudi Mathematici; e questo – anche se a molti può sembrare scontato che tre persone che si mettono a fare insieme qualcosa di complicato e duraturo come una rivista di matematica debbano avere molte cose in comune – in realtà non è scontato per niente. Se ne trovano chiare tracce fin dai primi numeri dell'e-zine, e soprattutto nel migliore (anche perché unico) dei gadget che Rudi Mathematici offre così generosamente al suo pubblico, una volta all'anno, tutti gli anni: il *Calendario di RM*, appunto.

Oddio, all'inizio non si trattava altro che delle inevitabili curiosità che affliggono qualsiasi abitante d'Occidente quando si trova a fare i primi approcci con quello strano oggetto composto solitamente da dodici fogli e una copertina: "perché mai si deve imparare una filastrocca o un qualsiasi altro metodo mnemonico per ricordarsi quanti dannati giorni abbiano i mesi? Perché non li abbiamo fatti tutti lunghi uguali? E da dove viene fuori questa storia di Febbraio che è così abnormemente corto, rispetto ai confratelli?" Poi, merito indubbio del calendario è quello che, non appena si incomincia a farsi delle domande su di esso, prima delle risposte arrivano altri curiosi interrogativi, più nascosti, ma proprio per questo ancora più abili a far assumere alle facce di chi indaga un'espressione a mezza strada tra lo scandalizzato e il perplesso: “cosa sarebbe poi ’sta storia del giorno in più da contare ogni quattro anni? Si può sapere perché mai, a differenza del Natale, l’unica certezza in merito alla Pasqua è che cadrà di domenica?” E così via, con sempre più domande e sempre meno risposte.

Per fortuna non siamo più giovani, e quando abbiamo cominciato a porci seriamente queste e altre domande, Internet era appena nata e noi eravamo ancora in grado di usarla. Abbiamo girato un po’, abbiamo scoperto cose inimmaginabili, e così abbiamo addirittura deciso di parlare dei diversi modi di contare i giorni già nelle nostre prime, goffe conferenze[12]. Sta di fatto che, seppur adattata negli anni e talvolta pure in funzione del calendario e dei luoghi, la conferenza che abbiamo cripticamente intitolata “*Dalle Calende Greche al 30 Febbraio*” è certamente quella che abbiamo replicato più volte, forse addirittura una mezza dozzina. Certo, un conto è chiacchierare su un palco di fronte a un pubblico diversamente folto di quello delle partite tra Barcellona e Real Madrid, tutto un altro conto è scrivere un libro. È a questo punto che è arrivato sulla scena il nostro *deus ex machina* preferito, ovvero Maurizio Codogno, svolgendo il ruolo per cui è deputato. Si trovava a dover curare una collana di leggeri e-book, così leggeri da dichiararlo nel nome della collana stessa: 40K, come a dire quarantamila battute e poi la piantiamo lì. “Avete mica voglia di scrivere un libretto di matematica?”, un giorno ci chiese. E noi, sventurati, rispondemmo.

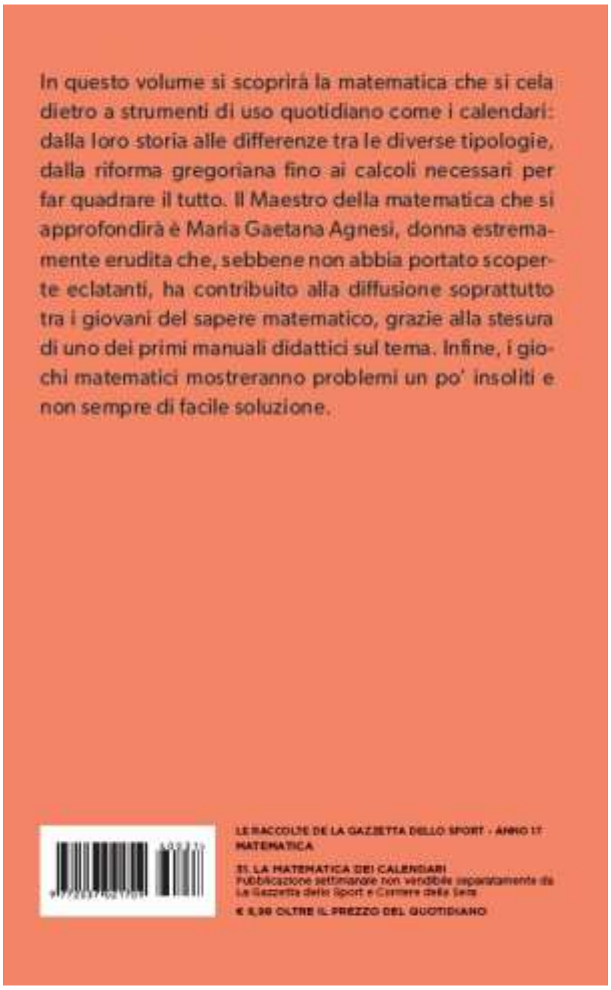
Il risultato finale si intitolò “*Di 28 ce n’è 1*”, del quale non parleremo qui troppo a lungo, per almeno due buone ragioni: la prima è che, se ne siete davvero curiosi, la miglior cosa da fare è quella di correre nella pagina “Archivio” del nostro sito, risalire fino al numero RM188 di Settembre 2014, e leggervi un intero terzo di questa stessa rubrica “Era una Notte Buia e Tempestosa”, presente in quel numero[13]. Non staremo a spiegarvi perché abbiamo precisato “un terzo della rubrica” e non la rubrica intera, anche perché se poi voleste davvero leggere anche gli altri due terzi non avremmo certo obiezioni da opporre. Insomma, di “*Di 28 ce n’è 1*” ne parliamo lì, e ripeterci sembra ragionevolmente superfluo.

Superfluo soprattutto se si tiene conto anche della seconda buona ragione: scrivere quell’e-book è stata cosa soddisfacente e piacevole, tant’è che siamo subito corsi ad aggiornare la voce “Rudi Mathematici” su Wikipedia per aggiungerne il titolo nella sezione “Libri degli autori” della voce medesima. Ciò non di meno, avere un libro fatto solo di elettroni anziché di molecole di carta e inchiostro ci faceva sospirare un po’. Certo non una grave crisi, tutt’altro: giusto qualche sospiro insoddisfatto. Ebbene, cosa succede nelle tragedie greche quando nell’Olimpo si sentono sospiri insoddisfatti provenire dagli umani, nelle vallate

[12] Non vorremmo che chi legge interpretasse questa frase nel senso “le prime conferenze che facevamo erano goffe, adesso sono mirabolanti”. No, la goffaggine è una caratteristica che abbiamo preziosamente protetto nel tempo, e pertanto è ancora del tutto intatta.

