



Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 313 – Febbraio 2025 – Anno Ventisettesimo



1. Politicamente scorretto (ma, sullo sfondo, alcuni gatti)	3
2. Problemi	9
2.1 Un giro in macchina	9
2.2 Una mela al giorno.....	9
3. Bungee Jumpers	10
4. Era Una Notte Buia e Tempestosa	10
4.1 Canzoniere Matematico	10
5. Soluzioni e Note	14
5.1 [311]	14
5.1.1 L’Eloniobirinto.....	14
5.2 [312]	15
5.2.1 Facciamo ordine	15
5.2.2 Dov’è la festa?.....	17
6. Quick & Dirty	20
7. Pagina 46	20
8. Paraphernalia Mathematica	22
8.1 Like a Rolling Stone	22



	<p>Rudi Mathematici Rivista fondata nell’altro millennio da <i>Rudy d’Alembert</i> (A.d.S., G.C., B.S) rudv.dalembert@rudimathematici.com</p> <p><i>Piotr Rezierovic Silverbrahms</i> (Doc) piotr.silverbrahms@rudimathematici.com</p> <p><i>Alice Riddle</i> (Treccia) alice.riddle@rudimathematici.com</p> <p style="text-align: center;">www.rudimathematici.com</p>
Tutto quanto pubblicato dalla rivista è soggetto al diritto d’autore e in base a tale diritto <i>concediamo il permesso di libera pubblicazione e ridistribuzione</i> alle condizioni indicate alla pagina diraut.html del sito. In particolare, tutto quanto pubblicato sulla rivista è scritto compiendo ogni ragionevole sforzo per dare le informazioni corrette; tuttavia queste informazioni non vengono fornite con alcuna garanzia legale e quindi la loro ripubblicazione da parte vostra è sotto la vostra responsabilità. La pubblicazione delle informazioni da parte vostra costituisce accettazione di questa condizione.	

E, una volta tanto, la soluzione è *in alto a destra*.

1. Politicamente scorretto (ma, sullo sfondo, alcuni gatti)

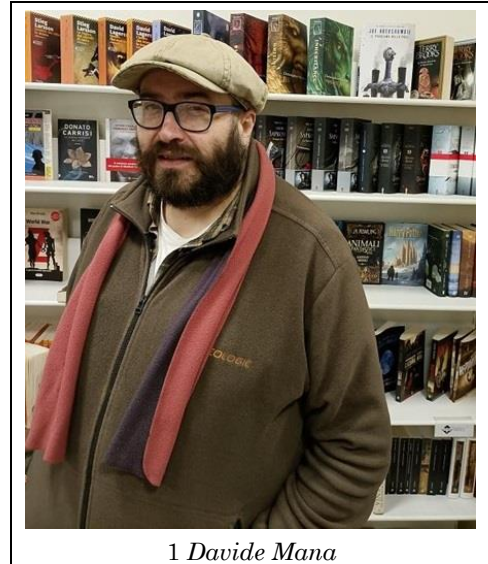
“Ovvio è la parola più pericolosa, in matematica.”

Più anni fa di quanti se ne voglia contare, in una libreria torinese specializzata in fantasy, fantascienza e occultistica di bassa lega (il movimento New Age dovrà ancora aspettare molti anni prima di nascere), due persone che dovrete conoscere erano perseguitate da un ragazzino petulante che sembrava non aver niente di meglio da fare che sparare giudizi assolutamente non richiesti, visto che gli acquisti da parte sua erano ancora più rari di quelli dei vostri due pur squattrinati eroi.

Col tempo, quel ragazzino è riuscito a diventare uno dei pochissimi scrittori *indie* italiani di horror, fantascienza e fantasy. Potreste però non conoscerlo (a meno che non siate davvero appassionati dei generi citati), perché gran parte della sua produzione è stata pubblicata solo all'estero, ovviamente in lingua inglese.

Quel ragazzino si chiamava Davide Mana, e se ne è andato il 21 novembre del 2024: non era più un ragazzino, ma troppo giovane per lasciarci. Sappiamo per certo che apprezzava almeno uno dei libri che abbiamo scritto, e per noi resterà sempre il ragazzino rompiscatole che, la volta che non lo vedi, ti sembra manchi qualcosa alla scena.

Potremmo invocare il nostro abituale ritardo per il fatto che ci ricordiamo di lui solo due mesi dopo, e soprattutto potreste pensare che questa pagina, questa stessa rivista, è il posto sbagliato per ricordare Davide, ma c'è un motivo per farlo. Lo scoprirete solo continuando a leggere: per il momento, però, è giunto il tempo di cedere la parola a Davide¹.



1 Davide Mana

***The Purple Sapphire**, di John Taine, pubblicato originariamente a puntate nel 1920 e poi in volume singolo nel 1924, è probabilmente uno dei lavori che suggerirono ad H.P. Lovecraft alcune idee per il suo classico **The Shadow Out of Time**.*

Il solo fatto che sia piaciuto al Nonno è già di per sé motivo di interesse.

Il fatto che Chaosium², grazie ai buoni auspici di Robert M. Price, ce lo rifili in un unico volume insieme con la storia di Lovecraft ed una decina di altri titoli piuttosto divertenti nel massiccio The Yith Cycle, è un altro fattore di interesse: raramente Price propone ciofeche.

E poi c'è il tema, naturalmente – il mai troppo abusato tema della razza perduta, annidata da qualche parte oltre i margini delle nostre mappe... nell'Africa Nera, nell'Himalaya, su qualche isola del Pacifico...

La trama in due parole.

Sulle tracce della figlioletta di un ufficiale inglese rapita da un misterioso orientale, tre improbabili avventurieri penetrano in Tibet e da qui raggiungono una misteriosa

¹ Quello che segue è l'estratto – quasi completo – della recensione scritta da Davide Mana sul suo blog “Strategie Evolutive” il 26 aprile 2011. La si può vedere in originale sul suo blog, che è ancora accessibile e che speriamo lo rimanga a lungo: <https://strategieevolutive.wordpress.com/2011/04/26/sulle-tracce-della-grande-razza/>.

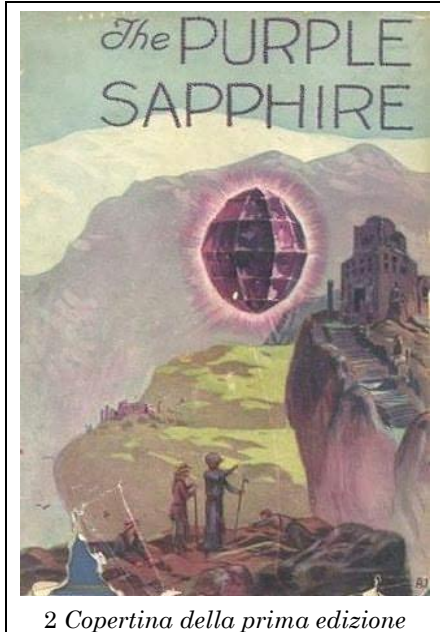
² Vi risparmiamo la fatica di cercare su Wikipedia: Chaosium è una casa editrice statunitense, delle più vecchie ancora in esistenza tra quelle di giochi di ruolo.

vallata dove un matriarcato religioso-scientifico custodisce le meraviglie della perduta Grande Razza, e nella quale si trovano i mitici zaffiri purpurei, dal valore inestimabile e dai misteriosi poteri.

Riusciranno i nostri eroi...?

OK, è praticamente **Le Miniere di Re Salomone**, del venerabile H. Rider Haggard, cucinato in salsa asiatica anziché in salsa africana.

Il che non è necessariamente un male – si leggono certe storie per il senso del meraviglioso trasmesso dai luoghi e dall'idea di una storia profonda e dimenticata, non certo per la trama avventurosa.



I romanzi sulle civiltà perdute costituiscono una ricca vena narrativa nell'ambito del fantastico – a parte i lavori di Rider Haggard, ed il ponderosissimo **The Coming Race** di Bulwer-Lytton, vengono in mente **The Moon Pool** di Merritt, una manciata di romanzi di E.R. Burroughs, un paio di storie lunghe di Howard, **The Valley of Creation** di Edmond Hamilton...

Qui, in più rispetto alla storia di Rider Haggard c'è un po' più di Teosofia "for Dummies", ed un taglio più strettamente fantascientifico.

Gran parte dei successivi lavori di Taine vennero pubblicati a partire dagli anni '40, quando la fantascienza "tirava" – solo *The Purple Sapphire* venne pubblicato appena scritto e, si vede chiaramente, senza la benché minima revisione e senza cura editoriale alcuna.

Di tutti i romanzi nel catalogo delle civiltà perdute, *The Purple Sapphire* non è il meno interessante, ma certo è il più insopportabile – forse perché opera d'esordio, forse perché pubblicato senza essere revisionato da una persona con un minimo di senso narrativo, forse perché i nostri gusti si sono spostati nel corso degli anni su un binario parallelo.

O forse, chissà, semplicemente perché Rider Haggard, Merritt, Lovecraft, Howard e Hamilton erano autori migliori di Taine.

Se la trama è funzionale e il sense of wonder è garantito dalle panoramiche himalayane dettagliatamente descritte, se il mistero è solido e la Grande Razza sinistra, ciò che cortocircuita il romanzo, rendendo la lettura faticosa, sono i personaggi.

Il team composto da un gemmologo mercenario americano, dalla sua bellissima ma altrettanto mercenaria nipote e da un misterioso avventuriero inglese, sulla carta è garantita per fare scintille, ma nelle mani di Taine collassa rapidamente.

Il professor Ford è cinico e strampalato, ma passa in capo ad un paio di capitoli dal centro della scena al ruolo di comprimario, da genio onnisciente a sidekick con sei righe di dialogo per capitolo.

Sua nipote Rosita è in assoluto la femmina più detestabile che si possa incontrare sulla pagina – e in capo ad un paio di capitoli si trasforma da avida mercenaria a sciocca bellezza da asporto, pur mantenendo tutto il cinismo e le offensività originarie.

L'inglese Jonesey, sbalzato senza preavviso a centro scena come protagonista in un ovvio ripensamento autorale, non sa decidersi se essere Bertie Wooster o Sherlock Holmes, e nel frattempo esibisce tutto il campionario di affettazioni verbali

dell'inglese affettato, dal "Blimey!" al "...eh, what?" all'"old boy"... pare una caricatura di Jonathan Higgins.

È proprio sulla gestione del dialogo, che Taine uccide i propri personaggi senza pietà. Indipendentemente dall'argomento trattato, i nostri eroi sono sempre garruli e petulanti, verbosissimi e di un'ironia insopportabile, e che discutano di questioni legate alla sopravvivenza nelle terre selvagge, che narrino antiche leggende di popoli perduti o che flirtino, pare sempre che stiano sorseggiando il tè e commentando una partita a cricket.

Anche qualcosa come l'attraversamento di una cengia sospesa sull'orlo del baratro è causa di interminabili monologhi e scambi di sciocche frecciate fa il baldo anglosassone e la bellissima americana.

La storia è buona.

Peccato che lo stridere del dialogo e dei personaggi contribuisca a rendere la lettura una faccenda spiacevole.

Come spesso accade in questi casi, i difetti principali sono a tal punto sbattuti in faccia al lettore che questi diviene consapevole anche di quei dettagli su cui in condizioni normali avrebbe sorvolato.

L'inaccuratezza scientifica.

La non-poi-così-sottile propaganda eugenetica.

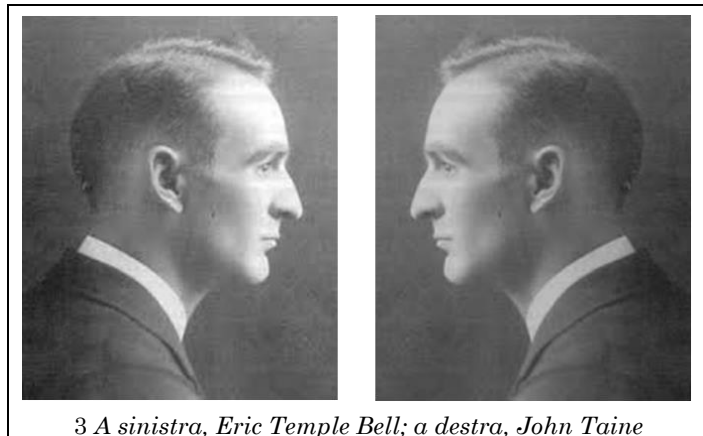
L'orrido razzismo – Taine è a tal punto brutale ed offensivo nel descrivere i popoli asiatici, che qualsiasi incontinenza di Lovecraft o Howard scompare nel confronto.

È la dimostrazione che – quali che fossero i loro difetti – i grandi autori avventurosi del passato possedevano una tecnica abbastanza sofisticata da mascherarli, o renderli secondari rispetto alla narrazione.

Il romanzo di Taine rimane un'opera a suo modo importante, ed il volume curato da Price è un'eccellente aggiunta allo scaffale lovecraftiano. *The Purple Sapphire* resta tuttavia un'occasione mancata.

Ne parliamo qui perché John Taine era lo pseudonimo di un matematico.

Eric Temple Bell nasce il 7 febbraio del 1883 a Peterhead (Aberdeenshire), in Scozia, da Helen Jane Lindsay Lyall e James Bell, pescivendolo e frutticoltore; la cosa non viene menzionata negli scritti autobiografici di Eric: sembra che se ne vergognasse al punto da evitare di parlarne anche con la moglie e il figlio.



3 A sinistra, Eric Temple Bell; a destra, John Taine

Nel 1884 la famiglia, formata dai genitori, dal fratello maggiore James Redward e dalla sorella minore Enid Lyall, lascia la Scozia per trasferirsi a San José, California, USA. Solo due anni dopo, però, nel 1886, muore il padre, e tutta la famiglia ritorna in Gran Bretagna. All'età di 18 anni, Eric mostra (grazie ad un ottimo insegnante³) un notevole interesse per la matematica: arriverà a vincere il premio messo in palio per la gara di laboratorio di fisica matematica e, nello stesso anno, suo cugino vince il premio per la gara di greco. Abbastanza curiosamente – ma ammirabile invito all'interdisciplinarietà – il premio per il vincitore della gara di greco consisteva in una copia delle opere di James Clerk Maxwell su elettricità

³ Edward Mann Langley (1851–1933), insegnante alla Bedford Modern School dal 1851 al 1918; in questo periodo, trova il tempo di scrivere svariati testi di matematica e di fondare (nel 1904) *The Mathematical Gazette*.

e magnetismo, e quello per il vincitore del laboratorio di fisica in una copia dell'Odissea di Omero⁴. In ogni caso, l'evento alimenta l'interesse di Eric per la teoria dei numeri, che continuerà per tutta la vita.



4 San Francisco, 1906. Una delle foto meno drammatiche di quel terremoto.

Nel 1902 torna (questa volta da solo) negli Stati Uniti, dove si iscrive alla Stanford University e ne esce con un B.A. in matematica dopo soli due anni, in luogo dei quattro previsti; successivamente, insegna in una scuola privata di preparazione all'università. Il terremoto del 1906 sviluppa, a San Francisco, un grosso incendio che distrugge il centro e si avvicina pericolosamente alla pensione dove vive Bell; allora si precipita in giardino, scava una buca e seppellisce i suoi libri più preziosi (tra di essi, la storia ricorda solo la *Théorie des Nombres* di Edouard Lucas⁵)

per proteggerli dal fuoco; intento riuscito soltanto a metà, visto che risulteranno notevolmente danneggiati dalle fiamme, anche se ancora leggibili: comunque, come vedremo, Eric non vorrà più separarsi da loro.

Non vorremmo che l'aneddoto appena narrato vi facesse pensare ad un nerd *ante litteram* chiuso nella sua stanza: Bell possiede un buon grado di socialità, tant'è vero che, dopo aver lasciato San Francisco, ottenuto un master Seattle, nella Washington University, essersi trasferito ancora una volta in California, a San José, alla fine, nel 1910, si sposa con Jessie Lilian Smith-Brown, che aveva conosciuto mentre insegnavano entrambi (lui matematica, lei arte) nel liceo della cittadina di Yreka, all'estremo nord californiano, poco distante dal confine con l'Oregon.

Il matrimonio funziona bene, e nel 1917 è allietato dalla nascita di Taine; sembra impossibile non notare che quel nome doveva essere particolarmente caro ad Eric Temple Bell, visto che aveva cominciato a scrivere di fantascienza già nel 1908 usandolo come pseudonimo⁶. Nella loro casa, secondo un biografo, si vedevano solo "i loro quadri e un numero imprecisato di gatti".

⁴ La nostra fonte preferita (il MacTutor dell'Università di St.Andrews) conferma sia l'apparente "stranezza" che il premio per il contest di greco fosse effettivamente il libro di Maxwell, così come la prestigiosa edizione dell'Odissea fosse destinata a chi vinceva la gara del laboratorio di fisica. Ed è lo stesso Bell a raccontare che i due cugini decidessero di scambiarsi i premi vinti, ma senza ottenere troppa soddisfazione. Il cugino grecista non riusciva a leggere scorrevolmente i versi di Omero, e anche Eric uscì frustrato dal suo tentativo di leggere Maxwell: "il segno di integrale era particolarmente sconcertante per chi non era mai andato oltre il teorema binomiale con esponente intero positivo", raccontò in seguito. Visto l'interesse, la madre paga le lezioni private che il medesimo Langley impartisce a Eric. Non vogliamo neppure pensare al vespaio che verrebbe suscitato oggi dal premiare uno studente meritevole in greco con un libro di fisica o dal pagare per lezioni private un professore di matematica della stessa scuola frequentata dal destinatario delle lezioni.

⁵ Abbiamo parlato di lui su RM279, Aprile 2022, "*D'in su la vetta della torre antica*".

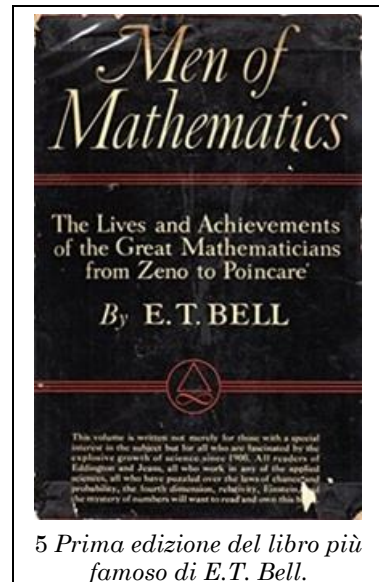
⁶ Taine, pur suscitando grandi speranze nel genitore con la domanda su "cosa fosse quel segno dell'addizione piazzato sul tetto della chiesa" alla fine lo deluderà, preferendo la professione di medico a quella di matematico.