[13] Insomma, a questo link: http://www.rudimathematici.com/archivio/188.pdf#page=13.

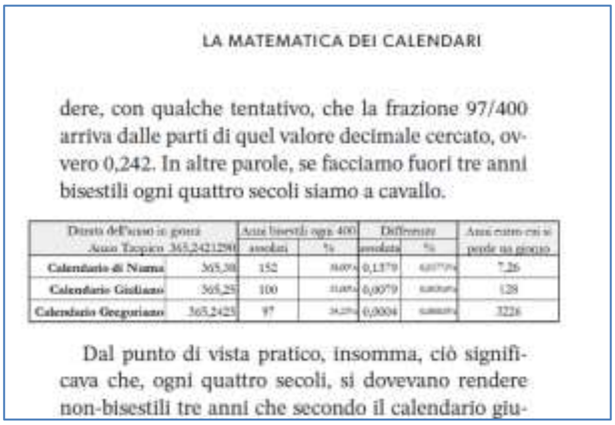
sottostanti? Facile: si rimanda giù il *deus ex machina*. Sempre lui, Maurizio Codogno, sempre travestito da curatore di una collana di libriccini di matematica, ma stavolta fatti di carta. Ha parcheggiato sul proscenio la sua *machina*, ne è olimpicamente disceso e ci ha detto che potevamo rivedere, lucidare e ingrassare il nostro libretto sul calendario, che poi ci avrebbe pensato lui a trasformarlo magicamente in un libro vero.



E insomma, è così che è nato il protagonista di questa recensione – anzi, di questa autorecensione. Il libretto porta in copertina il titolo "*La matematica dei calendari*" e sul dorso ha stampato il numero 31, a ricordare che esso è il trentunesimo fratellino della sua numerosa[14] famiglia: famiglia di cui non parleremo poi troppo, anche perché ne abbiamo parlato a lungo già in RM301, febbraio 2024 (insomma, solo pochi mesi fa), sia nel relativo EuNBeT che nel compleanno dedicato a Whitehead.

Tutta questa cronistoria potrebbe farvi pensare che allora questo libretto non sia altro che una minestra riscaldata, anzi riscaldata più di una volta. Ebbene, se in cotanta impressione non possiamo negare che ci sia un'ombra di verità, non va trascurato che l'oggetto cartaceo non è solo una riscrittura di "*Di 28 ce n'è 1*", anzi. Lo dimostra innanzitutto il prezzo, che è più che triplicato: però il piccolo e-book messo in vendita dieci anni fa costava 1,99 euro, così poco che, anche triplicato, non dovrebbe essere qualificato come voce di spesa in grado di mettere in crisi un bilancio familiare. A fronte di questa triplicazione dei soldi necessari ad acquistarlo, vi ritroverete a) un testo principale più che raddoppiato; b) una biografia di un "Maestro della Matematica" (ce n'è sempre una in tutti i volumi della collana, e ha il grande pregio di non essere stata scritta da noi) dedicata alla nostra gatta preferita, o forse a colei che a quella gatta ha dato il nome; c) una sezione di "Giochi Matematici" anch'essa benedetta dal fatto che l'autore del capitolo non è la Redazione di RM, ma il già più volte citato *deus ex machina* di tutto l'ambaradan, e infine d) uno scintillante capitolo di Esercizi (e relative Soluzioni) in tema con l'argomento del testo. Se a questo punto vi state chiedendo quali possibili esercizi siano mai proponibili parlando di calendari, sappiate che questa domanda è proprio quella che ha tolto il sonno agli autori, prolungato i tempi della stesura del libro, e risolta con il solito escamotage a cui ricorriamo sempre più spesso: l'abbiamo buttata in caciara, proponendo esercizi improponibili e facendo larghissimo uso di quella sofisticata metodologia di calcolo che i Veri Matematici chiamano "spannometria".

[14] L'aggettivo "numerosa" cela in realtà una stupefacente mancanza di informazioni: la collana era inizialmente prevista di 30 volumi, ma il buon successo riscontrato l'ha fatta allungare a 40. Anche l'allungo sembra essere andato bene, visto che poco dopo si è deciso di voler raggiungere quota 50. Che ci crediate o meno, mentre scriviamo queste righe sembra già praticamente sicuro che neppure 50 sarà il numero definitivo, perché là fuori ci sono autori già al lavoro per toccare il vertiginoso numero di 60 uscite, duplicando così il progetto originale.


LA MATEMATICA DEI CALENDARI

dere, con qualche tentativo, che la frazione 97/400 arriva dalle parti di quel valore decimale cercato, ovvero 0,242. In altre parole, se facciamo fuori tre anni bisestili ogni quattro secoli siamo a cavallo.

Durata dell'anno in giorni Anno Tropico 365,2421290		Anni bisestili ogni 400		Differenze		Anni entro cui si perde un giorno
		assoluti	%	assoluta	%	
Calendario di Numa	365,38	152	[illegible]	0,1379	[illegible]	7,26
Calendario Giuliano	365,25	100	[illegible]	0,0079	[illegible]	128
Calendario Gregoriano	365,2425	97	[illegible]	0,0004	[illegible]	3226

Dal punto di vista pratico, insomma, ciò significava che, ogni quattro secoli, si dovevano rendere non-bisestili tre anni che secondo il calendario giu-

Come tutti i libretti di collane che arrivano in vendita in edicola, anche questo è caratterizzato da una grande qualità e da un indiscutibile problema. La qualità è che le edicole sono ovunque: teoricamente, la distribuzione sul tutto il territorio nazionale è la più capillare che si possa sperare di avere. Certo, è terribilmente evidente che anch'esse sono tra le vittime più illustri di questa nostra era digitale, e chiudono i battenti senza più riaprirli in numeri e con una velocità sempre più impressionanti, come – e forse anche peggio – delle librerie. Restano però ancora l'unico porto sicuro per la carta stampata nei centri così piccoli da non avere nel territorio comunale neppure una libreria. Il problema – oltre a quello più grande e significativo appena accennato – è che il numero di pubblicazioni che giunge in edicola è davvero abnorme, generando il paradosso che il numero delle edicole diminuisce rapidamente mentre il numero delle cose che dovrebbero mettere a disposizione del pubblico cresce a dismisura. In conclusione, anche il nostro libretto farà quasi certamente disegnare sulla faccia dell'edicolante una bella espressione a forma di punto interrogativo, se foste così audaci da chiedergli di vendervelo. Potete provare a convincere l'eroico giornalaio a procurarvelo, se lo frequentate abitualmente o semplicemente perché è un tipo gentile: se invece non fosse disposto ad arrabattarsi troppo per la sua misera percentuale di guadagno sulla spesa di euro 6,99 (cosa tutto sommato comprensibile), la sola via di uscita che conosciamo è quella di procurarselo online dallo store del Corriere della Sera[15].