Nel 1924 Bell viene nominato Consigliere dell'American Mathematical Society e (non sappiamo se prima o dopo la nomina) viene insignito del Bôcher Memorial Prize⁷.

Bell comincia ad essere un professore conteso dalle diverse istituzioni: le Università del Michigan, Bryn Mawr e Columbia gli offrono cattedre, ma Bell riesce a barcamenarsi senza né accettare né rifiutare queste proposte, tenendole comunque aperte. Alla fine, prenderà in considerazione due proposte, quella della Columbia e quella del California Institute of Technology: nonostante l'offerta della Columbia fosse economicamente più vantaggiosa, la mediazione del fisico Robert Millikan lo fa optare per il CalTech, dove resterà sino a un anno dalla morte. A quanto pare la scelta era stata determinata non solo dal prestigio scientifico che il CalTech si stava costruendo, ma anche dal fatto di essere situato sulla costa occidentale degli Stati Uniti.

In questo periodo Bell riceve nomine e riconoscimenti dalle principali istituzioni del paese: viene nominato vicepresidente dell'AMS, presidente della Mathematical Association of America e membro dell'Accademia Nazionale delle Scienze; il periodo però non è tutto rose e fiori, perché nel 1929 inizia la Grande Depressione che colpisce duramente anche il CalTech: dovrà confessare a Oswald Veblen che gli è impossibile invitarlo per una serie di lezioni: "...i matematici non hanno a disposizione fondi disponibili per pagare docenze esterne: in questi anni siamo riusciti a pagare un unico esterno, Harald Bohr⁸, con le briciole cadute dal banchetto dei fisici. Quest'anno, dovrò pagare di tasca mia la trasferta a New Orleans...".

Le sue ricerche in questo periodo vertono soprattutto sulla teoria dei numeri e sulla combinatoria: il libro che gli è valso il premio Bôcher (*Mathematical Methaphors*) è riconosciuto come una delle vette della matematica americana ma, pur riconoscendo la qualità dei lavori, quando Bell si spinge al di fuori di questi campi non suscita l'entusiasmo dei colleghi: Birkhoff scriverà di lui che "...al di fuori dei suoi campi specialistici, i suoi lavori non sono sempre di alta qualità"; e anche i lavori divulgativi per i quali è ricordato oggi, (principalmente *Men of Mathematics*⁹), anche se presentano indubbi aspetti positivi¹⁰, causano perplessità in alcuni colleghi: "uno stile chiaro e esuberante nel quale le sue opinioni, che si sia o no d'accordo con esse, vengono espresse con vigore" (Broadbent). Qualcuno sarà meno gentile, sostenendo che il libro contiene "...inaccuratezze storiche e interpretazioni talvolta fantasiose" (May). Anche il riconoscimento dell'importanza di Kovalevskaya non ne esce indenne: secondo Roger Kooke infatti si tratta solo di un "...maltrattamento esasperatamente paternalistico e allusivo...". Con una vena di sarcasmo, la storica della matematica Ann Koblitz scriverà che "È a lui (Bell) che i matematici sono in gran parte debitori per le impressioni distorte sui loro predecessori".



⁷ Il Bôcher è uno di quei premi "veloci" della matematica: contrariamente alla Medaglia Fields non richiede di essere al di sotto di una certa età per riceverlo, e oggi viene dato ogni tre anni premiando, più che il matematico, l'articolo da lui scritto; lo definiamo premio "veloce" in quanto l'articolo deve essere stato scritto nei sei anni precedenti l'erogazione del premio. Nei primi tempi (il premio è stato istituito dall'AMS nel 1923) la distribuzione non era così regolare: Bell, infatti, lo vince nel 1924 con l'articolo *Arithmetical Paraphrases*; in quell'anno viene anche premiato Solomon Lefschetz (per *On certain numerical invariants with applications to Abelian varieties*).

⁸ Abbiamo parlato di lui in RM063, aprile 2004, "Una vita da mediano".

⁹ L'edizione italiana è "I Grandi della Matematica", Sansoni, 1964.

¹⁰ È il primo libro di divulgazione nel quale venga riconosciuta l'importanza di Sofya Kovalevskaya (della quale abbiamo parlato in RM144, gennaio 2011, "Pregiudizi").

Non stupisce quindi che i suoi lavori di fantascienza¹¹ “si distinguano per la loro violenza, le catastrofi travolgenti, i mostruosi rettili preistorici e gli umani trasformati in bestie brutali o in crescite fungoidi...”, riuscendo quindi a riscuotere un certo successo: come dirà Bell, a parziale giustificazione di sé stesso, “...*se questi romanzetti faranno soldi, gli editori potranno essere interessati anche a libri più seri*”.

Tutti questi libri erano scritti sotto lo pseudonimo di John Taine, e molta gente sapeva che sotto questo nome si nascondeva Eric Temple Bell; l'editore del giornale Pasadena Stars-News ebbe allora l'idea di chiedere la recensione di *The Magic of Numbers* (di Bell) a John Taine, che scrisse: “... *con incomparabile arguzia e intuito, Eric Temple Bell ha fatto di “The Magic of Numbers” [...] una vibrante biografia degli uomini che hanno e hanno avuto una parte così importante nello sviluppo scientifico e filosofico*”. Una lettrice del giornale cascò nello scherzo e si lamentò che “...*era insultante per il Dr. Bell essere recensito da uno scrittore di fantascienza*”.

L'ultimo anno di vita Bell lo passa all'ospedale di Watsonville, in una stanza nella quale può fumare i suoi sigari “solo se qualcun altro è presente nella stanza” (visto che aveva rischiato di dar fuoco più volte al suo letto), circondato dai suoi libri preferiti (quelli scritti da lui e quelli scampati all'incendio di San Francisco).

Bell se ne andrà quindici giorni dopo aver firmato il contratto per la stampa di *The Last Problem*, il 21 dicembre 1960. Secondo la leggenda, con uno dei suoi amati gatti accovacciato sul letto.



¹¹Secondo l'articolo di *Engineering and Science* dall'allusivo titolo “The Double Life of Doctor Bell”.

2. Problemi

2.1 Un giro in macchina

Nel senso che ci troviamo in una rotonda; la notizia che non c'è Rudy alla guida dovrebbe comunque tranquillizzarvi.

Sulla rotonda ci sono, al momento, cinque macchine (non è, evidentemente, Piazza Baldissera, che da tempo Rudy e Doc utilizzano nelle conferenze in Piemonte per spiegare con successo il Paradosso di Braess... Ma questa è un'altra storia), che stanno continuando a girare in tondo, alla ricerca dell'uscita giusta. Per rendere questa ricerca ancora più complicata, i nostri cinque eroi (eh? Ah, sì, giusto: Anna, Bruno, Carlo, Dario e Ebe: ABCDE, come sempre) sono in conferenza tra di loro e con Rudy, seduto a guardar girare le auto: siccome si sta divertendo un mucchio, fa una serie di domande cretine per distrarli. Oh, ancora un dato: per uno strano scherzo del destino (certe cose succedono solo nei problemi), le cinque auto hanno le targhe (parte numerica) 1, 2, 3, 4 e 5, ma non necessariamente in quest'ordine; ognuno di loro vede la targa dell'auto davanti e di quella dietro, sa che le targhe sono 1, ..., 5, ma non vede (e non ricorda) la propria. Tra i cinque sventurati e Rudy si svolge una conversazione di questo tipo:

Rudy: "La vostra targa è un quadrato perfetto?"

Tutti: "Non lo so"

Rudy: "La vostra targa è un quadrato perfetto?"

Tutti tranne Ebe: "Non lo so". Ebe: "Uh... No"

Rudy: "La vostra targa è maggiore di quella dietro di voi?"

Il meno tollerante della banda dei giroloni (Dario) risponde, piuttosto seccato, "Non lo so!"

A questo punto, Bruno e Ebe dicono "No!"

E subito dopo Anna e Carlo dicono "Sì!"

Quello che vorremmo sapere è chi guida cosa...

2.2 Una mela al giorno...

Con quel che segue. La replica di Rudy a questo proverbio è sempre stata "Solo se riesci a centrare il medico tirandogli la mela in mezzo agli occhi".

Ve lo ricordate, vero, il problema di Martin Gardner sulle mele? Avete rubato delle mele dal frutteto, ma per uscire dovete passare davanti a tre guardiani; al primo date la metà delle mele rubate più mezza mela, al secondo la metà delle mele restanti più mezza mela, al terzo la metà delle mele restanti più mezza mela, e ve ne andate con una sola mela in tasca. Quante mele avevate rubato? No, non avete un coltello per tagliare le mele: già vi hanno pinzato per furto, volete aggiungere il porto d'armi abusivo?

No, il problema non è questo, ma volevamo comunque parlare di mele. Nel nostro caso, voi e i vostri due compari siete stati sorpresi dal guardiano (che è stato messo a guardia del frutteto perché odia le mele: quindi, incorruttibile), il quale vi chiude nei tre depositi di mele, uno per ogni deposito.