Alla peggio, scriveteci: prenderemo la nostra fedele bicicletta e verremo a consegnarvelo di persona.

Titolo	La Matematica dei Calendari
Autori	Rudi Mathematici
Editore	Gazzetta dello Sport – Corriere della Sera
Collana	"Matematica" (diretta da Maurizio Codogno), vol.31
Data Pubblicazione	12 settembre 2024
Pagine	152
ISBN	9772037021709-40031
Prezzo	6,99 euro (più il prezzo del quotidiano)

5. Soluzioni e Note

Novembre!

5.1 [309]

5.1.1 "Pensa un coso, senza dirmelo..."

Nel classico gioco per indovinare il numero, questa volta viene indovinato un polinomio, e Rudy fa sempre la parte del mago:

> *Alice e Doc pensano un polinomio p(x): in una variabile, a coefficienti interi e positivi e di grado n; né n né il polinomio vengono comunicati a Rudy. Rudy chiede il valore del polinomio per un certo numero a e i due gli comunicano il risultato; a questo punto,*

[15] Cioè qui: https://store.corriere.it/index-RCS-RCS_CStore-Site-WFS-it_IT-EUR.html.

> *il Nostro chiede il valore del polinomio per un certo numero b e anche in questo caso gli viene comunicato il risultato. Rudy enuncia il polinomio, come fa?*

Ecco, questo è uno di quei problemi posti in modo talmente vago che qualsiasi soluzione potrebbe andare. Per esempio ci ha scritto ***Marco***, crediamo per la prima volta, con un'idea bellissima:

> Chiaramente se avessimo l'informazione che tutti i coefficienti del polinomio scelto fossero minori di 10, Rudy semplicemente potrebbe chiedere il risultato inserendo 10 nel polinomio e ogni cifra del numero ottenuto scritto in base 10 corrisponde a ogni singolo coefficiente.
>
> Ma fortunatamente ogni sistema numerico è scritto in base 10, e il procedimento è identico se la base scelta è sufficientemente grande... come trovare tale base? basta sommare tutti i coefficienti, che sappiamo essere interi positivi, e usare quel numero come base. E ovviamente la somma dei coefficienti si trova chiedendo uno come primo numero, dopodiché inserendo il numero ottenuto nuovamente nel polinomio si può procedere a trovare ogni singolo coefficiente.
>
> Ma perché usare una base grande invece che una grande base? Possiamo completamente evitare la prima domanda se invece di usare una base grande usiamo una base trascendente.
>
> Se chiediamo il risultato del polinomio per pi greco otteniamo un numero univoco che ci permette di trovare il polinomio direttamente! (e preciso che il testo non impedisce a Rudy di usare numeri reali)...

Eccezionale, vero? Il Capo è sicuramente già contento di pigreco e del nuovo lettore, ma abbiamo ancora altro. Per esempio ***Valter***:

> Rudy chiede il valore di p(1), ottenendo la somma dei coefficienti del polinomio.
>
> Utilizzando questo valore come input per la seconda richiesta, ottiene p(p(1)).
>
> Ciò gli permette di scomporre il risultato in potenze del primo valore.
>
> In questo modo può risalire ai coefficienti del polinomio in modo univoco.
>
> Il valore p(1), essendo la somma dei coefficienti, è maggiore di ciascun coefficiente
>
> (dato che tutti i coefficienti sono positivi).
>
> Quando chiede p(p(1)), ottiene una somma di potenze di p(1) pesate dai coefficienti.
>
> Ogni coefficiente del polinomio è univocamente rappresentabile nella base p(1) perché:
>
> - tutti i coefficienti sono per definizione inferiori a p(1)
>
> - la decomposizione di p(p(1)) in potenze di p(1) risulta univoca (non ci sono combinazioni di coefficienti alternativi per ottenere p(p(1))).
>
> Il fatto che:
>
> - ciascun termine della scomposizione sia unico
>
> - i coefficienti siano tutti più piccoli di p(1))
>
> assicura che non ci possano essere interpretazioni diverse per questa decomposizione.
>
> Questo permette di identificare ogni coefficiente e, quindi, il polinomio esatto.
>
> Come faccio sovente, …quanto posso, ho realizzato due procedure per verificare che:
>
> 1) altri tipi di richiesta forniscono a volte più interpretazioni della decomposizione (sono possibili può polinomi che soddisfano sia la prima che la seconda richiesta)
>
> 2) la decomposizione corrisponde sempre al polinomio che hanno pensato Alice e Doc (…crea casualmente molti polinomi, segue la procedura di cui sopra e confronta).

Vabbé i programmi sono in buone mani, o meglio, sono con noi. Vediamo adesso la versione di ***Galluto***:

Il primo numero a che va usato è 1, la risposta è A, e A è uguale alla somma di tutti i coefficienti.

Il secondo numero *b* che va usato è proprio A, e ottiene come risposta B.

Ora, se divido B per A, il resto della divisione deve essere il termine noto, perché tutti gli altri termini sono multipli di A.

E se ora divido ancora per A il quoziente di B/A, il resto è il coefficiente del termine di primo grado.

E così via finché l'n-ima divisione per A ha quoziente = 0; a questo punto ho trovato il coefficiente del termine di grado massimo, nonché il grado n del polinomio.

Per fare un esempio, la risposta A è 43, e la risposta B è 48.397.121.557.219.

A	B	resto	grado
43	48.397.121.557.219		
/43	1.125.514.454.819	2	0
/43	26.174.754.763	10	1
/43	608.715.227	2	2
/43	14.156.168	3	3
/43	329.213	9	4
/43	7.656	5	5
/43	178	2	6
/43	4	6	7
/43	-	4	8

E il mio polinomio è $4x^8 + 6x^7 + 2x^6 + 5x^5 + 9x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 10x + 2$.

Il problema era troppo facile? Prendetevela con il mago…. ***Luigi***, che usa inizialmente un altro metodo, anche se alla fine converge alle soluzioni precedenti:

Usiamo per il polinomio da scoprire la seguente notazione:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

La prima richiesta da fare è conoscere il valore del polinomio per x = 1. In questo modo conosceremo la somma di tutti i coefficienti che indicheremo con S.

Una volta conosciuto S richiederemo di conoscere il valore del polinomio per la più piccola potenza "i" di 10 per la quale 10^i sia maggiore di ogni possibile valore dei coefficienti e quindi per sicurezza che sia maggiore di S.

Questo secondo risultato, ci mostrerà tutti i coefficienti del polinomio partendo da destra con a_0 fino ad a_n. Ogni coefficiente occupando "i" cifre del risultato

Esempio:

Abbiamo il polinomio: $4 + 3x + x^2 + 3x^4$

Chiediamo il valore per x = 1, avremo 4+3+1+3 = 11 = S

Chiediamo quindi il valore per x = 100, (in questo caso sarebbe stato sufficiente 10 ma non possiamo esserne sicuri) avremo 4+300+10.000+300.000.000 = 300010304 che possiamo dividere partendo da destra come: 04, 03, 01, 00, 3 che sono appunto i coefficienti del polinomio

La scelta del secondo valore non è unica, le potenze di 10 sono naturalmente le più comode per avere un risultato immediato.

L'importante, affinché l'algoritmo non sia ambiguo, è scegliere un valore sicuramente maggiore di tutti i coefficienti, ciò ci garantisce che ogni componente a_ix^i abbia un valore inferiore al componente successivo $a_{i+1}x^{i+1}$.

In questo modo siamo sicuri che tutti i componenti il polinomio saranno multipli di x (ovvero di S) salvo il termine a_0 e con una semplice operazione di modulo (che con le potenze di 10 diventa una "separazione di cifre") possiamo isolarlo

Una volta sottratto a_0 dal valore del polinomio saremo sicuri che tutti i componenti restanti saranno multipli di x^2 (cioè di S^2) tranne il termine a_1x che ha valore a_1S che potrà essere a sua volta isolato… e così via…

A questo punto vorrei descrivere la procedura generale scegliendo come secondo numero proprio S e indicando con P il relativo valore del polinomio:

$P_0 = P$

$S_0 = 0$

$S_1 = S$

$i = 0$

Finché $P_i > 0$:

$a_i = (P_i \bmod S_{i+1})/S_i$

$i = i+1$

$P_i = P_{i-1} - a_{i-1}S_{i-1}$

$S_{i+1} = S_i * S = S^{i+1}$

Ripropongo lo stesso esempio di prima:

Abbiamo il polinomio: $4 + 3x + x^2 + 3x^4$

Chiediamo il valore per x = 1, avremo 4+3+1+3 = 11 = S

Chiediamo quindi il valore per x = 11, avremo 4+33+121+43923 = 44.081 = P

Iniziamo quindi i calcoli:

P_0 = P = 44.081, S_0 = 1, S_1 = 11,

a_0 = (44.081 mod 11)/1 = 4/1 = **4**, S_2=121, P_1=44.081 – 4 = 44.077

a_1 = (44.077 mod 121)/11 = 33/11 = **3**, S_3=1.331, P_2=44077–33 = 44.044

a_2 = (44.044 mod 1.331)/121 = 121/121 = **1**, S_4=14.641, P_3=44.044–121 = 43.923

a_3 = (43.923 mod 14.641)/1.331 = 0/1.331 = **0,** S_5=161.051, P_4=43.923 – 0 = 43.923

a_5=(43.923 mod 161.051)/14.641 = 43.923/14.641 = **3,** P_5 = 43.923 – 43.923 = **0**

Essendo P_5 = 0 l'elaborazione è completata.

Concludiamo con ***BR1***, che non si faceva sentire da un po' di tempo:

Mi pare che Rudy possa procedere come segue:

- viene chiesto al *primo colpo* il valore di **p(1)**; il risultato fornito da Alice e Doc sarà la somma **S_C** dei coefficienti del polinomio (tutti interi non nulli…)
- Rudy poi calcola il seguente valore **K**:

$$K = Int[\log_{10}(S_C)] + 2$$

- quindi, al *secondo colpo*, Rudy chiede ad Alice e Doc il valore di:

$$p(10^K)$$

- il risultato restituito da Alice e Doc (chiamiamola ***firma*** del polinomio) dovrebbe essere un bel numerone composto dai coefficienti di **p(x)**, ordinati ed intercalati da qualche zero…

Ad esempio, poniamo che fosse:

$$p(x) = 7x^4 + 33x^3 + 9x^2 + 6x + 555$$

La risposta al *primo colpo* sarebbe:

$$p(1) = 7 + 33 + 9 + 6 + 555 = 610$$

quindi:

$$K = Int[\log_{10}(610)] + 2 = 4$$

E poi, al *secondo colpo*, la ***firma*** sarebbe:

$$p(10^4) = 7 \cdot (10^4)^4 + 33 \cdot (10^4)^3 + 9 \cdot (10^4)^2 + 6 \cdot 10^4 + 555$$
$$= 7 \cdot 10^{16} + 33 \cdot 10^{12} + 9 \cdot 10^8 + 6 \cdot 10^4 + 555$$
$$= 70000000000000000 + 33000000000000 + 900000000 + 60000 + 555 = 70033000900060555$$

Con, evidenziati in rosso, i coefficienti…

La cosa dovrebbe funzionare anche con *polinomi carogna* potenzialmente e malevolmente concepiti da Alice e Doc, ad esempio:

$$p(x) = x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

In un caso del genere:

$$p(1) = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 10$$
$$K = Int[\log_{10}(10)] + 2 = 3$$
$$p(10^3) = (10^3)^9 + (10^3)^8 + (10^3)^7 + (10^3)^6 + (10^3)^5 + (10^3)^4 + (10^3)^3 + (10^3)^2 + 10^3 + 1 =$$
$$= 10^{27} + 10^{24} + 10^{21} + 10^{18} + 10^{15} + 10^{12} + 10^9 + 10^6 + 10^3 + 1 =$$
$$1001001001001001001001001001$$

Oppure:

$$p(x) = x^2 + 10x + 100$$
$$p(1) = 1 + 10 + 100 = 111$$
$$K = Int[\log_{10}(111)] + 2 = 4$$
$$p(10^4) = (10^4)^2 + 10 \cdot 10^4 + 100 =$$
$$= 10^8 + 10^5 + 10^2 = 100100100$$

Come fa Rudy, in un caso del genere, a capire dalla ***firma*** che i coefficienti sono **davvero** *nell'ordine* 1, 10 e 100 e non invece (ad esempio) 10, 1 e 100?