Siccome sta per iniziare la raccolta delle mele (...altrimenti, cosa sareste andati a rubare, nel frutteto?), la quantità di mele nei tre depositi è piuttosto scarsa: il guardiano (che dice sempre il vero) vi comunica che ci sono da una a nove mele per ogni deposito, e in ognuno di questi c'è un numero diverso di mele; l'intenzione del guardiano è di rispondere (sempre onestamente) a una domanda da parte di ciascuno di voi, con gli altri che sentono perfettamente sia la domanda che la risposta; se dopo le tre domande uno di voi saprà dire il numero totale delle mele, potrete andarvene; in caso contrario, lavorerete gratis alla raccolta delle mele: non potete stabilire strategie strane prima (e non potete neanche mangiarvi le mele per far venir fuori un numero "banale": è un anno che sono in deposito e il loro aspetto è tutt'altro che invitante). Appurato che nel vostro deposito ci sono cinque mele, sentite i vostri compari che fanno le seguenti domande (in ordine):

“Il totale delle mele è un numero pari?” Risposta: “No”.

“Il totale delle mele è un numero primo?” Risposta: “No”.

Adesso tocca a voi: che domanda fate?

3. Bungee Jumpers

La prima parte del problema verrà utilizzata per la dimostrazione della seconda.

Prima parte

Sia K un insieme convesso sul piano simmetrico rispetto all'origine O con area maggiore di 4. Dimostrate che K contiene almeno un altro punto del reticolo intero diverso da O (Teorema di Minkowsky)

Seconda parte

In un frutteto circolare di raggio 50 con centro nell'origine O , gli alberi (supposti tutti aventi sezione circolare uguale tra loro) sono piantati in tutti i punti del reticolo intero tranne O . Per alberi con raggio della sezione sufficientemente piccolo, la vista verso l'esterno non è bloccata (ossia è possibile tracciare un raggio da O che non passa attraverso nessun albero). Dimostrate che quando gli alberi hanno un raggio minore di

$$\frac{1}{\sqrt{2501}} \approx \frac{1}{50.01}$$

è possibile dall'origine vedere oltre il frutteto, ma quando il raggio diventa maggiore di $1/50$ la visuale è bloccata da un albero.

La soluzione, a “Pagina 46”

4. Era Una Notte Buia e Tempestosa

E insomma, questa è la quinta volta di seguito che esce questa irragionevole rubrica di recensioni di RM, e anche se non sappiamo ancora se riusciremo a fare filotto fino a sei, o se decideremo di trasformarla da saltuaria a permanente (no, a dire il vero questo lo sappiamo: non se ne parla), o se dopo di questa non si vedranno comparire più altre recensioni fino a RM788, quanto meno ci permettiamo il lusso di dare per scontato che sappiate già come funziona. E se non lo sapeste, andrebbe bene lo stesso: quindi, tagliamo corto con l'introduzione e buttiamoci subito sul nocciolo della questione, insomma, nel libro.

4.1 Canzoniere Matematico

“Eppure credo che la poesia abbia ancora bisogno di matematica”.

Prendete noi, per esempio. E con “noi” intendiamo proprio i tre tapini Rudi Mathematici in carne e ossa. Prendeteli all'inizio della storia di questo giornalino, quando lo stesso cominciava a rubarci tempo e fatica, almeno quel tanto di tempo e quel tanto di fatica che, se la conversazione occasionale con semiconosciuti parimenti occasionali finiva sulla categoria “Hobby e Passatempo”, venivano mestamente costretti a confessare che si dilettavano con la Matematica Ricreativa. Nulla di strano, direte voi, ma voi non valete: voi leggete questo giornalino, è quasi certo che ci conosciate da tempo, e soprattutto conoscete bene il concetto di “matematica ricreativa”, sennò non sareste qui. Ebbene, era già una fatica del diavolo provare a convincere che sì, noi ci divertivamo con la matematica, ma questa era solo la parte più facile. Quella difficile veniva prima, quando dovevamo giurare e spergiurare che sì, esisteva davvero una cosa che si chiamava “matematica ricreativa” e che trattava proprio quello che il nome prometteva: cose che mettevano insieme l'aggettivo “divertente” con il sostantivo “matematica”. Ai più, cotanta unione sembrava solo una palese contraddizione.

Adesso mettevi nei panni dell'autrice di questo libro, e immaginate come debba sentirsi quando, avendo di fronte i sopraddetti semisconosciuti occasionali, si ritrova a dover spiegare che le piacciono la poesia e la letteratura nonché la scienza e la matematica; e immaginatela mentre confessa che sì, si diletta nel tenerle tutte e quattro insieme. Ci auguriamo, per il suo bene, che sia abbastanza abile da svincolare la domanda e virare la conversazione su Masterchef o sul centravanti dell'Atalanta.

L'Autrice citata è già passata in questa nostra rubricetta (come avrebbe potuto non farlo?) in RM240, gennaio 2019, allorquando recensimmo un'opera così imprevedibilmente mastodontica che ancora oggi (e persino dopo averla recensita e sistemata in libreria) facciamo fatica a pensare che possa davvero essere stata completata. Parliamo di "Teoria dei Canti"¹², poema in tre cantiche (come la Divina Commedia), tutto in terza rima (come la Divina Commedia), un po' più lungo della Divina Commedia (come numero di versi, non come numero di canti), solo che anziché esplorare Inferno Purgatorio e Paradiso esplora Materia, Matematica e Linguaggio. A ben vedere, non c'è neppure qui tanta differenza con l'Alighieri, che il linguaggio l'ha inventato, la fisica del tempo suo la presenta a piene mani nella sua commedia, e la matematica ancor di più. O vi siete forse dimenticati quei versi del XXVIII canto del Paradiso dove inventa persino verbi nuovi e bellissimi, pur di spiegare l'esplosione delle successioni geometriche?



*L'incendio suo seguiva ogni scintilla;
ed eran tante, che 'l numero loro
più che 'l doppiar de li scacchi s'immilla.*

Paradiso, XXVIII, 91-93

Beh, Elena l'ha rifatto. Anzi, a dire il vero, l'aveva già rifatto, e più di una volta: aveva già mandato in stampa, grazie a Scienza Express di Daniele Gouthier, un libro che versifica sui più famosi paradossi della storia, "*E tutto sembrò falso e sembrò vero*". In più, siccome scrive di scienza ma non solo di scienza, ha messo nero su bianco anche romanzi e saggi. Non ve li elenchiamo qui perché siamo famosi per esser pigri, e anche perché tutto è spiegato assai meglio là dove Elena Tosato è più facile trovarla, seppur virtualmente: nel suo angolo di rete, <https://substack.com/@elenatosato>. Altri libri che abbiamo la colpa di non avere recensito, insomma: però era proprio difficile passare sotto silenzio questo "Canzoniere Matematico", uscito a fine 2024. Oddio, "uscito" significa che è facile ottenerne una copia su carta se andate a cercarvelo su Amazon, perché gli editori (con l'eccezione del benemerito e già citato Gouthier) fanno fatica a pensare di pubblicare poesia, fanno fatica

¹² Il link per leggere l'EuNBeT associato è: <http://www.rudimathematici.com/archivio/240.pdf#page=11>.

a pensare di pubblicare matematica, e lasciamo al lettore il facile esercizio di calcolare quanta fatica facciano al solo pensiero di pubblicare matematica in forma di poesia.

Non fate quella faccia: voi non siete editori, non potete permettervi quello scetticismo proprio di chi, prima che al valore di un'opera, deve pensare a quadrare un bilancio. Neppure voi credete che sia possibile parlare di matematica in endecasillabi? Davvero? Allora iniziamo con una cosa facile, tipo un veloce ritratto dello zero.

*Un punto di discrimine, rivolto
avanti e indietro al contempo, sospeso
nella neutralità. Non ha né peso
né quasi forma, eppure conta molto,
e mentre parla devo dargli ascolto
nei buchi che rilascia. S'è compreso
né primo, né composto, e non esteso:
è quel che c'è quando tutto s'è tolto.*

*Traspare, ed è imperioso, ed è lo zero
è cardinalità d'insieme vuoto
eppure è cosa diversa dal nulla:*

*ostacolo indiscusso del pensiero
che l'ha strappato a stento dall'ignoto,
e nei suoi casi obliqui sta e si culla.*

L'arte di mescolare la poesia con la matematica, e più in generale con gli oggetti della conoscenza scientifica, è antica. Si tinge addirittura dei colori primigeni del mito, partendo da Esiodo e Parmenide e arrivando a Lucrezio; si dipana nella cultura medievale e rinascimentale trattando in versi di quasi tutto lo scibile umano a disposizione degli eruditi dell'epoca, e vive un fatale declino da quando il linguaggio della matematica, e della scienza, si è reso via via più specializzato e formale, fino a distaccarsi in maniera sostanziale dal linguaggio comune che è appannaggio della forma poetica di ogni tempo. Eppure credo che la poesia abbia ancora bisogno di matematica: vuoi perché le forme metriche chiuse, come quella del sonetto, e la stessa impostazione ritmica del verso hanno strutturalmente a che fare con la matematica, vuoi perché la matematica è parte integrante dell'avventura intellettuale umana, e la poesia non dovrebbe esimersi dal cantarne le sorti nemmeno ora che parlano lingue così diverse.

Elena Tosato scrive racconti, romanzi, rime.



Può darsi che la poesia proprio non vi piaccia, e allora c'è ben poco da fare, per convincervi. Ma se siete anche soltanto un poco incuriositi, beh, allora potreste considerare questo libro davvero prezioso. È composto di 64 capitoli, perché le potenze di due hanno sempre il loro fascino, e allora raccontare più di 64 argomenti matematici significa arrivare a 128: è impresa forse possibile, ma improba. Un sonetto ha sempre 14 versi, e un sonetto introduce sempre il capitolo, ma poi l'argomento si sviscera. Lo fa, Tosato, anche quando è più complesso dello zero (anche se presentare le proprietà essenziali dello zero in 14 endecasillabi è comunque cosa prossima alla magia) e ai comuni mortali sembrerebbe difficile anche solo parlarne a parole, di fronte a un caffè. Come raccontereste, anche solo al bar, il Teorema del Punto Fisso di Banach-Caccioppoli? O le Equazioni di Maxwell, o l'Esponente di Ljapunov?