In realtà, la ***firma*** è sempre **univoca**: nell'esempio, da essa e dal fatto che sia p(1)=111 si intuisce come i tre fattori siano proprio 1, 10 e 100. Ma *in che ordine*? Proviamo a vedere come sarebbero le ***firme*** nei 6 casi ipotizzabili:

$$p(x) = x^2 + 10x + 100 \to p(10^4) = (10^4)^2 + 10 \cdot 10^4 + 100 \to 100100100$$
$$p(x) = x^2 + 100x + 10 \to p(10^4) = (10^4)^2 + 100 \cdot 10^4 + 10 \to 101000010$$
$$p(x) = 10x^2 + x + 100 \to p(10^4) = 10 \cdot (10^4)^2 + 10^4 + 100 \to 1000010100$$
$$p(x) = 10x^2 + 100x + 1 \to p(10^4) = 10 \cdot (10^4)^2 + 100 \cdot 10^4 + 1 \to 1001000001$$
$$p(x) = 100x^2 + x + 10 \to p(10^4) = 100 \cdot (10^4)^2 + 10^4 + 10 \to 10000010010$$
$$p(x) = 100x^2 + 10x + 1 \to p(10^4) = 100 \cdot (10^4)^2 + 10 \cdot 10^4 + 1 \to 10000100001$$

Si vede che le ***firme***, comunque si permutassero i coefficienti, sarebbero tutte diverse; e l'unica che *fa scopa* è la prima…

Grazie ***BR1***, per la scopa, per i polinomi carogna e per la tua missiva. Come al solito siamo in ritardo, passiamo di corsa al secondo problema.

5.1.2 L'asta di Doc

I nostri mettono all'asta un esemplare antologico unico e cercano di guadagnare il massimo possibile:

Il volume è valutato tra i 500 *e i* 1000 *centesimi. Mancano gli offerenti all'asta, e dei procuratori ci offrono degli astanti, al prezzo di* 10 *centesimi per ogni offerente. L'asta ha le seguenti regole: vince chi fa l'offerta più alta, ma chi vince paga la cifra indicata dall'offerta immediatamente inferiore. Sappiamo che le offerte saranno distribuite uniformemente in modo casuale nell'intervallo* [500, 1000]. *Quanti astanti richiediamo per massimizzare il guadagno? E se si prendesse l'offerta massima, quanti dovremmo richiederne?*

La prima soluzione, come spesso accade, è quella di ***Valter***:

Per ottenere il numero di astanti da richiedere, Doc deve calcolare la derivata di:

$$500 + \left(\frac{1000 - 500}{x}\right) \cdot (x-2) + \frac{\left(\left(\frac{1000-500}{x}\right) \cdot (x-1) - \left(\frac{1000-500}{x}\right) \cdot (x-2)\right)}{2} - 10 \cdot x$$

dove:
- 500 è l'offerta minima
- 1000 è l'offerta massima
- x è il numero di astanti
- (x–2) e (x–1) servono ad ottenere il penultimo range di distribuzione delle offerte.

L'espressione si semplifica abbastanza facilmente in:

$$1000 - 10x - \frac{750}{x}$$

Quindi, da quest'ultima espressione, si ottiene, altrettanto facilmente, la sua derivata:

$$f'(x) = \frac{750}{x^2} - 10$$

La derivata si annulla per "x" $=5\sqrt{3} \approx 8.66$, dove l'espressione ha il suo massimo. Arrotondando all'intero più vicino si ottiene che il numero di astanti da richiedere è 9.

Discorso analogo nel caso Doc prendesse l'offerta massima, non quella immediatamente inferiore:
- espressione:

$$500 + \left(\frac{1000-500}{x}\right) \cdot (x-1) + \frac{\left(\left(\frac{1000-500}{x}\right) \cdot x - \left(\frac{1000-500}{x}\right) \cdot (x-1)\right)}{2} - 10 \cdot x$$

- sua semplificazione:

$$1000 - 10x - \frac{250}{x}$$

- sua derivata:

$$-10 + \frac{250}{x^2}$$

La derivata si annulla per x=5 che, quindi, è il numero ottimale di astanti da richiedere.

Il metodo usato da ***Galluto*** è diverso e i risultati divergono da quelli di ***Valter***, anche se non di molto:

Quanto valgono mediamente la migliore e la seconda migliore offerta se sono effettuate casualmente tra 500 e 1.000 centesimi?

Ovviamente dipende dal numero N di astanti e col crescere di N tendono ambedue asintoticamente a 1.000.

Cominciando da N = 1 (per il quale non c'è nessuna seconda migliore offerta) e via via crescendo con N = 2, 3, …, le offerte medie (la peggiore, la seconda peggiore,… la seconda migliore, la migliore) vanno a suddividere in (N+1) parti uguali lo spazio tra 500 e 1.000.

Cosicché, per N = 1, l'unica offerta sarà mediamente pari a 750, a metà tra 500 e 1.000, per N = 2 la più bassa (e seconda migliore) sarà mediamente 666,(6) e la migliore sarà 833,(3).

In generale, il valore della seconda migliore offerta è:

500 + 500 * (N–1) / (N+1)

E il guadagno con la seconda migliore offerta è:

$$500 + 500 * (N–1) / (N+1) – 10 * N$$

Analogamente, il guadagno con la migliore offerta è:

$$500 + 500 * N / (N+1) – 10 * N$$

per trovare il massimo guadagno nei due casi basta fare la derivata delle due formule, uguagliare a zero, risolvere le due equazioni di secondo grado e scartare la soluzione negativa.

Per la seconda migliore offerta la soluzione è N = 9, a cui corrisponde un guadagno medio di

$$500 + 500 * 8/10 – 10 * 9 = 810 \text{ centesimi}$$

Per la migliore offerta la soluzione è $N = \sqrt{50} - 1 = 6{,}071\ldots$ a cui corrisponde un guadagno medio di 868,579… centesimi; poiché i pezzi di astante non possono essere considerati (guasterebbero l'atmosfera dell'asta) ci si deve accontentare di N = 6 e un guadagno di 868,571… centesimi.