Eppure sono tutte cose che arrivano lì, dopo il sonetto, con la loro piana spiegazione in prosa, senza rima e, quando serve, con tanto di formule e grafici, dentro le quasi quattrocento

pagine che compongono il Canzoniere Matematico.

È così che funziona, questo libro talmente ibrido e incredibile che non troverà editori. Con quattordici endecasillabi – e dio solo sa la fatica che ci vorrà a tenere insieme accenti, ritmo, suono e contenuto – seguiti da pagine di matematica e di formule. Non si sa neppure bene

come sia meglio leggerlo: se iniziare secondo la regola prestabilita dalla tipografia, prima il sonetto, per poi mettersi in pausa, rileggere, provare a riconoscere il senso nascosto nelle rime e nella scelta delle parole, chiedersi se ogni termine significa davvero che quel sembra a prima vista, o nasconde una proprietà matematica che è sfuggita alla lettura, e solo dopo verificare le impressioni ricevute nella lettura del testo successivo, trovare conferme, disdette e sorprese, oppure...

...oppure al contrario: ripassare i concetti leggendo prima il testo, commentando da soli con noi stessi, ripetendoci “già, già...” o “ah, davvero?”, e solo dopo il bagno di frasi non regolamentate dalle undici sillabe tornare a inizio capitolo, e leggere il sonetto.

Vanno bene entrambi i modi. Va bene anche saltare, scorrere l'indice e alzare le sopracciglia incontrando il “Theorema Egregium” e correre a pagina 197, leggere e poi ricominciare dall'indice. Va bene tutto, che discorsi... ma visto che chi legge questa recensione è probabilmente più affine ai teoremi che ai distici elegiaci, ci permettiamo un consiglio, tanto banale quanto inevitabile. Una poesia ha il ritmo dei versi scandito dagli accenti e dalle rime, e questo è il suo tessuto poetico: ma non è necessario mettere una pausa – mentale o vocale che sia – alla fine d'ogni verso. Una poesia ha anche una punteggiatura, che segue la grammatica, il senso, le intenzioni: mentre il verso costruisce il ritmo, il contenuto costruisce il significato. Sono importanti entrambi, proprio come lo sono musica e testo nelle canzoni: vanno bene anche da soli, ma se sono bene accordati, la loro unione è maggiore della somma delle parti.

Ma poi, alla fine, vale quel che vale per ogni forma di espressione, e sia la matematica che la poesia sono espressioni tra le più antiche e forti di ogni tempo. Leggete come volete, cercate il vostro teorema preferito, così come io ho letto il mio, e mentre leggevo mi sembrava quasi di sentir parlare Emmy, anche se lei, probabilmente, non ha mai saputo parlare in italiano.

*Lo spazio cieco, insieme vivo e morto
sosta in se stesso e poi si guarda in pace.
Gira, si muove, discute, non tace,
del cambiamento facendosi accorto,*

*svolgendo ciò che è stato già ritorto,
alzando ancora ciò che altrove giace,
sempre sentendo d'essere efficace
nel dire ciò che fa ragione e torto,*

*ponendo se medesimo a problema.
Si strappa, si recupera e si dà,
e questo la natura ci riserva:*

*che ogni simmetria del sistema
si specchia allora in una quantità
che, pur non mai placata, si conserva.*

Titolo	Canzoniere Matematico
Autore	Elena Tosato
Editore	autopubblicazione Amazon
Data Pubblicazione	Dicembre 2024
Pagine	388
ISBN	979-834-5696-194
Prezzo	16 euro

5. Soluzioni e Note

Febbraio!

Buon compleanno a noi, a RM e a ventisei anni di rude matematica ricreativa.

5.1 [311]

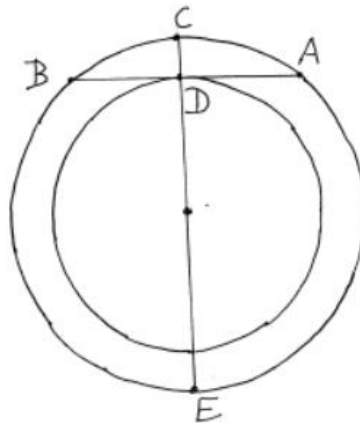
Con il nostro grande desiderio di uscire un po' prima con RM abbiamo perso una bella soluzione di **Alberto R.**, che vi proponiamo ora.

5.1.1 L'Eloniobirinto

Ecco il secondo problema così come lo abbiamo riassunto il mese scorso:

Siete intrappolati in un tunnel sotterraneo perfettamente circolare unicursale, con degli interruttori a intervalli regolari alle pareti che hanno due posizioni (su e giù). Inoltre, avete carta, matita e pila a lunghissima durata. Non potete fare segni sul muro o abbandonare attrezzatura e/o capi di vestiario lungo il tunnel. Il tunnel non ha segni particolari e, camminando, non potete dedurre il raggio di curvatura. Potrete uscire solo se sapete dire il numero degli interruttori.

A gennaio abbiamo proposto le soluzioni di **Valter, Galluto, trentatre, Luigi e GaS**. A parte il mal di testa nel circolare nel labirinto, le soluzioni erano tutte un po' diverse, ma in particolare è diversa quella di **Alberto R.**:



Poso la torcia a terra in A e mi sposto fino al punto B individuato dalla condizione che da B la luce della torcia posata in A si-vede/non-si-vede. Torno indietro a recuperare la torcia misurando a passi la distanza BA.

Sempre a passi misuro la larghezza CD del tunnel. Ora ho tutti i dati necessari per applicare il teorema delle corde

$$BD \cdot DA = CD \cdot DE$$

Noto il diametro ho la lunghezza del tunnel che divisa per la distanza tra due interruttori – sempre misurata a passi – mi dà un numero N che sarà una grossolana approssimazione del numero degli interruttori presenti nel tunnel.

Assumo un coefficiente di sicurezza 2 e presumo che il numero degli interruttori non sia superiore a 2N.

Pongo giù (se non lo sono già) almeno 2N interruttori di fila e su il successivo. Proseguo il giro contando quanti interruttori giù incontro prima di ritrovare l'unico che avevo messo su.

Bello vero? La misura a passi richiama una delle nostre citazioni preferite, che suggerisce di misurare qualsiasi cosa spaventi. Siamo di nuovo di corsa, passiamo ai problemi del mese scorso.

5.2 [312]

5.2.1 Facciamo ordine

Noi facciamo ordine, ma ci vergogniamo un po' dei problemi che il Capo immagina con lassativo a basso dosaggio per bambini:

Dato un mucchio di dolcetti di tre tipi diversi perfettamente commestibili ma, in funzione della tipologia, contengono dosi diverse di un potente lassativo che ha effetto solo dopo averne ingerito almeno 180 dosi. Per una tipologia, ogni dolcime contiene 20 dosi di lassativo; per un'altra, 18 dosi e, per l'ultima, 9 dosi. Ogni bambino può prendere quanti dolciumi vuole, ma non dovrà comunque superare le 180 unità. Quanti dolci ci sono in ogni ragione "sicura"?

Chissà se il nostro sunto si capisce... comunque a tempo di record arriva la soluzione di **Valter**:

Provo a rispondere d'istinto senza pensarci troppo su:

- le razioni sono composte da $4 + 4 + 3 = 11$ dolci
- male che vada i 3 dolci sono quelli con 9 dosi di lassativo
- le unità totali di lassativo sono: $4 \cdot 20 + 4 \cdot 18 + 3 \cdot 9 = 179$ $179 < 180$

Sembra funzionare, che ne dite? Simile ragionamento da **Alberto R.**:

Una terna di dolcetti, uno per ogni tipo, contiene $20+18+9=47$ dosi di lassativo. Se prendo 4 terne accumulo $4 \cdot 47 = 188$ dosi che superano le 180 consentite, quindi rimetto giù un dolcetto scelto a caso il che, mal che vada, mi fa recuperare 9 dosi e scendo a 179 o meno. Bene. Adesso posso mangiare i restanti 11.

Stiamo tranquilli, una soluzione c'è, e vi diciamo subito che in un modo o nell'altro ci sono arrivati tutti. La complessità del ragionamento però varia, prendete la versione di **Gas**:

Premessa: si possono prendere solo dolci interi, non consideriamo di prenderne solo pezzi (morsi)...

Cominciamo con il dire che non c'è una soluzione "sicura" unica per ogni bambino, dipende cosa si voglia massimizzare e le alternative che vedo sono:

1. massimizzare il numero di uno specifico dolcime
2. massimizzare il numero di due specifici dolciumi
3. massimizzare il numero totale di dolciumi, a prescindere dalla tipologia

Cominciamo dal **caso 1** che è il più facile: sicuramente non posso prendere 9 dolcetti del mio tipo preferito, rischio infatti che sia quello da 20 garantendomi il totale di 180 dosi di lassativo. Ne posso però prendere 8 del mio dolce preferito: rischio un massimo di 160 unità e mi avanza anche spazio per un altro dolcime di un altro tipo.