Lo sappiamo che non vedete l'ora di vedere se il prossimo solutore ha risolto diversamente. Ecco la versione di ***Luigi***:

Il dato fondamentale per decidere quanti astanti convocare è la distribuzione delle offerte che ci viene assicurato essere uniforme nell'intervallo considerato [500, 1000].

Avendo una sola offerta la media del suo valore per più aste ripetute sarà 750 cioè dividerà l'intervallo di scelta in due parti uguali (250–250).

Per un numero di offerte n avremo allo stesso modo che i valori medi delle n offerte divideranno in ***n*+1** parti uguali l'intervallo di scelta.

Ciò appurato possiamo calcolare facilmente il numero di astanti che ottimizza il valore finale dell'asta.

Considerando n astanti in un intervallo di 500 centesimi avremo che la seconda offerta più alta avrà un valore medio, dipendente da n, di:

$$(500/(n+1))*(n–1)$$

Finché due offerte consecutive differiranno per più di 10 centesimi sarà conveniente aggiungere astanti.

Dobbiamo quindi calcolare la disequazione:

$$(500/(n+1))*(n–1) – (500/n)*(n–2) > 10 \to n^2+n–100 < 0 \to n < 9{,}5 \text{ (circa)}$$

Quindi il numero di astanti ottimali sarà: **9** Con un guadagno medio di **810** centesimi (900–90).

Nel secondo caso l'offerta più alta avrà un valore medio, dipendente da n, di :

$$(500/(n+1))*n$$

Dobbiamo calcolare quindi la disequazione:

$$(500/(n+1))*n – (500/n)*(n–1) > 10 \to n^2+n–50 < 0 \to n < 6{,}5 \text{ (circa)}$$

Quindi il numero di astanti ottimali sarà: **6** con un guadagno medio di **869** centesimi (929–60).

Che ne dite? Corrispondono? No, non commentiamo: cerchiamo di stare dentro un ritardo controllato questo mese, chiudiamo qui. Alla prossima!

6. Quick & Dirty

Siccome Doc è sempre in ritardo, per passare il tempo Alice e Rudy si sono inventati un gioco. Alice scrive una lista dei numeri da 1 a N e la passa a Rudy. Rudy cancella due numeri (x e y) e aggiunge alla lista il numero differenza tra i due (anche se questo significa avere in lista un numero in duplice copia) e passa la lista ad Alice. Alice segue esattamente la stessa procedura e ripassa la lista a Rudy… e avanti così sin quando non resta un solo numero. Se il numero finale è pari vince Alice, se il numero è dispari vince Rudy. Uno dei due ha una strategia?

Non esiste una strategia: se la somma dei numeri iniziali è pari vincerà Alice, se è dispari vincerà Rudy.

Sia S la somma dei numeri da 1 a N: quando Rudy effettua la prima operazione, la somma dei numeri restanti viene ridotta della quantità $x+y-(x-y)=2y$; questo è un numero pari, quindi la somma manterrà la parità iniziale ad ogni passo del gioco. Ad ogni passaggio il numero dei numeri viene decrementato di uno, quindi si arriverà ad un solo numero che avrà la stessa parità della somma iniziale.

7. Pagina 46

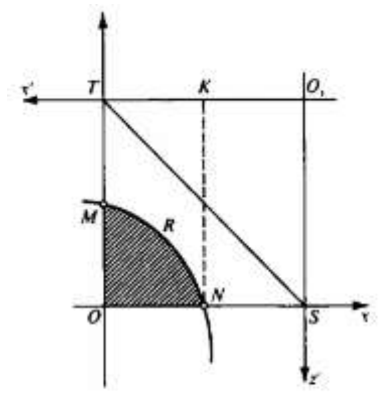
Definiamo tutti i possibili risultati dell'esperimento come $AK=x$ e $KL=z$ (si veda la figura a fianco).

8 *Il bastone e i punti di frattura*

Quindi, tutto l'insieme delle soluzioni del problema è rappresentato dall'insieme dei punti all'interno o sul perimetro del triangolo *OST* limitato dagli assi coordinati e dalla retta $x+z=l$; la probabilità di qualsiasi evento è dato dal rapporto della parte di *OST* corrispondente al punto nel quale avviene l'evento e l'area dell'intero triangolo *OST*.

Troviamo ora l'area della parte del triangolo *OST* per cui è soddisfatta la diseguaglianza:

$$(l-x-z)^2 \geqslant x^2+z^2$$



9 *Lo spazio degli eventi*

Sviluppando e semplificando, la diseguaglianza può essere riscritta come:

$$l^2+2xz-2lx-2lz \geqslant 0$$

Aggiungendo l^2 ad entrambi i membri e dividendo per 2, si ottiene:

$$(l-x)(l-z) \geqslant \frac{l^2}{2}$$

Ma questa equazione (nel caso dell'uguaglianza) definisce un'iperbole passante per i punti $x=l/2$, $z=0$ (il punto *N*) e $x=0$, $z=l/2$ (il punto *M*); la diseguaglianza è quindi soddisfatta da tutti e soli i punti della regione ombreggiata *ONRM*; non ci resta che calcolare l'area di questa regione.

Introduciamo un nuovo sistema di coordinate assumendo come assi le linee O_1T e O_1S (ossia, le rette $l-z=0$ $l-x=0$ indicate in figura); in questo nuovo sistema di coordinate, l'iperbole avrà equazione $x'z'=l^2/2$; assumiamo allora una nuova unità di lunghezza pari a $l/(2^{1/2})$. L'ascissa O_1K del punto *N* nelle nuove unità vale:

$$\frac{\frac{l}{2}}{\frac{l}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

mentre l'ascissa O_1T del punto *M* vale:

$$\frac{l}{\frac{l}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}$$

Quindi, nelle nuove unità, l'area del trapezoide iperbolico *KNMT* vale[16]:

$$ln\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=ln2$$

Tornando alle unità di misura originali, l'area del trapezoide diventa:

[16] La cosa si può provare per via analitica o geometrica, sfruttando la continuità della funzione iperbole.

$$(ln2)\left(\frac{l^2}{2}\right)=\frac{l^2 ln2}{2}$$

e quindi l'area della zona ombreggiata in figura diventa:

$$\frac{l^2}{2}-\frac{l^2 ln2}{2}=\frac{l^2}{2}(1-ln2)$$

l'area della parte di triangolo *OST* corrispondente ai casi sfavorevoli dell'esperimento è pari a tre volte questa espressione, e quindi la parte corrispondente ai risultati favorevoli vale:

$$\frac{l^2}{2}-3\frac{l^2}{2}(1-ln2)=\frac{l^2}{2}(3ln2-2)$$

Quindi, la probabilità di riuscita dell'esperimento vale:

$$\frac{\frac{l^2}{2}(3ln2-2)}{\frac{l^2}{2}}=3ln2-2\approx 0.082\ldots$$

8. Paraphernalia Mathematica

OK, gli abbiamo cambiato nome, altrimenti era troppo facile. Ma questa è una di quelle cose che ti tolgono la fiducia nel tuo prof di mate. Tranquilli, alla fine vi diciamo il nome vero.