Per il **caso 2** ce la caviamo verificando che non esiste una combinazione che garantisce almeno 10 dolcetti di due diversi tipi: il caso ottimale sarebbe infatti una situazione equilibrata di 5 dolciumi di un tipo e 5 dell'altro, combinazione che però, nel caso peggiore, fa rischiare ben 190 dosi ($20 \cdot 5 + 18 \cdot 5$).

Possiamo però prendere almeno 9 dolcetti dei miei due preferiti, questo si può fare in tutte le combinazioni possibili:

- $8 + 1$, nel caso peggiore da 178 dosi (equivalente alla soluzione del caso 1)
- $7 + 2$, nel caso peggiore da 176 dosi
- $6 + 3$, nel caso peggiore da 174 dosi
- $5 + 4$, nel caso peggiore da 172 dosi

In nessuno dei casi possiamo però aggiungere un decimo dolcetto del terzo tipo. Quindi, per il caso 2 possiamo prendere un massimo di 9 dolcetti dei miei due preferiti nella proporzione che voglio.

Per il **caso 3** dobbiamo calcolare il massimo teorico considerando che, *per ovvie ragioni di simmetria* [cit], il caso ottimale è dato dal prendere un numero uguale di ogni dolce. Detto X questo numero si deve avere

$$X \cdot (20+18+9) < 180$$

che da $X < 3,8$.

Consideriamo quindi, in prima approssimazione, di prendere 3 dolci di ogni tipologia: questi 9 dolci ci garantiscono un totale di 141 dosi. Abbiamo però altre 38 dosi a disposizione da giocare: non possiamo prendere altri 2 dolci di uno stesso tipo (rischieremmo un massimo di 181 dosi) ma possiamo prendere in sicurezza altri 2 dolci di 2 tipi diversi che ci garantiscono un massimo possibile di $141+20+18=179$ dosi. Per il caso 3, quindi, il massimo si ha prendendo $4 + 4 + 3 = 11$ dolci.

Riassumendo:

1. massimizzare il numero di uno specifico dolce => Posso prenderne 8 + 1 (9 totali)
2. massimizzare il numero di due specifici dolci => Posso prenderne 9 dolcetti dei miei 2 tipi preferiti nella proporzione che voglio, nessun dolcetto del terzo tipo
3. massimizzare il numero totale di dolci, a prescindere dalla tipologia => Posso prendere 11 dolci nella proporzione 4, 4 e 3

I nostri solutori giocano a citarci, siamo rovinati... anche se dopo ventisei anni di attività è improbabile che i nostri lettori più affezionati si dimentichino i nostri tormentoni. Una diversa forma di citazione è nella soluzione di **Emanuele** per esempio:

Istruttivo esercizio di programmazione lineare in cui le 9 equazioni vincolo sono costituite dalla permutazione delle 3 variabili ($2!=6$) più i 3 vincoli di positività.

$$\text{Politopo } S = \begin{cases} 9x_1+18x_2+20x_3 \leq 180 \\ 9x_1+18x_3+20x_2 \leq 180 \\ 9x_2+18x_1+20x_3 \leq 180 \\ 9x_2+18x_3+20x_1 \leq 180 \\ 9x_3+18x_2+20x_1 \leq 180 \\ 9x_3+18x_1+20x_2 \leq 180 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Notiamo che questo solido è invariante per scambio di variabili.

La funzione da massimizzare immagino sia

$$Z = x_1+x_2+x_3$$

Senza scomodare il semplice si nota facilmente che 11 dolcetti nella razione 3 4 4 (per l'appunto scelti a piacere) sono il massimo e che quota 12 non può essere raggiunta rispettando i vincoli. Si noti che comunque le soluzioni (3 4 4) (4 3 4) (4 4 3) pur dando 11 dolcetti e rispettando i vincoli non danno lo stesso contributo di lassativo. Se invece si conoscessero a priori le associazioni (dolcetto, dose) il politopo diventerebbe una semplice piramide e la soluzione sarebbe 20 dolcetti, con dosaggio 9.

Politopi? Simpleso? Il Capo si è distratto un attimo... Concludiamo quindi con **Galluto**:

Un set costituito da un dolcetto di ciascun tipo vale $20+18+9 = 47$ dosi di lassativo; con tre set di questo tipo (e quindi tre dolcetti di ciascun tipo) arriviamo a 141 dosi.

Non c'è spazio per un quarto set (si arriverebbe a 188 dosi), ma possiamo ancora aggiungere due dolcetti diversi qualsiasi; al massimo comporteranno $20+18 = 38$ dosi, e così arriviamo a 11 dolcetti e alle fatiche 179 dosi.

Qualsiasi combinazioni di 12 o più dolcetti comporta il rischio di sfondare quota 180. Quindi siamo a posto, non abbiamo avvelenato i ragazzini e abbiamo fatto lo stesso a tutti lo scherzetto con il dolcetto. Andiamo avanti.

5.2.2 Dov'è la festa?

Un problema di taglio delle torte! Quanto tempo che non ne avevamo uno! Ecco qui:

Ci sono 100 invitati, e voi tagliate la torta per la coda degli altri 99 utenti: il primo in coda riceve l'1% della torta, il secondo riceve il 2% della torta restante, ... e avanti in questo modo sin quando il centesimo riceve il 100% della torta restante. Voi potete decidere in che punto della coda piazzarvi: dove vi mettete? E qual è la differenza tra la fetta più grande e quella più piccola?

Siete pronti? Qui si capisce proprio che il Capo è un Gran Teorico: cento fette di torta? Ma quanto saranno piccole? Vediamo subito come lo ha risolto **Valter**:

Penso che il problema si può risolvere con la seguente relazione di ricorrenza:

$$- g(0) = 0.01 \cdot 100$$

$$- g(1) = 0.02 \cdot (100 - g(0))$$

$$- g(2) = 0.03 \cdot (100 - g(0) - g(1))$$

$$- g(3) = 0.04 \cdot ((100 - g(0) - g(1) - g(2)))$$

- ...

$$- g(99) = 1.00 \cdot ((100 - g(0) - g(1) - g(2) - \dots - g(98))).$$

Non sono riuscito a ricavare una formula chiusa che dia tale sequenza numerica. Ho perciò scritto un programma in Python3, che facesse i calcoli per conto mio: <https://drive.google.com/file/d/1mL-vDzAFj0vBRp7BI9WS68afuZ8Oivrb/view?usp=sharing>

La fetta più grande risulta la decima: 6.2815650955529465% dell'intera torta. La fetta più piccola è invece l'ultima: $9.332621544394437e-41\%$, ...una briciola.

Allego un programma che non usa una vera e propria formula chiusa, ...ma quasi: <https://drive.google.com/file/d/1DryAEfGIsDo9DYnycamxMgZBv91Z0lqU/view?usp=sharing> (fornisce le dimensioni di tutte e 100 le fette di torta, senza iterazioni).

Vi abbiamo lasciato in chiaro i link per il suo codice, non ci prendiamo nessuna responsabilità però. **Alberto R.** concorda con le fettine minuscole:

L'ennesima fetta è una frazione dell'intera torta pari a

$$F(n) = (n/100) \cdot 0,99 \cdot 0,98 \cdot 0,97 \cdot \dots \cdot [1 - (n-1)/100]$$

Da cui si ricava che il rapporto tra due fette consecutive è

$$F(n+1)/F(n) = (n+1)/n \cdot (1-n/100)$$

Per $n < 10$ questo rapporto è > 1 il che significa che, al crescere di n , le fette diventano sempre più grandi, mentre per $n > 10$ il rapporto è < 1 cioè le fette decrescono. Quindi il massimo si ha per $n=10$ e vale

$$F(10) = 6,282\%$$

La fetta minima è praticamente inesistente perché al crescere di n le fette tendono rapidamente a dosi omeopatiche, fino alla centesima che è dell'ordine di 10^{-42}

Ecco, la torta omeopatica è una cosa tristissima. **Gas** risolverebbe la cosa avendo una torta enorme, probabilmente:

Senza perdere di generalità possiamo indicare la torna iniziale di dimensione pari a "100" e possiamo definire le due serie seguenti:

- $P(n)$ definita come la grandezza della fetta che tocca all' n -esimo invitato

- $T(n)$ definita come la porzione di torta rimanente dopo che l' n -esimo invitato ha preso la sua torta

Dalle definizioni si ha:

$$P(n)=T(n-1)*n/100 \quad \text{per } 0 < n \leq 100 \quad [1]$$

$$T(n)=T(n-1)-P(n) \quad \text{per } 0 < n \leq 100 \quad [2]$$

Con le seguenti condizioni iniziali:

$$P(0)=0$$

$$T(0)=100$$

Obiettivo del problema è trovare il valore di n per cui si massimizza la $P(n)$.

Innanzitutto, cerchiamo di risolvere la $T(n)$ in forma chiusa. Sostituendo la [1] nella [2] si ha:

$$T(n) = T(n - 1) - T(n - 1) \cdot \frac{n}{100} = T(n - 1) \cdot \left(1 - \frac{n}{100}\right) \quad [3]$$

e ripetendo iterativamente si ha:

$$T(n) = T(0) \cdot \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{i}{100}\right) = 100 \cdot \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{i}{100}\right) \quad [4]$$

Che, culinarmente, si legge dicendo che quando tocca all' n -esimo invitato gli resta una torta pari al 99%*98%*97%*... della torta iniziale.