8.1 Supernumeri

È sempre fonte di stupore, la prima volta che li si incontra, accorgersi che i quadrati dei numeri terminanti in 0, 1, 5 o 6 termineranno rispettivamente in 0, 1, 5 o 6; dopo un po', colpevolmente, la cosa verrà ignorata e tutto andrà avanti nel solito modo. Male, perché vi siete fermati alle cifre. Se aveste provato ad estendere il concetto, vi sareste accorti che i quadrati dei numeri terminanti per 00, 01, 25 o 76 terminano per 00, 01, 25 o 76, e che i quadrati dei numeri terminanti per 000, 001, 625 o 376... Beh, dovreste aver capito lo schema.

Il dubbio che potrebbe sorgervi viene immediatamente risolto da un teorema che non ci risulta abbia mai risuonato nelle classi di alcun ordine o grado: *Per ogni numero naturale k esistono quattro sequenze di k cifre tali che se un numero naturale termina con una di queste sequenze, il suo quadrato terminerà con la stessa sequenza*. Siccome a una cosa del genere di primo acchito non ci crede nessuno, passiamo a dimostrarlo e a ridimostrarlo (sì, ci sono due dimostrazioni. Dopo serviranno entrambe).

Prima, però, statuiamo un po' meglio la cosa.

Stiamo cercando un intero x, $0\leq x\leq 10^k$, tale che per ogni numero $a\geq 0$ il quadrato del numero[17] $10^k a+x$ abbia la forma $10^k b+x$, dove b è un intero (positivo). Forti del fatto che:

$$(10^k a + x)^2 = 10^k(10^k a^2 + 2ax) + x^2$$

la nostra condizione può essere ristatuita come il fatto che x^2-x sia *divisibile per* 10^k. Quindi, il nostro teorema si riduce a trovare tutti gli interi x, $0\leq x\leq 10^k$, per cui x^2-x è divisibile per 10^k, e verificare che questi sono quattro. Andiamo con la *prima dimostrazione*.

Il numero $x^2-x=x(x-1)$ deve essere divisibile per $10^k=2^k5^k$; ma siccome x e $x-1$ non possono essere entrambi divisibili per 2 o entrambi divisibili per 5, sono possibili quattro casi:

1. x è divisibile per 10^k.
2. $x-1$ è divisibile per 10^k.
3. x è divisibile per 2^k e $x-1$ è divisibile per 5^k.
4. x è divisibile per 5^k e $x-1$ è divisibile per 2^k.

Siccome $x<10^k$, il caso (1) si ha solo per $x=0$ e, per lo stesso motivo, il caso (2) si ha solo per $x=1$. E due numeri li abbiamo trovati.

Per i casi (3) e (4), notiamo che in (3) x gioca lo stesso ruolo di $x-1$ in (4), quindi il discorso potrà essere esteso facilmente.

In (3), x è un numero della forma $a2^k$ e, siccome $x>x-1\geq 5^k$, sappiamo che $0\leq a\leq 5^k-1$. Tutti questi numeri danno un resto diverso quando vengono divisi per 5^k.

Questa, forse, è il caso che la si chiarisca: se 2^kb e 2^kc dessero lo stesso resto, allora $2^k(c-b)$ sarebbe divisibile per 5^k e quindi per 10^k, il che è impossibile visto che $0<c-b<5^k$. Ma siccome i resti possibili sono 5^k, ognuno di loro compare una sola volta nella sequenza dei numeri 2^ka.

Questo significa che solo uno (sia $x=2^ka_1$) dei numeri darà resto 1: allora $x-1$ sarà divisibile per 5^k. Nello stesso modo, solo uno di questi numeri (sia 2^ka_2) darà resto 5^k-1 quando verrà diviso per 5^k, e quindi, per $x-1=2^ka_2$, x deve essere divisibile per 5^k.

Quindi, in ognuno dei quattro casi abbiamo esattamente un numero: si vede facilmente dalle condizioni che nel caso (3) il numero finirà per 6 e nel caso (4) finirà per 5. E qui

[17] La cosa ci pare ovvia, ma sapete cosa ne pensa Doc di questo termine: quanto scritto significa semplicemente che il numero "finisce per x". E che "comincia per a" (dove x e a possono avere il numero di cifre che vi pare, anche in numero diverso).

termina la prima dimostrazione; non siete convinti? Bene, l'avete voluto voi. Passiamo alla ***seconda dimostrazione***.

Diamo per dimostrato che non ci siano mai più di quattro soluzioni al problema[18] e utilizziamo il principio di induzione su k: supponiamo di aver già trovato due numeri x_{k-1} e y_{k-1} terminanti rispettivamente in 5 e 6 tali che $0 \leq x_{k-1} < 10^{k-1}$, $0 \leq y_{k-1} < 10^{k-1}$ e che le differenze $(x_{k-1})^2 - x_{k-1}$ e $(y_{k-1})^2 - y_{k-1}$ siano divisibili per 10^{k-1}; la base dell'induzione sarà data da $x_1=5$ e $y_1=6$, e la nostra intenzione è trovare i numeri x_k e y_k soddisfacenti le medesime proprietà.