Sostituiamo la [4] nella [1] ed otteniamo:

$$P(n) = n \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{100}\right) \quad [5]$$

La funzione $P(n)$ è quindi composta dal termine “ n ”, che ovviamente cresce linearmente al crescere di n , ed il prodotto successivo che invece è un termine strettamente decrescente considerato che i valori $(1-i/100)$ sono sempre minori di 1. La funzione $P(n)$ quindi inizialmente cresce dominata dal primo termine ma poi il secondo termine diventa preponderante e quindi $P(n)$ comincerà a scendere.

Questo si legge, culinarmente, dicendo che i primi prendono fette di torta sempre più grandi fino ad un massimo (proprio il valore che stiamo cercando!) e poi le fette di torta cominceranno a diventare sempre più piccole fino al 100esimo che avrà porzioni atomiche... Questo era anche abbastanza intuitivo considerando che le percentuali delle fette crescono sempre ma su pezzi della torta (rimanente) che è sempre più piccola: inizialmente le fette crescono ma poi cominceranno a decrescere.

Ma come si massimizza la [5] senza scomodare excel?

Abbiamo detto che la $P(n)$ sale, raggiunge un massimo e poi comincia a scendere. La salita di $P(n)$ si ferma, e quindi raggiunge il suo massimo, quando:

$$P(n + 1) < P(n)$$

da cui:

$$\frac{P(n + 1)}{P(n)} < 1$$

da cui, inserendo la [5]:

$$\frac{(n + 1) \cdot \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{i}{100}\right)}{n \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{100}\right)} < 1$$

Semplificando i primi $(n-1)$ termini delle due produttorie a Numeratore e Determinatore abbiamo:

$$\frac{(n + 1) \cdot \left(1 - \frac{n}{100}\right)}{n} < 1$$

e risolvendo si ottiene:

$$n^2 + n - 100 > 0$$

che ha le due soluzioni $n=9,51+$ e $n=-10,51+$, la seconda soluzione è ovviamente da scartare in quanto nel nostro problema n è positivo. Ricordiamo però che n deve anche essere un numero intero e quindi i “candidati” sono $n=9$ e $n=10$.

Sono valori di n sufficientemente piccoli per permetterci il calcolo preciso:

$$P(9) = 9 \cdot \prod_{i=1}^9 \left(1 - \frac{i}{100}\right) = 9 \cdot 99\% \cdot 98\% \cdot 97\% \cdot 96\% \cdot 95\% \cdot 94\% \cdot 93\% \cdot 92\% \cdot 91\% = 6,21 +$$

$$P(10) = 10 \cdot \prod_{i=1}^{10} \left(1 - \frac{i}{100}\right) = 10 \cdot 99\% \cdot 98\% \cdot 97\% \cdot 96\% \cdot 95\% \cdot 94\% \cdot 93\% \cdot 92\% \cdot 91\% = 6,28 +$$

Il massimo si ottiene quindi posizionandosi in decima posizione. Ed avendo definito come “100” la dimensione totale della torta sappiamo che la fetta più grande, che ci pappiamo, è il 6,28% dell’intera torta.

Tutte queste fette di torta mi hanno ricordato una vecchia storiella (nerd):

Tre amici si dividono in parti uguali una torta ed il primo fa notare che ognuno ha preso lo 0,333.. della torta iniziale ma che $3 \cdot 0,333... = 0,9999...$

“E dove è finita la parte di torta che manca per arrivare ad 1?”, chiede il secondo.

“È sicuramente rimasta sul coltello”, sottolinea il terzo.

Ecco, la torta rimasta sul coltello è adesso non solo omeopatica, è addirittura atomica. La tristezza cresce. Vediamo come **Galluto** raggiunge lo stesso risultato:

Generalizzo subito; chiamo I il numero di Invitati (con il primo della coda che prende un I-esimo della intera torta, il secondo che prende due I-esimi di quello che è rimasto, ...) e N la posizione ideale nella coda:

$$N = \frac{1 + \sqrt{1 + 4I}}{2}$$

poiché la soluzione deve essere un numero intero, se I non è tale per cui il valore sotto radice è il quadrato di un intero dispari (ad esempio, $I = 30$), occorrerà vedere se è meglio $\text{Int}(N)$ o $\text{Int}(N)+1$.

Vado a spiegare: la dimensione della fetta di un invitato è data dal prodotto di due fattori:

- Il numero di I-esimi che prende, che cresce sempre, ma a un tasso sempre più lento man mano che la coda avanza (dal primo al secondo raddoppia, dal secondo al terzo cresce solo del 50%, ...)
- La quantità di torta lasciata dall’invitato precedente (e da tutti quelli ancora prima), che decresce sempre, e sempre più velocemente

Finché il tasso di crescita del primo fattore è più grande del tasso di decrescita del secondo, la dimensione della fetta aumenta; quando diventa più grande il tasso di decrescita, la fetta comincia a rimpicciolirsi, fino a diventare di dimensioni infinitesimali per gli ultimi in coda.

Il posto ideale in coda è quindi quando i due tassi si eguagliano; cioè quando:

$$\frac{N}{N-1} = \frac{\text{Torta residua}(N-1)}{\text{Torta Residua}(N)} \quad (1)$$

Ma quanto vale la Torta Residua che trova l’x-simo in coda?

Quella che trova il secondo è $I-1$, che però preferisco scrivere come $\frac{I \cdot (I-1)}{1}$

Quella che trova il terzo è $\frac{I \cdot (I-1) \cdot (I-2)}{1^2}$

Quella dell’x – simo è $\frac{I \cdot (I-1) \cdot (I-2) \cdot \dots \cdot (I-x+1)}{1^{x-1}}$ e cioè $\frac{I!}{(I-x)! \cdot 1^{x-1}}$

E quindi la (1) diventa:

$$\frac{N}{N-1} = \frac{\frac{I!}{(I-N+1)! * I^{N-2}}}{\frac{I!}{(I-N)! * I^{N-1}}} = \frac{(I-N)! * I^{N-1}}{(I-N+1)! * I^{N-2}} = \frac{I}{I-N+1}$$

Che porta a $N^2 - N - 1 = 0$ e infine (scartando la soluzione negativa) a:

$$N = \frac{1 + \sqrt{1 + 4I}}{2}$$

Per $I = 100$, la formula dà $N = 10,5125\dots$ e tra 10 ed 11 è meglio $N = 10$, con una fetta di 6,28... centesimi.

Torta omeopatica, atomica, infinitesimale. Tristezza esponenziale. Per fortuna che i festeggiamenti per questo compleanno sono tutti virtuali, e così le porzioni di torta ce le immaginiamo come vogliamo noi. Godetevi questo mese delle febbri e giocate ancora un po' con noi, magari vi siete assicurati la fetta di torta più grande solo per il fatto di essere venuti alla festa. Alla prossima!

6. Quick & Dirty

Il candidato indichi la risposta corretta alla domanda inespressa:

1. Tutte le seguenti
2. Nessuna delle seguenti
3. Alcune delle seguenti
4. Tutte le precedenti
5. Nessuna delle precedenti.

7. Pagina 46

Prima parte

Se $A=(x, y)$ è un qualsiasi punto di K , sia $A'=(x/2, y/2)$; si vede facilmente che A' deve giacere sul segmento OA , e che $OA'=OA/2$.

Applicando la trasformazione $A \rightarrow A'$ a tutti i punti di K , otteniamo un insieme K' simile a K con un rapporto $1/2$; dato che l'area di un insieme è proporzionale al quadrato delle sue dimensioni lineari, se S rappresenta l'area dell'insieme si ha che $S(K')=S(K)/4$.

Per ipotesi, $S(K)>4$, e quindi $S(K')>1$. Dal Lemma di Blichfeldt¹³ si ha che K' contiene due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) tali che x_2-x_1 e y_2-y_1 siano interi; per costruzione di K' , i punti $A=(2x_1, 2y_1)$ e $B=(2x_2, 2y_2)$ sono in K ; ma essendo K simmetrico rispetto a O , contiene anche il punto $C=(-2x_1, -2y_1)$ immagine speculare di A rispetto a O . Ma essendo K convesso, contiene il punto medio P del segmento CB . Le coordinate di P sono:

$$\left(\frac{-2x_1+2x_2}{2}, \frac{-2y_1+2y_2}{2} \right) = (x_2-x_1, y_2-y_1)$$

Essendo x_2-x_1 e y_2-y_1 interi, P è un punto del reticolo.

Si noti che, essendo K simmetrico rispetto all'origine, conterrà anche un punto Q simmetrico rispetto all'origine di P , anch'esso appartenente al reticolo; quindi, K contiene almeno due punti appartenenti al reticolo.

Seconda parte

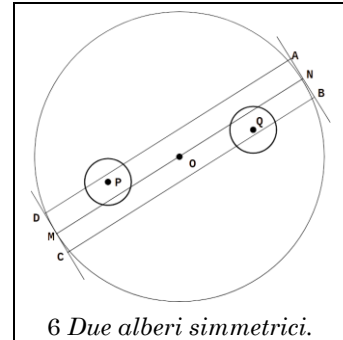
Mostriamo per prima cosa che se il raggio ρ degli alberi è maggiore di $1/50$, allora la vista da O sarà bloccata in tutte le direzioni.

Tracciamo una linea arbitraria passante per O che intersechi la circonferenza del frutteto in M e N , e dimostriamo che non ci sono spiragli negli alberi sia in direzione OM che in

¹³ Lo abbiamo dimostrato nel BJ&P46 di RM302.

direzione ON: per provare questo, tracciamo le tangenti alla circonferenza in M e in N, e le linee AD e BC di lunghezza uguale e parallele a MN ad una distanza ρ da questa.

Otteniamo un rettangolo ABCD di area $AB \cdot MN = 100 \cdot 2\rho = 4 \cdot 50\rho$ e quindi maggiore di 4 (visto che $\rho > 1/50$). Dal Teorema di Minkowsky dimostrato nella prima parte segue che ci sono almeno due punti P e Q all'interno del rettangolo che sono simmetrici rispetto a O.



6 Due alberi simmetrici.

Gli alberi piantati in P e Q intersecano i raggi OM e ON, quindi non è possibile, per un osservatore in O, vedere al di fuori del frutteto in nessuna delle due direzioni.

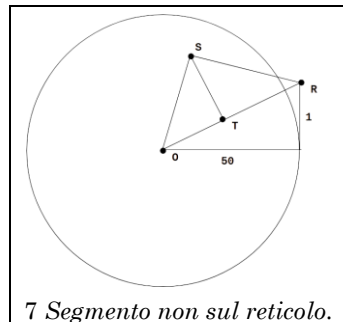
Mostriamo ora che se $\rho < 1/\sqrt{2501}$ è possibile vedere al di fuori del frutteto da O.

Sia R il punto avente coordinate (50,1): dimostriamo che il segmento OR non interseca alcun albero.

Evidentemente non ci sono punti del reticolo su OR oltre agli estremi O e R; si ha inoltre che:

$$OR = \sqrt{50^2 + 1^2} = \sqrt{2501}$$

Sia allora S un qualsiasi punto del reticolo all'interno del frutteto: sempre per quanto visto nel BJ&P46 di RM302, l'area del triangolo ORS vale almeno 1/2.



7 Segmento non sul reticolo.

Se T è il piede della perpendicolare a OR per S, allora l'area di ORS vale:

$$S(ORS) = \frac{OR \cdot ST}{2}$$

e quindi:

$$\frac{OR \cdot ST}{2} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow ST \geq \frac{1}{OR} = \frac{1}{\sqrt{2501}} > \rho$$

Il che significa che l'albero con raggio ρ con centro in S non interseca OR, e quindi è possibile vedere al di fuori del frutteto guardando verso R.

8. Paraphernalia Mathematica

Pezzo breve, questa volta, visto che la prima idea era di farne un problema.

Poi, tanto per cominciare abbiamo pensato che i problemi del tipo “Dimostrate che...” non sono mai una gran cosa e, secondariamente, secondo qualcuno questa dimostrazione viene “dal Libro”, come diceva Erdős. Comunque, ci pare un risultato interessante: lasciamo alla vostra fantasia trovare eventuali applicazioni.

A quanto sappiamo, il teorema e la sua dimostrazione sono dovuti a **G. Galperin**, del quale conosciamo l’iniziale del nome, il cognome e basta.

8.1 Like a Rolling Stone

Enunciato:

Un ottagono regolare viene fatto rotolare sul piano capovolgendolo ogni volta su uno qualsiasi dei suoi lati¹⁴.

Dimostrate che esiste sempre una sequenza tale che il centro dell’ottagono termini all’interno di un cerchio dato di raggio arbitrariamente piccolo.

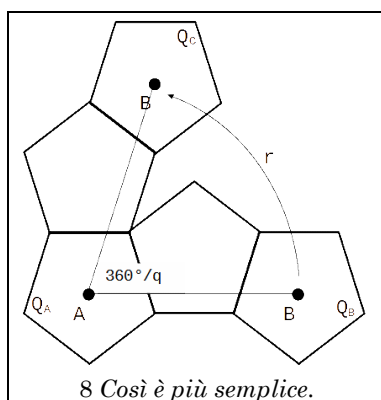
Dimostrate il teorema equivalente per il pentagono regolare.

Per quali valori di q il teorema è valido per un q -agono?

Le prime due parti possono essere dimostrate specificatamente partendo alcune estensioni poco note del principio della piccioniaia (ne parleremo, prima o poi, tranquilli), ma visto che nella terza parte dovremo comunque generalizzare, tanto vale partire direttamente dalla forma più generale. Ma cominciamo con il definire qualche notazione.

Sia Q la posizione iniziale del q -agono regolare e sia O il suo centro. Indichiamo come Q_A il q -agono (con centro in A) ottenuto da Q per traslazione secondo il vettore OA . Due punti A e B sono detti **connessi** se il poligono Q_A può essere fatto rotolare (secondo il metodo descritto nel problema) sino a sovrapporsi a Q_B : chiamiamo la sequenza dei rotolamenti *traccia* AB (estremi inclusi, quindi anche Q_A e Q_B).

Notiamo che se q è dispari, allora la traccia AB è formata da un numero *dispari* di poligoni: questo in quanto in questo caso un singolo rotolamento porta a un poligono ruotato di 180° rispetto al poligono iniziale, e quindi solo un numero pari di rotolamenti ricostruisce l’orientamento iniziale del poligono: *deve* tornare nell’orientamento iniziale, dato che da definizione il poligono finale va ottenuto per semplice *traslazione* del poligono iniziale: nessuna rotazione!



Definiamo allora come **accessibili** i punti connessi a O : evidentemente due punti A e B entrambi connessi a O sono connessi tra di loro (nella peggiore delle ipotesi, possiamo costruire una traccia da A a O e da O a B) e, al contrario, ogni punto B connesso a un punto accessibile A è accessibile.

A questo punto, ci sono due teoremi dall’aria abbastanza innocua: il primo sostiene che *se A e B sono accessibili e C è ottenuto da B attraverso una rotazione r di $360^\circ/q$, allora C è accessibile*. Infatti, la rotazione r porta Q_A su sé stesso, e ogni traccia AB (che esiste, visto che A e B sono connessi) viene trasformata, sempre attraverso r , in una traccia AC : quindi, C è connesso a un punto accessibile A . Il secondo

invece dichiara che *se A , B e C sono accessibili, allora la traslazione t secondo il vettore AB porta C in un punto accessibile D* . Questo si dimostra facilmente considerando la traccia AC e notando che la nostra traslazione porta Q_A e Q_C in Q_B e in Q_D e porta la traccia AC

¹⁴ O , se preferite, viene riflesso utilizzando come linea di riflessione uno dei suoi lati.

nella traccia BD , e quindi B è connesso ad un punto accessibile B : questo, evidentemente, è valido anche per la traslazione BA .

Proviamo ora che per $q \geq 7$ ogni cerchio contiene un punto accessibile al suo interno.

Sia ε il raggio del cerchio: prendiamo due qualsiasi punti accessibili A e B e costruiamo C come specificato dal primo teorema: in questo caso, si ha:

$$BC/AB = k = 2\sin(180^\circ/q) < 2\sin 30^\circ = 1$$

Applicando la stessa costruzione di A e B a B e C , otteniamo due punti accessibili C e D tali che:

$$CD = kBC = k^2AB$$

A questo punto, applichiamo la stessa costruzione a C e D e avanti in questo modo, sin quando non otteniamo due punti X e Y tali che:

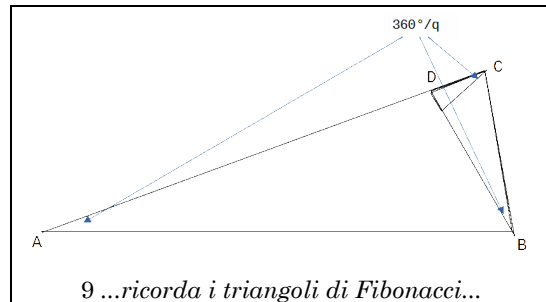
$$XY = k^n AB < \varepsilon$$

otteniamo anche il successivo punto Z nella sequenza, tale che $XZ=XY$ e che l'angolo ZXY sia pari a $360^\circ/q$. Applicando allora ripetutamente il secondo teorema ai punti X, Y, O e ai punti X, Z, O vediamo che un qualsiasi numero di traslazioni attraverso i vettori $XY, -XY=YX, \pm XZ$ (o, se preferite, una qualsiasi traslazione secondo il vettore $nXY+mXZ$, con n e m interi relativi) porta O in un punto accessibile. Questi vettori generano un reticolo romboidale nel quale il lato dei rombi è minore di ε : il centro del cerchio sarà all'interno di un rombo e si vede che la distanza di un vertice dal centro del cerchio è minore di ε ; quindi, questo vertice giace all'interno del cerchio e, essendo ogni nodo della griglia accessibile, la tesi è dimostrata.

Per $q=5$, possiamo prendere due punti accessibili A e B , ruotare B con centro in A di $3 \cdot 360^\circ/q = 216^\circ$ per ottenere un punto accessibile P e traslare A di PA : questo ci porta a un punto accessibile C che può essere, in alternativa, costruito ruotando B di $216^\circ - 180^\circ = 36^\circ = 360^\circ/10^\circ$: quindi, in questo caso, possiamo applicare lo stesso argomento per $q=10$.

Per $q=3, q=4$ e $q=6$, visto che il rotolamento produce una griglia di centri dei poligoni rispettivamente esagonale, quadrata o triangolare, l'assunto è ovviamente sbagliato, quindi la risposta alla terza domanda è $q=5$ oppure $q \geq 7$.

Dato tutto ciò, trovare qualche applicazione interessante...



Rudy d'Alembert

Alice Riddle

Piotr R. Silverbrahms