Per trovare x_k, eleviamo al quadrato x_{k-1} e prendiamone le k cifre meno significative, in modo tale che $x^2_{k-1}=10^k a+x_k$. Mostriamo allora che $x^2_k - x_k$ è divisibile per 10^k.

$$\begin{aligned}{x^2}_k - x_k &= ({x^2}_{k-1} - 10^k a)^2 - ({x^2}_{k-1} - 10^k a) = \\ &= {x^4}_{k-1} - 2a{x^2}_{k-1} \cdot 10^k + 10^{2k}a^2 - {x^2}_{k-1} + 10^k a = \\ &= ({x^2}_{k-1} - x_{k-1})({x^2}_{k-1} + x_{k-1}) + 10^k(10^k a^2 + a - 2a{x^2}_{k-1})\end{aligned}$$

Ma il termine nella prima parentesi è divisibile per 10^{k-1} e il termine nella seconda parentesi è divisibile per 10 (visto che entrambe le sue componenti terminano per 5); quindi, entrambi gli addendi dell'ultima espressione sono divisibili per 10^k.

La dimostrazione per y_k è un po' più complicata e ci limitiamo ad accennarla; qui, dobbiamo prendere le ultime k cifre di y^5_{k-1} ma la divisibilità di $y^2_k - y_k$ per 10^k si dimostra circa nello stesso modo:

$$\begin{aligned}&{y^2}_k - y_k = \left({y^5}_{k-1} - 10^k b\right)^2 - \left({y^5}_{k-1} - 10^k b\right) = \\ &= \left({y^2}_{k-1} - y_{k-1}\right)\left({y^8}_{k-1} + {y^7}_{k-1} + {y^6}_{k-1} + {y^5}_{k-1} + {y^4}_{k-1}\right) \\ &+ 10^k\left(10^k b^2 + b - 2b{y^2}_{k-1}\right)\end{aligned}$$

Il termine nella seconda parentesi è divisibile per 10 in quanto è la somma di *cinque numeri che terminano per* 6, e la differenza nella prima parentesi è divisibile per 10^{k-1} per l'ipotesi di induzione, e quindi il primo membro è divisibile per 10^k, e ce l'abbiamo fatta anche stavolta.

Ognuna di queste due dimostrazioni porta alla verifica formale di interessanti conclusioni: dalla prima, si vede che la somma dei numeri di tipo (3) e (4) è pari a 10^k+1, mentre dalla seconda si deduce che i numeri x (o y) sono ottenibili *aggiungendo una cifra davanti al numero precedente dello stesso tipo*. ...trovarla, però, la cifra...

Comunque, se non interrompiamo il processo, otteniamo una coppia di "numeri"[19] che indichiamo come X=...8212890625 e Y=...1787109376. Definiamo, in genere, i numeri con un numero infinito di cifre sulla sinistra come ***supernumeri*** (senza più richiedere che i quadrati abbiano il peculiare comportamento visto all'inizio) e proviamo ad analizzarne le proprietà.

Tanto per cominciare, tra i supernumeri ci sono i numeri (naturali) normali: ad esempio, 122=...00000122; non solo, ma (almeno, se vi accontentate di solo "qualche cifra": le meno significative, evidentemente) potete anche moltiplicarli tra di loro; le cose cominciano a farsi interessanti quando sottraete un supernumero da un altro: potete benissimo sottrarre qualsiasi supernumero da qualsiasi altro, e in particolare potete sottrarre un supernumero (o un numero espresso come supernumero) da zero: ad esempio, ...0000–132=...999868. Insomma, tanto per cominciare i "negativi" sono i supernumeri con un numero infinito di 9 davanti, e poi si perde tranquillamente il concetto di maggiore o minore; come fate a deciderlo, con un numero infinito di cifre[20]?

Qualcuno si è accorto che è successo qualcosa di strano?

Dato un supernumero x, possiamo calcolare il supernumero x^2-x; se adesso pensate al teorema che abbiamo dimostrato qui sopra (due volte, quindi dovreste esserne convinti), vi

[18] La cosa si può dimostrare facilmente. Oppure, si può sbirciare la prima dimostrazione...

[19] Virgolette inserite a scopo precauzionale: i numeri sono di lunghezza infinita, quindi meglio non fidarsi.

[20] Questo ci ricorda la ormai vetusta barzelletta: "ma se li scrivo al contrario, è maggiore π o e?"

accorgete che *l'equazione* $x^2=x$ *ha* ***quattro*** *soluzioni tra i supernumeri:* 0, 1, *X* e *Y*, insomma, qui c'è una struttura algebrica un po' diversa dal solito...

In effetti, tra i supernumeri, possono succedere delle cose strane; qui in particolare, $XY=0$, anche se nessuno dei due vale zero: la cosa può essere vista effettuando il prodotto tra i due valori che vi abbiamo dato poco sopra o, più formalmente, considerando che x^k è divisibile per 5^k mentre y^k è divisibile per 2^k, quindi il loro prodotto sarà divisibile per 10^k, ossia terminerà con *k* zeri. Ora, per *k* tendente a infinito...

In pratica, *X* e *Y* sono *divisori dello zero*.

...e oltre? Beh, c'è un teoremino (che non dimostriamo, ma scriviamo in un modo un po' strano).

Se m è pari, l'equazione $x^m=x$ *ha, nei supernumeri, le stesse soluzioni di* $x^2=x$ (ossia 0, 1, X, Y).

Se m è della forma $4n-1$*, l'equazione ha, nei supernumeri, le stesse soluzioni di* $x^3=x$ (ossia 0, 1, –1, X, –X, Y, –Y, X–Y, Y–X).

Se m è della forma $4n+1$*, l'equazione ha, nei supernumeri, le stesse soluzioni di* $x^5=x$ (ossia 0, 1, –1, X, –X, Y, –Y, X–Y, Y–X, Z=...9879186432, –Z, X–Z, Z–X, X+Z, –X–Z).

Bene, se volete esplorare l'ambiente, abbiamo un paio di interessanti problemini.

Esistono le ***superfrazioni***? Ossia, per quali numeri *m* "normali" sono ammesse soluzioni all'equazione $mx=1$, nei supernumeri?

"Er Wiles de noantri". Ma siamo sicuri che "Se *n* è un intero (normale) maggiore di 2, l'equazione $x^n+y^n=z^n$ non ha soluzioni intere" anche per *x*, *y* e *z* supernumeri?

Vi avevamo promesso che avremmo dato a questi oggetti un nome un po' più serio (anche se meno bello) di "supernumeri": quelli di cui abbiamo parlato sono gli *interi decadici*. Il guaio (o, se preferite, le cose interessanti) con loro nascono dal fatto che noi contiamo in base 10, che è un numero composto (cinque per due, guarda caso...): se la nostra base fosse stata un numero primo, questo mese avremmo dovuto trovare un altro argomento.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms