A proposito di aeroplanini

di

Caronte

con una

Introduzione di Piotr R. Silverbrahms

e

in Appendice “Suite in Re Maggiore” di Sam.

Revisione **1.2**	*Codice* **RMB-BSH-008**
Data **200503242209**	*Autore* *Caronte*
Pagine **28**	*Titolo* **Aeroplanini**

Indice

Introduzione

Sui matematici c'è una cosa che la maggior parte dei non addetti ai lavori ignora, anche se è assai ben nota nella cerchia dei professionisti. Anzi, il punto sorprendente non sta tanto nel fatto che i non addetti non siano a conoscenza di particolari noti solo agli iniziati (il mio giornalaio vive benissimo anche senza conoscere le condizioni di olomorfismo di Cauchy-Riemann e l'amministratore delegato della società che mi passa lo stipendio non si sogna neppure di interrogarsi anche solo per un istante sul paradosso di Banach-Tarski), perché questo è assolutamente normale. Ciò che sorprende è invece il fatto che i non iniziati credano assolutamente all'esatto contrario della realtà. Presentate un matematico ad un avvocato, e questi gli chiederà subito delle informazioni sullo scorporo dell'IVA, o più direttamente di calcolare a mente quanto viene a testa il conto del ristorante, visto che i commensali erano sette e le divisioni per sette sono notoriamente impossibili. Insomma, non c'è speranza di fargli cambiare idea. "Sei un matematico? Ah, allora sei un drago coi calcoli, scommetto che estrai le radici cubiche nel tempo che io ci metto ad inciampare nelle mie stringhe". È difficile convincerli che la maggior parte dei matematici è più interessata (se proprio deve scegliere) alla topologia delle stringhe che riescono a far inciampare gli avvocati, piuttosto che all'estrazione a mente di radici cubiche. Niente da fare, è davvero impossibile, ve lo assicuro; ma anche se gli addetti ai lavori non ci crederanno mai, la verità è che i matematici odiano contare.

È in quest'odio subdolo e profondo che, probabilmente, trova alimento e rifugio quel misterioso e fragile principio dell' Induzione Matematica: dopo un po' di ripetizioni o di cicli, la pigrizia dei matematici prende il sopravvento, e procedono per induzione. La cosa di per sé è tutt'altro che priva di rischi, ma la noia mortale della ripetitività è ostacolo insormontabile, per i seguaci di Euclide.

Questo "orrore del contare" è ben misurato dal problema oggetto di questa monografia: è uno dei problemi più celebri di Rudi Mathematici, pubblicato nel lontano Dicembre 1999 (RM011) con il titolo "Problema di un altro Rudolph", ma ormai più noto con l'abbreviativo di "Aeroplanini". In ultima analisi, il problema non chiede altro che di contare: certo, alla fin fine sempre una Rivista di Matematica siamo, e non è che ci si poteva limitare di chiedere di contare da uno a tredici… è un bel contare, quello richiesto, ma niente più che contare. Eppure abbiamo sollevato un vespaio. Il problema è rimasto a lungo irrisolto, anche se, in un modo o nell'altro, il "numero" richiesto dal problema ha visto la luce relativamente pochi numeri dopo la pubblicazione del quesito: ma le argomentazioni che lo giustificavano erano poche o assenti. Si sono allora accavallate ipotesi da parte dei lettori (e talvolta anche dei redattori stessi) per risolvere il problema con un metodo accettabile (laddove "accettabile", in questo caso, significava di fatto "contando il meno possibile").

Il problema ha campeggiato a lungo (e lo fa tuttora, a meno che quegli sfaticati dei redattori non si siano degnati di aggiornare finalmente quella pagina web, ma ne dubitiamo fortemente) nella sezione "Duri da Cuocere" del sito ufficiale di RM. Un bel giorno, finalmente, ottenemmo una buona soluzione da parte di una delle più giovani promesse di RM: Sam, che a quei tempi era ancora liceale. La sua soluzione fu pubblicata in pompa magna nel numero 50 di RM (Marzo 2003), e ci stupì molto che la soluzione fosse così insolitamente evoluta da punto di vista letterario: anzi, più che letterario, musicale. Sam scrisse infatti una "Suite in **R**(e) **M**(maggiore)", argomentando il problema degli aeroplanini alla maniera di J.S. Bach, con una autentica suite orchestrale completa di ciaccona e di allemanda.

Questa soluzione ci pose un interrogativo niente male: è possibile che, per sfuggire all'attanagliante paura della pigrizia e della ripetitività, i novelli matematici non solo si mettano alla ricerca di brillanti scorciatoie per evitare i conteggi, ma che le accompagnino pure con delle creazioni artistiche per rendere la dimostrazione ancora più piacevole? Se la risposta a questa domanda fosse stata positiva, avremmo ottenuto dei risultati importantissimi: avremmo avuto conferma della creatività insita nei matematici, avremmo alimentato la teoria della creatività artistica come difesa contro la noia, insomma, saremmo riusciti a mostrare un legame diretto e incontrovertibile tra la noia matematica, il genio solleticato dalla pigrizia, e l'opera d'arte come difesa del genio stesso. Insomma, roba da tenere occupati i filosofi (dagli esteti agli epistemologi) per una ventina d'anni.

Ma ci occorreva una controprova: conosciamo abbastanza distribuzioni statistiche da poter provare a spacciare un campione di ben due elementi come una base dati accettabile, ma non ce la facciamo proprio se il campione suddetto di elementi ne ha uno solo. Cercammo allora il candidato ideale per cotanta verifica: doveva essere quanto più lontano possibile da Sam, fatta eccezione per il genio e la capacità di praticare i meandri oscuri della matematica. Se Sam era un giovane liceale non-ancora-universitario, il novello solutore doveva essere da tutt'altra parte della carriera e della barricata, il che limitava drasticamente il campione di scelta. Se Sam era musicologo, questo doveva avere interessi musicali assenti (quantomeno, non noti ai redattori). Se Sam era giovanissimo e guardava a noi come uno studente guarda ai professori (facendo così un errore clamoroso, anche se probabilmente inevitabile, causa l'anagrafe), questo doveva guardare a noi come si guarda ai dei trovatelli imberbi accasciati sull'ultimo banco delle matricole.

Insomma, specie dopo aver constatato l'ultimo requisito, non è passato un secondo che ci siamo guardati negli occhi e abbiamo mormorato all'unisono: "Caronte!"

Non gli abbiamo detto niente, dell'ardita teoria matematica/pigrizia/arte. Gli abbiamo solo chiesto, umilmente, se potesse fare un po' di luce, se fosse in grado di dare il colpo di grazia ad un problema ostico e leggendario, di cui avevamo già una soluzione, ma del quale ci sarebbe piaciuta averne un'altra. Neanche un accenno alla letteratura, neanche ventilato l'accordo di una giga, per non metterlo in sospetto.

Siamo rimasti assai interdetti, quando le comunicazioni sono cessate. Neanche un sintomo, una voce, una mail distratta: Caronte sembrava sparito. Cominciavamo a preoccuparci, quando invece il silenzio è finalmente cessato, e abbiamo potuto cominciare a preoccuparci davvero: Caronte era sparito per macinare gli aeroplanini, ma era disgustato dal problema. "Come si può essere creativi, con problemi come questi che richiedono solo un gigantesco pallottoliere! Come potete chiedermi una soluzione "elegante", se il problema in sé ha l'eleganza di un ippopotamo seduto sulla cattedra lucasiana che fu di Newton!" . Uh, se ce la siamo vista brutta… abbiamo temuto la fine di una ventennale amicizia, e per consolarci guardavamo timidamente ai pochi segnali positivi implicati in cotanto scatto d'ira. Primo: Caronte ci stava (più nolente che volente, ma comunque…) lavorando. Secondo: era palesemente annoiato. E nel nostro piano, la noia era elemento che attendevamo, per poi vederla cedere sotto la pigrizia, e poi, magari, confermare il passaggio finale dalla pigrizia all'arte… Ah, se solo il cerchio si fosse chiuso.

Aspettammo ancora poco. Accompagnato da qualche rampogna finale, ci giunse finalmente il documento che orgogliosamente inseriamo nella nostra Bookshelf. E, già che ci siamo, vi informiamo ufficialmente che la teoria da noi avanzata è provata. Sam, musicista, si è a suo tempo difeso dalla noia dei conteggi con la musica, rivelando così che il suo intimo è forse più musicista che matematico. Caronte, invece, non è musicista: ciò che la sua soluzione ci ha rivelato ci ha riempito di stupore, ma solo fino ad un certo punto… in fondo, sospettavamo da tempo queste sue caratteristiche. Anche lui si è rifugiato nella forma artistica che gli è più consona, e si è rivelato esattamente per quello che è (o, almeno, per quello che crede di essere);

insomma, per… Vabbè, inutile anticiparlo, no? Basta girare pagina, e leggerlo direttamente dalla sua prosa. Il suo stile (anzi, il Suo Stile) di narrazione è universalmente noto, e quindi riconoscibilissimo…

Piotr R. Silverbrahms

A Marguerite

A proposito di aeroplanini

1 Più di un milione di miliardi di aeroplanini volano nel cielo

C'era una volta un essere che aveva a disposizione tutto il tempo che voleva ed era affetto da molte strane manie. Tra queste il creare oggetti volanti, detti familiarmente aeroplanini, numerandoli progressivamente, utilizzando, vai a sapere perché, una numerazione in base dieci. Siccome non voleva esagerare col numero di oggetti volanti con cui avrebbe popolato il cielo, decise di porsi un limite e, poiché aveva una mente effervescente e prefiggersi di farne solo un certo numero N gli sembrava troppo banale, stabilì che avrebbe smesso di costruire aeroplanini quando il numero di una qualsiasi delle cifre necessarie per numerare tutti gli aeroplanini fatti fino ad allora avesse superato il doppio del numero degli aeroplanini creati. Più precisamente, decise di assegnarsi, per ogni aeroplanino costruito, due serie complete delle cifre usate per la numerazione, di utilizzarle per numerare l'oggetto appena costruito e di conservare accuratamente tutte le cifre non immediatamente utilizzate, per poterle usare in futuro, e di abbandonare la costruzione quando, dopo aver creato e numerato l'aeroplanino numero N, non fosse più riuscito a scrivere il numero $N+1$ usando e le cifre avanzate dalle $2N$ serie di cifre avute per la numerazione da 1 ad N degli oggetti creati e le due ulteriori serie di cifre che si era concesso per ogni oggetto volante che potesse creare. Non chiedetevi quale processo mentale ci fosse dietro questa limitazione; è inutile: non si entra nella mente di Dio ed è peccato anche il solo cercare di farlo. Quindi accettate la limitazione così com'è e come lui se l'era imposta.

Fatto sta ed è che si mise pazientemente al lavoro. Come primo oggetto volante costruì un coso rosso, con molte ali fiammeggianti, che, munito del numero 1, cominciò a svolazzargli intorno: gli piacque, lo chiamò cherubino e conservò accuratamente le 19 cifre non utilizzate. Soddisfatto della prima creazione, la replicò per molti esemplari i quali, festosi, gli fecero corona intorno al capo. E intanto le cifre avanzate aumentavano.

Dopo un po' i cherubini gli vennero a noia e cominciò a creare aeroplanini con forme nuove che battezzò coi nomi di serafini, angeli, arcangeli, troni, dominazioni, demoni, creando e numerando così qualche migliaio di esseri alati, senza incontrare nessun problema di numerazione. E le cifre accantonate aumentavano, aumentavano. "Ehi", si disse, "qui mi ci vorrà un po' di tempo, per completare l'opera!" e cominciò a creare a bizzeffe oggetti meno sofisticati; fece migliaia e migliaia di pterodattili, vampiri, avvoltoi, aquile, marabù, fenicotteri, tucani, cicogne, aironi, pellicani, oche, tacchini, anatre e così via, aeroplanini di centinaia e centinaia di diverse specie, tutti accuratamente numerati. E la sua scorta di cifre continuava a crescere, a crescere, a crescere.

Un po' preoccupato cominciò a diminuire le dimensioni dei suoi aeroplanini e ad aumentarne il numero delle copie: inventò e riprodusse a milioni: passeri, rondini, capinere, pettirossi, verdoni, cardellini, merli, colibrì, cinciallegre, ..., continuando a passare il suo tempo a creare e a numerare. E più si sforzava e più le scorte di cifre aumentavano, aumentavano, aumentavano. "Ehi", si disse, "qui rischia davvero di diventare lunga!"". Ma era un essere che rispettava gli impegni presi con se stesso (con gli altri non si sa). Diminuì ancora le dimensioni delle creature che faceva e cominciò ad immettere nell'aria miliardi e miliardi di coleotteri, imenotteri, lepidotteri, ditteri, sempre religiosamente numerati.

Verso la decina di miliardi di pezzi creati e numerati, notò che le ormai immense scorte di cifre cominciavano a crescere con un ritmo più lento e, ad un certo punto, si accorse che si era stabilito un certo equilibrio tra il numero delle cifre che accantonava e quello delle cifre che prelevava. Si disse: “Ma, allora, ce la farò!”; esultante ed eccitato si rimise all’opera e creò frenetico aeroplanini di ogni tipo: cavallette a decine di miliardi, moscerini a centinaia di miliardi, zanzare a migliaia di miliardi, batteri a centinaia di migliaia di miliardi. E le scorte finalmente cominciavano a diminuire, a diminuire.

Arrivato verso il milione di miliardi di pezzi immessi nell’aere, cominciò a fare una certa fatica a trovare le cifre che gli servivano, che doveva prelevare dalle scorte in numero sempre crescente. Man mano che procedeva nella creazione e numerazione dei suoi aeroplanini, si accorse che i suoi prelievi di cifre avvenivano un po’ come ad ondate successive e che per ogni ondata le prime cifre a cui doveva fare ricorso erano gli uno.

Finalmente, prima di raggiungere i due milioni di miliardi di pezzi, si ritrovò con: l’ultima creazione (una zanzara), le due serie complete di cifre che gli competevano per quest’ultima fatica e la necessità di numerarla con un numero che prevedeva l’uso di tre cifre uno. Cerca, cerca, di uno nelle scorte non ce ne erano più. “Uffa!”, disse, “ho finito!”, shiacciò la zanzara che non aveva potuto numerare e rimase, con aria inebetita e sentendosi un po’ rincoglionito, a contemplare il risultato del suo improbo lavoro. Senza che quasi se ne fosse accorto, dal tempo del suo primo cherubino erano passati più di dieci miliardi di anni e nel cielo volavano quasi due milioni di miliardi di aeroplanini. E lui ne conosceva il numero esatto: erano un milione novecento-novantanovemila novecentodiciannovemiliardi novecentonovantanovemilioni nove-centonovantanovemila novecentoottanta.

2 Quesito

E noi, pur senza il blasfemo pensiero che possa aver barato, come facciamo ad essere certi che, in un così lungo impegno, non abbia commesso, in un momento di comprensibile distrazione o di inevitabile stanchezza, un pur minimo errore? la perdita, non subito avvertibile nella enorme massa delle scorte, di qualche piccolo numero di cifre? o il più che probabile salto o l’altrettanto probabile ripetizione di un numero d’ordine? Per avere una tale certezza esiste un unico modo: procurarsi il numero esatto a cui si sarebbe dovuto fermare rispettando le regole del gioco e confrontarlo con quello citato. Non avendo a disposizione lo stesso tempo di cui lui ha potuto fruire, non possiamo però pensare di seguire il metodo istintivo e brutale che dice: *“scrivo la sequenza dei numeri naturali, per ogni tipo di cifra conto il numero di cifre man mano utilizzate e quando uno di questi numeri abbia superato il doppio del valore del numero scritto so che il numero precedente era quello a cui mi dovevo fermare”.* Infatti, anche non volendo accettare, come atto di fede, il risultato enunciato, del fatto che si tratti di un numero piuttosto grossino, dell’ordine di un milione di miliardi o giù di lì, gli possiamo dare certamente credito. Il solo pensare di poter contare una simile quantità di numeri è terrificante al punto da bloccar sul nascere l’iniziativa: la cosa non è certo possibile nel breve lasso di tempo occupato da una vita umana, per longeva che possa essere!

Riesaminiamo dunque il problema e cerchiamo di trovare un metodo sensato per conoscere il numero in questione. Il problema può essere formulato nella seguente maniera, che è in effetti quella in cui esso venne presentato, tanto tempo fa, sul numero 11 di RM. *Un costruttore di aeromodelli trova, in ogni scatola di costruzioni contenente un singolo modello, due serie complete delle dieci cifre, da zero a nove, da utilizzare per la numerazione consecutiva dei modelli costruiti; numerato ogni singolo modello, conserva accuratamente le cifre non utilizzate, per potersene eventualmente* *servire per la numerazione di modelli successivi; non può però aprire scatole contenenti ulteriori modelli e le relative coppie di serie di cifre fino a quando non ha terminato la costruzione del modello precedente, completo del suo corretto numero d'ordine. Si vuole sapere quale sarà il primo aeroplanino che, rispettando le regole, non riuscirà più a numerare.*

Formalizzando il problema, se indichiamo con $F_C(N)$ il numero di cifre di tipo C ($C = 0, 1, ..., 9$) necessario per scrivere tutti i numeri da 1 ad N, e teniamo conto del fatto che il numero di cifre di tipo C avute in dotazione per scrivere tutti i numeri da 1 ad N è lo stesso per ogni C e vale $2N$, si tratta di determinare il più piccolo dei numeri N per i quali si abbia

$$F_C(N) \le 2N\ ,\ F_C(N+1) > 2(N+1),\ \ C = 0,\ 1,\ ...,\ 9,$$

per almeno una delle dieci cifre. Chiaramente il numero N così determinato è quello che identifica l'ultimo aeroplanino che può essere numerato.

3 Semplificazione e riformulazione del quesito

È quasi ovvio che, procedendo con una numerazione ordinata, le disuguaglianze scritte saranno soddisfatte per la prima volta per la funzione $F_1(N)$, cioè che sarà il numero di cifre 1 quello di cui si sentirà una carenza. Infatti, pur essendo, alla lunga, tutte le cifre utilizzate uno stesso numero di volte in una numerazione ordinata[1] e dato che gli zeri in prima posizione giocano un ruolo muto e non vengono scritti, è la cifra uno quella che, ad ogni cambio di ordine di grandezza, è la prima ad essere utilizzata, in prima posizione, in quantità pari all'ordine di grandezza: dei numeri di una cifra l'1 è il primo, i primi dieci numeri di due cifre cominciano con 1, come con 1 cominciano i primi cento numeri di tre cifre, e così via[2].

Ribattezzando $F_1(N)$ con $U(N)$, possiamo riformulare il quesito, in modo semplificato, come segue.

Indicato con $U(N)$ il numero di cifre 1 necessarie per scrivere tutti i numeri da 1 ad N, trovare il primo numero N per cui si abbia

$$U(N) \le 2N\ ,\quad U(N+1) > 2(N+1).$$

La difficoltà della risposta è chiaramente legata alla difficoltà di ottenere la forma esplicita della funzione $U(N)$, per ogni arbitrario valore di N. A tal fine sono necessarie alcune premesse, cui dedicheremo il prossimo paragrafo.

Il nostro problema è un problema che, come già sottolineato, fa riferimento ad una numerazione in base dieci. Poiché, però, per le considerazioni che faremo nelle

[1] Affermazione che, presa alla lettera, non vuole dire nulla, perché i numeri sono infiniti, ecc., ecc., ma diventa chiarissima se interpretata *cum granu salis* e riferita agli insiemi dei primi 10, 100, 1000, ecc. numeri.

[2] Sul numero 13 di RM, in un articolo sull'argomento attribuito ad Alice e firmato Fran, la cosa viene presentata nella seguente maniera, di cui è difficile uguagliare la piacevole chiarezza. *La cifra che si esaurisce per prima è prorio "1". Perché? Il destino che tocca agli "1" è quello dei primi della fila, che non sanno mai il lavoro che gli toccherà fare: cominciano le decine, le centinaia e così via. Le altre cifre fanno poi lo stesso, subito dopo e in successione, ma ad ogni salto di ordine di grandezza (da* n *ad* n+1*) è proprio lei, "1", che deve sudare tutte le sue camicie per accompagnare l'avanzata dei successivi* 10^n *numeri, sempre in prima fila.*

premesse, lavorare con una base di dieci cifre o con una base con un numero arbitrario di cifre, costa esattamente la stessa fatica, faremo riferimento ad una base generica, pensando che questa semplice generalizzazione possa tornare utile anche in altra occasione.

4 Sulle numerazioni e la quantità di cifre utilizzate per numerare

Sia a una arbitraria base di numerazione e, supposto $a \neq 1$, le a cifre usate siano

$$0,1,\dots,z \equiv a-1;$$

il numero a viene scritto come 10 e, conseguentemente $a^n \equiv 10^n$. La sequenza dei numeri naturali è:

$$0,1\dots,z,10 \equiv a,11,\dots,1z,\dots,zz,100 \equiv a^2,101,\dots,zzz,1000 \equiv a^3,1001,\dots\ .$$

Un generico numero N_n (ad $n+1$ cifre) viene scritto come:

$$N_n = C_nC_{n-1}\dots C_2C_1C_0 \equiv C_na^n + C_{n-1}a^{n-1} + \dots + C_1a + C_0 \equiv \sum_{k=0}^{n} C_ka^k\ ,$$

dove il simbolo C_k indica una qualsiasi delle a cifre:

$$0 \le C_k \le z\ , \quad k = 0,1,\dots,n\,.$$

Il quesito cui vogliamo dare risposta è: scrivendo tutti i numeri da 1 ad N_n, quante volte viene utilizzata ognuna della a cifre? Per arrivare ad ottenerla, procediamo per gradi e cominciamo a considerare l'insieme dei {numeri ad m cifre}; questi, inclusi tutti i numeri ad $m-k$ cifre, visti come preceduti da k zeri, sono quelli compresi nell'intervallo chiuso

$$\left(0, a^m - 1\right) \equiv \left(00\dots0, zz\dots z\right)$$

in numero di a^m; per scriverli tutti si utilizzano ma^m cifre ed ognuna delle a cifre, essendo tutte le cifre utilizzate lo stesso numero di volte, viene utilizzata ma^{m-1} volte.

È opportuno notare che l'insieme dei numeri considerato, quello dei numeri di m cifre, può anche essere visto come un sottoinsieme dell'insieme dei numeri ad $m+1$ cifre, immaginando ognuno degli a^m numeri di tale insieme preceduto dalla cifra zero (muta). In tal caso il numero delle cifre utilizzate per scriverlo risulta di $(m+1)a^m$, essendo ogni cifra *diversa da zero* utilizzata ma^{m-1} volte e la cifra zero $ma^{m-1} + a^m$ volte.

La nota precedente è utile per passare dal conteggio dei numeri ad m cifre a quello dei numeri ad $m+1$ cifre. Il primo di essi è a^m, che viene scritto 10^m in ogni numerazione in base $a \neq 1$. L'intervallo chiuso

$$\left(a^m, 2a^m - 1\right) \equiv \left(100\dots0, 1zz\dots z\right)$$

comprende a^m numeri, tutti aventi 1 come prima cifra. Nell'insieme delle $(m+1)a^m$ cifre necessarie per scrivere tutti i numeri dell'intervallo, la cifra 1 compare dunque a^m volte in prima posizione, mentre le ma^m cifre che stanno nelle nelle posizioni successive sono equipartite (come nell'intervallo precedente) e quindi ogni cifra utilizzata ma^{m-1} volte. Nell'intervallo considerato, dunque

- la cifra 1 è utilizzata $a^m + ma^{m-1}$ volte,
- ognuna delle $(a-1)$ cifre $\neq 1$ è utilizzata ma^{m-1} volte.

Cosideriamo poi, dipendentemente dal valore di a, i vari intervalli successivi

$$((k-1)a^m, ka^m - 1) \equiv ((k-1)00...0, (k-1)zz...z), \quad k = 1,...,z;$$

ognuno di essi comprende a^m numeri di $m+1$ cifre, tutti aventi come prima cifra $(k-1)$, che compare quindi a^m volte in prima posizione. Le rimanenti ma^m cifre sono equipartite e quindi

- la cifra $(k-1)$ è utilizzata $ma^{m-1} + a^m$ volte,
- le $(a-1)$ cifre $\neq (k-1)$ sono utilizzate ma^{m-1} volte.

Indicata con C una cifra arbitraria, consideriamo ora l'insieme

$$(0, Ca^m - 1) \equiv (000...0, (C-1)zz...z) = \bigcup_{k=1}^{C} ((k-1)a^m, ka^m - 1),$$

unione di C sottointervalli del tipo appena considerato; come dianzi visto il kappesimo sottoinsieme $((k-1)a^m, ka^m - 1)$, costituito da a^m numeri di $m+1$ cifre, contiene in totale $(m+1)a^m$ cifre: tutte le cifre vengono utilizzate ma^{m-1} volte e la cifra $(k-1)$ ulteriori a^m volte (in prima posizione). Quindi, nell'insieme

$$(0, Ca^m - 1),$$

costituito da Ca^m numeri di $m+1$ cifre, sono contenute in totale $(m+1)Ca^m$ cifre; per costruire tutti i numeri dell'insieme

- le C cifre $\leq C-1$ sono usate $mCa^{m-1} + a^m$ volte,
- le $a - C$ cifre $\geq C$ sono usate mCa^{m-1} volte.

Consideriamo ora un generico numero ad $n+1$ cifre,

$$N_n = \sum_{k=0}^{n} C_k a^k = C_n a^n + \sum_{k=0}^{n-1} C_k a^k,$$

e l'insieme di tutti i numeri contenuti nell'intervallo $(0, N_n)$. Questo può essere separato in due sottoinsiemi, come

$$\left(0, \sum_{k=0}^{n} C_k a^k\right) = (0, C_n a^n - 1) \cup \left(C_n a^n, \sum_{k=0}^{n} C_k a^k\right).$$

Il primo, del tipo appena esaminato, contiene $C_n a^n$ numeri di $n+1$ cifre, per un totale di $(n+1)C_n a^n$ cifre:

- le C_n cifre $\leq C_n - 1$ usate $nC_n a^{n-1} + a^n$ volte,
- le $a - C_n$ cifre $\geq C_n$ usate $nC_n a^{n-1}$ volte;

il secondo,

$$\left(C_n a^n, \sum_{k=0}^{n} C_k a^k \right) \equiv \left(C_n 00 \ldots 0, C_n C_{n-1} C_{n-2} \ldots C_0 \right)$$

contiene, in prima posizione, la cifra C_n un numero di volte pari al numero di numeri compreso tra 0 e il numero $C_{n-1}C_{n-2}\ldots C_0 = \sum_{k=0}^{n-1} C_k a^k$, cioè $\sum_{k=0}^{n-1} C_k a^k + 1$ volte, più tutte le cifre dei numeri compresi nell'insieme $\left(0, \sum_{k=0}^{n-1} C_k a^k \right)$.

Concludendo, le cifre necessarie per costruire tutti i numeri appartenenti all'insieme

$$(0, N_n) \equiv \left(0, \sum_{k=0}^{n} C_k a^k \right) \equiv \left(0, C_n C_{n-1} \ldots C_1 C_0 \right)$$

sono:

- la cifra C_n, per $\sum_{k=0}^{n-1} C_k a^k + 1$ volte,
- le C_n cifre $\leq C_n - 1$, per $nC_n a^{n-1} + a^n$ volte,
- le $a - C_n$ cifre $\geq C_n$, per $nC_n a^{n-1}$ volte
- **più** tutte le cifre necessarie per costruire l'insieme di numeri
$$\left(0, \sum_{k=0}^{n-1} C_k a^k \right) \equiv \left(0, C_{n-1} \ldots C_1 C_0 \right),$$

ottenuto dal precedente eliminando tutti i numeri di $n+1$ cifre che iniziano con C_n.

Il risultato cui siamo arrivati ci permette di contare le cifre, di ogni tipo, necessarie a costruire tutto l'insieme dei numeri minori od uguali ad un dato numero N_n, in modo iterativo, la conoscenza del numero di cifre contenute in $(0, N_n)$ implicando quella del numero di cifre contenute in $(0, N_{n-1})$ e questa quello del numero di cifre contenute in $(0, N_{n-2})$, e così via, fino a quando arriviamo a considerare il penultimo sottoinsieme

$$\left(0, \sum_{k=0}^{2} C_k a^k \right) = \left(0, C_2 a^2 - 1 \right) \cup \left(C_2 a^2, \sum_{k=0}^{2} C_k a^k \right);$$

questo contiene

- la cifra C_2, per $\sum_{k=0}^{1} C_k a^k + 1 \equiv C_1 C_0 + 1$ volte,
- le cifre $\leq C_2 - 1$, per $2C_2 a + a^2$ volte,
- le cifre $\geq C_2$, per $2C_2 a$ volte,
- più le cifre contenute in $(0, C_1 C_0)$;

quest'ultimo insieme viene ancora decomposto come

$$(0, C_1 C_0) = (0, C_1 a - 1) \cup (C_1 a, C_1 a + C_0)$$

e quindi contiene

- la cifra C_1, per $C_0 + 1$ volte,
- le cifre $\leq C_1 - 1$, per $C_1 + a$ volte,
- le cifre $\geq C_1$, per C_1 volte,
- le cifre $\leq C_0$, per 1 volta.

In base a quanto visto possiamo asserire che, dato un arbitrario numero di $n+1$ cifre $N_n = \sum_{k=0}^{n} C_k a^k$, il generico coefficiente C_k della kappesima potenza della base, per ogni $k \neq 0$ ci dice che nell'insieme delle cifre necessarie per costruire tutti i nuneri dell'insieme $(0, N_n)$

- la cifra C_k compare $\sum_{l=0}^{k-1} C_l a^l + 1$ volte,
- le cifre $\leq C_k - 1$ compaiono $kC_k a^{k-1} + a^k$ volte,
- le cifre $\geq C_k$ compaiono $kC_k a^{k-1}$ volte;

inoltre

- le cifre $\leq C_0$ compaiono 1 volta.

Scritto esplicitamente il numero N_n, cioè dati gli $n+1$ coefficienti C_k, possiamo finalmente concludere dicendo che, per scrivere tutti i numeri da 1 ad N_n, una particolare cifra C viene utilizzata

$$\sum_{l=0}^{k-1} C_l a^l + 1 \text{ volte } \forall C_k = C,$$

$$kC_k a^{k-1} \text{ volte } \forall C_k,$$

$$a^k \text{ volte } \forall C_k \geq C + 1,$$

$$1 \text{ volta se } C_0 \geq C.$$

Volendo, a questo punto possiamo anche scrivere una formula esplicita per la funzione $F_C(N_n)$ che fornisce il numero di cifre di tipo C necessarie per scrivere tutti i numeri da 1 ad N_n, ma la formula non risulta particolarmente perspicua e non dice in realtà nulla di più di quanto sopra. Si ha

$$F_C\left(\sum_{k=0}^{n} C_k a^k\right) = \sum_{k=0}^{n}\left\{\delta_{C_k C}\left(\sum_{l=0}^{k-1} C_l a^l + 1\right) + k a^{k-1} C_k + a^k\left[\delta_{C_k C+1} + \theta(C_k - C - 1)\right]\right\}$$
$$+ \delta_{C_0 C} + \theta(C_0 - C),$$

dove si sono usati i simboli

$$\delta_{ab} = \begin{cases} 1, & per \quad a = b, \\ 0, & per \quad a \neq b, \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \theta(a-b) = \begin{cases} 1, & per \quad a > b, \\ 0, & per \quad a \leq b. \end{cases}$$

5 Verso la costruzione del numero *N*

Abbiamo adesso gli elementi per affrontare il problema incontrato all'inizio, cioè per rispondere al quesito: *"se per ogni numero che scrivo mi vengono fornite due cifre 1, mentre per le altre cifre non devo preoccuparmi, avendone comunque a sufficienza, qual è il numero che, scrivendo la successione dei numeri naturali, non riesco più a scrivere perché ho esaurito la scorta di cifre 1?"*

Continuando, per ora, a fare riferimento ad una base a arbitraria, è intuitivamente certo che esso deve cadere in un intervallo del tipo

$$\left(a^n, 2a^n - 1\right) \equiv (100...0, 1zz...z),$$

in quanto in un simile intervallo la cifra 1 viene utilizzata a^n volte in prima posizione e na^{n-1} volte nelle posizioni successive, mentre in ogni intervallo del tipo

$$\left(Ca^n, (C+1)a^n - 1\right) \equiv (C100...0, Czz...z), \text{ con } C > 1,$$

viene utilizzata solo na^{n-1} volte. È inoltre certo che il numero N cui siamo interessati cade *all'interno* dell'intervallo considerato, perché entrambi gli estremi implicano l'uso di una sola cifra 1 ed anche alcuni loro primi vicini sono certamente scrivibili senza dover ricorrere a cifre 1 di scorta. Possiamo pertanto asserire che, per un opportuno valore di n, risulta

$$a^n < N < 2a^n - 1.$$

Si tratta dunque, per prima cosa, di trovare l'esponenete n per cui ciò avviene, cioè di identificare l'ordine di grandezza del nostro numero.

Cominciamo col ricordare che abbiamo indicato con $U(N)$ il numero di cifre 1 necessarie per scrivere tutti i numeri da 1 ad N e che nel paragrafo precedente abbiamo imparato a costruire $U(N)$ per N arbitrario. La forma esplicita di $U(N)$ è data dalla formula

$$U\left(\sum_{k=0}^{n} C_k a^k\right) = \sum_{k=0}^{n}\left\{\delta_{C_k 1}\left(\sum_{l=0}^{k-1} C_l a^l + 1\right) + k a^{k-1} C_k + a^k\left[\delta_{C_k 2} + \theta(C_k - 2)\right]\right\} + \qquad [1]$$
$$+ \delta_{C_0 1} + \theta(C_0 - 1)$$

che indicheremo come **formula ciclopica** e che non è altro che la formula dedotta per F_C, con $C=1$ e $F_1=U$. Fortunatamente, per arrivare al risultato voluto, non avremo necessità di ricorrere a tale formula generale, mentre ci saranno utili alcuni suoi casi particolari, estremamente più semplici da maneggiare. La formula ciclopica potrà essere utile, come tale, per esempio volendo effettuare sul risultato finale un controllo diretto del numero di cifre 1 necessarie per arrivare a scriverlo.

Accanto alla funzione $U(N)$ definiamo poi le due funzioni

$$A(N) \equiv 2N, \qquad [2]$$

che rappresenta il numero di cifre 1 acquisite (fornite) scrivendo tutti i numeri da 1 ad N, e

$$S(N) = A(N) - U(N) \equiv 2N - U(N), \qquad [3]$$

che rappresenta la "scorta" di cifre 1 realizzata all'atto della scrittura del numero N, cioè il numero di cifre 1 risparmiate ($S>0$) o mancanti ($S<0$) per la costruzione di tutti i numeri naturali da 1 ad N.

Usando tali definizioni, il quesito cui si deve rispondere è: *al crescere di N, qual è il valore di N per cui $S(N+1)$ diventa per la prima volta negativo?* Stabilito che N deve cadere in un intervallo del tipo $(a^n, 2a^n-1)$ e che certamente $a^n < N < 2a^n - 1$, cominciamo ad osservare che per l'estremo inferiore dell'intervallo considerato si ha

$$U(a^n) = U(a^n - 1) + 1 = na^{n-1} + 1$$

e quindi

$$S(a^n) = 2a^n - na^{n-1} - 1; \qquad [4]$$

questa quantità, al crescere di n, diventa per la prima volta negativa per $n = 2a$, mantenendosi poi sempre negativa per $n > 2a$. Se ne può concludere che esiste certamente un numero $N+1 < a^{2a}$ che non può essere scritto utilizzando le regole date, ma nulla, per ora, ci dice quanti di tali numeri esistano né quale di essi sia il primo.

Prendendo in esame, poi, l'estremo superiore dell'intervallo, si ha

$$U(2a^n - 1) = 2na^{n-1} + a^n$$

e, ovviamente,

$$A(2a^n - 1) = 4a^n - 2;$$

di conseguenza risulta

$$S(2a^n - 1) = 3a^n - 2na^{n-1} - 2; \qquad [5]$$

questa quantità, **per a pari**, diventa negativa, e uguale a -2, per $n = 3a/2$ (mentre risulta positiva $\forall n$ intero $< 3a/2$) e quindi esiste almeno un numero

$$N < 2a^{3a/2} - 1$$

per cui risulta $S(N) \geq 0$, $S(N+1) < 0$. Siccome però, per $n = 3a/2$, la quantità **[4]** risulta positiva, possiamo asserire che il numero N che cerchiamo è interno all'intervallo $(a^n, 2a^n - 1)$, con $n = 3a/2$.

Potrebbe però rimanere il dubbio che, anche se $S(a^{3a/2})$ è una quantità positiva, la scorta di cifre 1 possa essere diventata negativa per qualche numero minore di $a^{3a/2}$ e poi ritornata positiva, grazie all'apporto delle cifre 1 acquisite in seguito. Ciò non è, come non sarebbe difficile dimostrare, per esempio seguendo il procedimento (analogo a quello che utilizzeremo per determinare il numero N) che qui di seguito schematizziamo. Prendendo in esame, in primo luogo, i numeri appartenenti all'ordine di grandezza precedente quello cui abbiamo detto dover appartenere il nostro numero, cioè i numeri appartenenti all'intervallo $(a^{n-1}, a^n - 1)$, con $n = 3a/2$, fissiamo la nostra attenzione sull'intervallo parziale $(a^{n-1}, 2a^{n-1} - 1)$, che, tra tutti gli intervalli del tipo $(Ca^{n-1}, (C+1)a^{n-1} - 1)$, con $1 \leq C \leq z$, è quello in cui viene utilizzata la maggior quantità di cifre uno, possiamo far vedere abbastanza facilmente che, definita la successione dei numeri

$$N'_{n-1} = a^{n-1},$$
$$N'_k = N'_{k+1} + za^k, \qquad k = 0, \ldots, n-2,$$

per nessuno degli intervalli (N'_{k+1}, N'_k) si rimane con una scorta negativa di cifre 1, scrivendo tutti i numeri appartenenti all'intervallo. Per non appesantire troppo questa nostra analisi, ci esimiamo dal riportare i relativi calcoli espliciti; al lettore desideroso di cimentarsi con la verifica effettiva, suggeriamo di fare riferimento al caso specifico di una base decimale (dove i calcoli numerici necessari sono particolarmente semplici).

A questo punto ci sentiamo di dare per scontato che il numero N che cerchiamo è un numero il cui ordine di grandezza è $n = 3a/2$ e che esso cade all'interno dell'intervallo

$$(a^{3a/2}, 2a^{3a/2} - 1).$$

Per esempio, per $a = 2$ ($\equiv 10$, in numerazione binaria), possiamo asserire che

$$N \in (2^3, 2^4 - 1) \equiv (1000, 1111),$$

mentre, per la usuale numerazione decimale, possiamo asserire che

$$N \in (10^{15}, 2 \cdot 10^{15} - 1).$$

Il fatto che, nel caso considerato, il valore di S nell'estremo superiore dell'intervallo sia uguale a -2, ci dice che, se si fosse potuta proseguire la numerazione, si sarebbe arrivati a fine intervallo con un passivo di sole due cifre 1 ed è un chiaro indizio a favore di un numero N non troppo lontano dall'estremo superiore, cioè dal numero $2a^{3a/2} - 1$.

Nel caso, invece, di una base con un numero a dispari di cifre la quantità **[5]** è certo negativa per $n = (3a+1)/2$ e quindi esiste un numero $N < 2a^{3a/2} - 1$ per cui si ha $S(N) \geq 0$, $S(N+1) < 0$. Per esempio sappiamo che, per $n = 3$, sarà $N < 2 \cdot 3^5 - 1$ ($\equiv 122222$, in base 3).

Osserviamo ancora che, nel generico intervallo

$$\left(a^m, 2a^m - 1\right)$$

che contiene a^m numeri, vengono forniti

$$A_m = 2a^m$$

cifre 1, mentre ne vengono usate

$$U_m = a^m + ma^{m-1}$$

e nell'intervallo si ha un risparmio/consumo

$$R_m \equiv A_m - U_m = a^m - ma^{m-1}; \qquad \textbf{[6]}$$

per $m = a$ si realizza quindi un pareggio tra gli 1 forniti e quelli consumati. Costruendo la successione dei numeri naturali si arriva al cambio di ordine di grandezza con un risparmio che cresce di ordine in ordine finché è $m < a$, mentre, quando diventa $m > a$, si comincia a consumare quanto precedentemente accumulato.

Una volta determinato il numero n che identifica l'intervallo $\left(a^n, 2a^n - 1\right)$, cui deve appartenere il numero

$$N = \sum_{k=0}^{n} C_k a^k$$

che cerchiano e che, per N pari, sappiamo essere $n = 3a/2$, la prima informazione che abbiamo è che il coefficiente della potenza massima di a è

$$C_n = 1.$$

Per determinare completamente N, cioè gli ulteriori n coefficienti $C_{n-1}, C_{n-2}, \ldots, C_0$, possiamo procedere ad una sua determinazione per approssimazioni (per difetto) successive, ordine per ordine, ponendo

$$\begin{aligned}
&N_n = a^n, \\
&N_{n-1} = a^n + C_{n-1}a^{n-1}, \\
&N_{n-2} = a^n + C_{n-1}a^{n-1} + C_{n-2}a^{n-2}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&N_k = N_{k+1} + C_k a^k \equiv \sum_{l=k}^{n} C_l a^l, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&N_0 = N_1 + C_0,
\end{aligned}$$

e determinando via via le varie cifre, scegliendo il coefficiente C_k in modo che esso coincida con la massima tra le a cifre $0,1,\ldots,z$ per cui risulti $S(N_k) \geq 0$.

L'utilizzazione pratica del metodo qui schematizzato sarà illustrata nel prossimo paragrafo in cui, lavorando in base dieci, ci dedicheremo alla determinazione effettiva del numero di aeroplanini che è possibile numerare attenendosi alle regole imposte al costruttore.

6 Determinazione di *N*

Riassumendo, lavorando nella usuale base decimale e definite le funzioni: $U(N)$, che fornisce il numero di cifre 1 necessarie a scrivere tutti i numeri naturali da 1 ad N (data dalla formula ciclopica **[1]**, letta in base decimale),

$$A(N) \equiv 2N ,$$

che dà il numero di cifre 1 avute per scrivere tutti i numeri da 1 ad *N*, e

$$S(N) = A(N) - U(N),$$

che esprime la *"scorta"* di cifre 1 posseduta dopo aver scritto il numero N , quello che vogliamo è determinare quel particolare numero N per cui, procedendo nella scrittura dei numeri naturali, per la prima volta si abbia

$$S(N) \geq 0 ,\ S(N+1) < 0 .$$

Abbiamo visto che deve essere

$$10^{15} < N < 2 \cdot 10^{15} - 1$$

e quindi che N è un numero di 16 cifre,

$$N = \sum_{k=0}^{15} C_k 10^k \equiv 10^{15} + \sum_{k=0}^{14} C_k 10^k ,$$

(presumibilmente non troppo lontano dal numero $2 \cdot 10^{15} - 1$) la cui prima cifra, C_{15}, è prefissata e uguale ad 1. Le cifre successive verranno fissate costruendo il numero N per successive approsimazioni per difetto, ordine per ordine. A tal fine poniamo

$$\begin{aligned}
N_{15} &= 10^{15}, \\
N_{14} &= 10^{15} + C_{14} 10^{14} \equiv N_{15} + C_{14} 10^{14}, \\
N_{13} &= 10^{15} + C_{14} 10^{14} + C_{13} 10^{13} \equiv N_{14} + C_{13} 10^{13}, \\
&\ldots\ldots. \\
N_k &= \sum_{l=k}^{15} C_l 10^l \equiv N_{k+1} + C_k 10^k, \\
&\ldots\ldots. \\
N_0 &= \sum_{k=0}^{15} C_k 10^k \equiv N_1 + C_0,
\end{aligned}$$

scegliendo le successive cifre in modo che C_k sia la massima tra le 10 cifre 0, 1, 2, ..., 9 per cui risulti $S(N_k) \geq 0$.

L'insieme dei numeri che precede N_{15} è quello dei primi 10^{15} numeri naturali, appartenenti all'intervallo

$$\left(0, N_{15}-1\right)=\left(0,10^{15}-1\right),$$

per scrivere i quali sono state assegnate

$$A\left(N_{15}-1\right)=2\cdot 10^{15}-2$$

cifre 1, mentre ne sono state utilizzate

$$U\left(N_{15}-1\right)=15\cdot 10^{14},$$

realizzando una scorta iniziale di

$$S_{15}\equiv S\left(N_{15}-1\right)=5\cdot 10^{14}-2 \qquad [7]$$

cifre 1.

Prendiamo ora in esame l'intervallo fondamentale di riferimento

$$\left(N_{k+1}, N_k-1\right)\equiv\left(\sum_{l=k+1}^{15}C_l 10^l, \sum_{l=k+1}^{15}C_l 10^l+C_k 10^k-1\right)\equiv$$
$$\equiv\left(1C_{14}\dots C_{k+1}000\dots 0, 1C_{14}\dots C_{k+1}\left(C_k-1\right)99\dots 9\right).$$

Esso è costituito da $C_k 10^k$ numeri di sedici cifre, aventi le prime $16-k$ cifre $C_{15},\dots,C_{k+1}$ prefissate, e uguali per tutti, e le rimanenti k cifre coincidenti con quelle dei numeri dell'intervallo

$$\left(0, C_k 10^k-1\right).$$

Nell'insieme dei numeri dell'intervallo di riferimento la cifra 1 compare $C_k 10^k$ volte per ogni coefficiente C_l, con $l>k$, che sia uguale ad 1. Se il loro numero è uguale a ν, per scrivere tutti i numeri dell'intervallo vengono usate

$$U_{pref}=\nu\cdot C_k 10^k$$

cifre 1, per scrivere i prefissati prefissi comuni $1C_{14},\dots,C_{k+1}$ di tali numeri, più le cifre 1 necessarie a scrivere i $C_k 10^k$ suffissi, coincidenti coi numeri dell'intervallo $\left(0, C_k 10^k-1\right)$; queste sono in numero di

$$U_{suff}=\begin{cases} k10^{k-1}, & se \quad C_k=1,\\ 10^k+kC_k 10^{k-1}, & se \quad C_k\geq 2.\end{cases}$$

In totale, dunque, per scrivere tutti i numeri dell'intervallo

$$I_k\equiv\left(N_{k+1}, N_k-1\right),\ k=1,\dots,14,$$

che serve per la determinazione di C_k, viene utilizzato un numero di cifre 1 dato da

$$U_k=\begin{cases} \nu\cdot 10^k+k10^{k-1}, & se \quad C_k=1,\\ \nu\cdot C_k 10^k+10^k+kC_k 10^{k-1}, & se \quad C_k\geq 2,\end{cases}$$

mentre ne sono state acquisite

$$A_k = 2C_k 10^k ,$$

con un risparmio/consumo, nell'intervallo, di un numero di cifre 1 dato da

$$R_k = A_k - U_k = \begin{cases} (2-\nu)10^k - k10^{k-1}, & se \quad C_k = 1, \\ [(2-\nu)C_k - 1]10^k - kC_k 10^{k-1}, & se \quad C_k \geq 2. \end{cases} \qquad \textbf{[8]}$$

Il coefficiente C_k, verrà allora fissato come la massima cifra per cui la scorta di cifre 1 rimasta prima di iniziare la determinazione della cifra successiva C_{k-1}, data da

$$S_k \equiv S(N_k - 1) = S_{k+1} + R_k , \qquad \textbf{[9]}$$

risulti non negativa. Possiamo così procedere iterativamente, utilizzando come dato di ingresso S_{15} (vedi **[7]**) per determinare C_{14} e, contemporaneamente, S_{14} che permette di determinare, in modo analogo, C_{13} ed S_{13}, e così continuare, passo passo, fino ad ottenere le ultime cifre C_1 e C_0.

A questo punto, per determinare le 15 cifre $C_{14},\ldots,C_0$ ancora sconosciute, ci rimangono solo più da fare dei banali calcoletti algebrici, quelli necessari ad ottenere in successione i valori delle quantità R_k ed S_k; si tratta di munirsi di un minimo di pazienza, dato che, per la determinazione del valore effettivo di ogni singola cifra C_k sono previsti fino a dieci possibili tentativi; la fatica necessaria, anche dovessimo realmente fare un numero di tentativi prossimo[3] a 150, ci sembrerà ben poca cosa se la paragoniamo con quella, insostenibile e paventata all'inizio, dell'esame diretto di più di 10^{15} numeri.

Passando dunque al calcolo pratico, cominciamo ad occuparci di N_{14} e quindi a determinare la cifra C_{14} del numero N che cerchiamo. Per $k = 14$, la **[8]** prevede, per $C_k > 1$ ed essendo per ora $\nu = 1$,

$$R_{14} = (C_{14} - 1)10^{14} - 14C_{14}10^{13} = -(0.4C_{14} + 1)10^{14};$$

questa quantità, per

$$C_{14} = 9,$$

vale $-4.6 \cdot 10^{14}$ e la scorta corrispondente vale

$$S_{14} = S_{15} + R_{14} \equiv 5 \cdot 10^{14} - 2 - 4.6 \cdot 10^{14} = 4 \cdot 10^{13} - 2$$

risultando positiva; la cifra C_{14} rimane così fissata e uguale a 9.

Passando al numero successivo, e quindi a $k = 13$, la **[8]**, per $C_k > 1$, prevede

$$R_{13} = (C_{13} - 1)10^{13} - 13C_{13}10^{12} = -(0.3C_{13} + 1)10^{13};$$

questa quantità, per

[3] In realtà il numero di tentativi sarà molto minore, dato che N risulta effettivamente non troppo discosto dall'estremo superiore dell'intervallo che lo individua.

$$C_{13} = 9,$$

vale $-3.7 \cdot 10^{13}$ e la scorta corrispondente vale

$$S_{13} = 4 \cdot 10^{13} - 2 - 3.7 \cdot 10^{13} = 3 \cdot 10^{12} - 2$$

e risulta positiva, avallando la scelta fatta per C_{13}.

Passando al numero successivo, e quindi a $k = 12$, la **[8]**, per $C_k > 1$, prevede

$$R_{12} = (C_{18} - 1)10^{12} - 12C_{12}10^{11} = -(0.2C_{12} + 1)10^{12};$$

questa quantità, per $C_{12} = 9$, vale $-2.8 \cdot 10^{12}$ e la scorta corrispondente vale

$$S_{12} = 3 \cdot 10^{12} - 2 - 2.8 \cdot 10^{12} = 2 \cdot 10^{11} - 2$$

e risulta positiva, avallando la scelta fatta per C_{12}.

Passando al numero successivo, e quindi a $k = 11$, la **[8]**, per $C_k > 1$, prevede

$$R_{11} = (C_{11} - 1)10^{11} - 11C_{11}10^{10} = -(0.1C_{11} + 1)10^{11};$$

questa quantità, per $C_{11} = 9$, vale $-1.9 \cdot 10^{11}$ e la scorta corrispondente vale

$$S_{11} = 10^{10} - 2$$

e risulta positiva, avallando la scelta fatta per C_{11}.

Siamo così arrivati a costruire tutti i numeri naturali da 1 fino ad $N_{11} - 1$, con

$$N_{11} = 1\ 999\ 900\ 000\ 000\ 000,$$

e con una scorta di cifre 1 data da S_{11}.

Il passo successivo, per arrivare a scrivere N_{10}, comporta una novità rispetto ai conti precedenti. Infatti la **[8]**, per $k = 10$ prevede, per tutte le cifre maggiori di 1, $R_{10} = -10^{10}$ e quindi una scorta $S_{10} = -2$ inaccettabile; per $C_{10} = 1$, però, risulta $R_{10} = 0$ e dobbbiamo quindi scegliere per C_{10} la cifra 1. Di conseguenza, per scrivere tutti i numeri da N_{11} ad $N_{10} - 1$, con

$$N_{10} = 1\ 999\ 910\ 000\ 000\ 000,$$

non abbiamo né cosumato né risparmiato cifre 1 e ripartiamo quindi con una scorta

$$S_{10} = S_{11} = 10^{10} - 2.$$

Di qui ricominciamo il tran-tran, utilizzando la **[8]** per valori di k da 9 a scendere, facendo attenzione, però, che ora il numero ν delle cifre 1 che precedono la cifra che dobbiamo determinare è diventato uguale a 2.

Per $k = 9$ abbiamo $R_9 = -10^9 - 9C_9 10^8$ che, per $C_9 = 9$, vale $-9.1 \cdot 10^9$, lasciandoci con una scorta $S_9 = 9 \cdot 10^8 - 2$, positiva.

Per $k=8$ abbiamo $R_8=-10^8-8C_8 10^7$ che, per $C_8=9$, vale $-8.2\cdot 10^8$, lasciandoci con una scorta $S_8=8\cdot 10^7-2$, positiva.

Per $k=7$ abbiamo $R_7=-10^7-7C_7 10^6$ che, per $C_7=9$, vale $-7.3\cdot 10^7$, lasciandoci con una scorta $S_7=7\cdot 10^6-2$, positiva.

Per $k=6$ abbiamo $R_6=-10^6-6C_6 10^5$ che, per $C_6=9$, vale $-6.4\cdot 10^6$, lasciandoci con una scorta $S_6=6\cdot 10^5-2$, positiva.

Per $k=5$ abbiamo $R_5=-10^5-5C_5 10^4$ che, per $C_5=9$, vale $-5.5\cdot 10^5$, lasciandoci con una scorta $S_5=5\cdot 10^4-2$, positiva.

Per $k=4$ abbiamo $R_4=-10^4-4C_4 10^3$ che, per $C_4=9$, vale $-4.6\cdot 10^4$, lasciandoci con una scorta $S_4=4\cdot 10^3-2$, positiva.

Per $k=3$ abbiamo $R_3=-10^3-3C_3 10^2$ che, per $C_3=9$, vale $-3.7\cdot 10^3$, lasciandoci con una scorta $S_3=3\cdot 10^2-2$, positiva.

Per $k=2$ abbiamo $R_2=-10^2-2C_2 10$ che, per $C_2=9$, vale $-2.8\cdot 10^2$, lasciandoci con una scorta $S_2=2\cdot 10-2=18$, positiva.

Finalmente, per $k=1$ la **[8]** prevede, per $C_1>1$, un consumo $R_1=-10-C_1$ che, per $C_1=9$, vale -19 e non è coperto dalla scorta in possesso; per $C_1=8$, risulta $R_1=18$ e quindi la cifra C_1 è proprio l'8, che ci lascia con una scorta nulla di cifre 1. Siamo così arrivati a scrivere il numero N_1-1, essendo

$$N_1 = 1\ 999\ 919\ 999\ 999\ 980,$$

senza scorte di cifre 1. Il numero successivo, cioè proprio N_1, lo possiamo ancora scrivere, perché prevede l'utilizzo di due cifre uno e due sono le cifre 1 che ci vengono fornite. Il numero ancora successivo

$$1\ 999\ 919\ 999\ 999\ 981$$

non può più essere scritto perché pretende l'uso di tre cifre uno, a fronte della fornitura di due sole cifre 1.

Il lettore coscienzioso potrà ora fare una verifica della validità del numero ottenuto, calcolando il numero di cifre 1 necessarie a scrivere tutti i numeri da 1 ad N_1, servendosi della formula ciclopica (che così verrà testata a sua volta), scritta con $a=10$. Troverà, come noi abbiamo trovato, che risulta esattamente

$$U(N_1)=3\ 999\ 839\ 999\ 999\ 960\equiv 2N_1.$$

Dio non aveva sbagliato e non si è reso colpevole dell'uccisione immotivata di una povera, piccola zanzara. Grazie alla sua infinita sapienza, i suoi aeroplanini erano stati contati e numerati uno ad uno correttamente, senza perdita di cifre, senza salti né ripetizioni.

Caronte

Appendice: Suite in R(e) M(aggiore)

1 Preludio

Ebbene, dopo aver letto del Problema Degli Alieni mi è balenata in mente una domanda: "Da dove cavolo arriva?". Così ho dato una attenta occhiata al sito di RM ed ho scoperto i Duri da Cuocere. Solo due ? Ma comunque, avendo tempo, carta e inchiostro, mi sono stampato il numero con il problema degli aeroplanini. Volevo scaricare i due numeri con le soluzioni di Piotr e Alice, ma non ho potuto e poi volevo vedere dove arrivavo per conto mio.

Quindi se le pagine che seguono sono scempiaggini, baggianate o affermazioni lapalissiane, abbiate la clemenza di comunicarmelo non dalle pagine del prossimo numero, ma via e-mail e che rimanga *inter nos*.

Probabilmente non avrei mai tentato di risolvere questo problema, visto che non ho particolare simpatia per quei problemi in cui le difficoltà di calcolo sormontano quelle di ragionamento, ma poi ho capito che il maggiore scoglio era a livello intellettuale e cioè trovare un metodo per aggirare i calcoli.

Complici una verifica di Matematica sulla derivazione inaccettabilmente facile e breve e l'ora seguente, passata a cercare di capire quali differenze passassero, secondo Hegel, tra il sistema fichtiano e quello schellinghiano, mi sono dato alla soluzione del problema, che credo di aver trovato, a meno di errori di calcolo (non avevo voglia di verificare i passaggi con Excel, mi piace troppo fare i conti a mano!).

Il vero problema a questo punto è mettere per iscritto, secondo un preciso ordine di tesi antitesi e sin... no!, di ipotesi dimostrazione e tesi, quel ragionamento contorto e intuitivo che ho svolto sulla copertina del Reale-Antiseri, senza prendere tanto la briga di giustificare formule e passaggi ed ho paura di capirci poco io stesso, ora come ora. Ma immagino che se vi dessi il risultato nudo e crudo vi offendereste, vero? E poi non voglio privarvi della gioia di trovare esattamente quale freccia di implicazione materiale è al posto sbagliato.

2 Allemanda

La prima indicazione che trovo sulla suddetta copertina è la seguente:

$$F\left(10^n - 1\right) = n \cdot 10^{n-1} \qquad [1]$$

ebbene, prima di giungere a tanto dobbiamo affrontare qualche scoglio deduzionale (bella vero?): innanzi tutto è chiaro che la prima cifra a venir meno al nostro appassionato modellista sarà l'uno, poiché è la prima cifra ad essere usata; inoltre è parimenti chiaro che a noi serve un modo per determinare quante cifre di un tipo e specificatamente quanti uno sono stati usati per formare i numeri da 1 a N incluso, qui subito convenendo che tale mezzo sia una funzione e che, detto N il numero, essa sarà $F(N)$.

Ora sorge il problema di determinare F. Compito arduo invero, ma qui ci viene in aiuto la tendenza della matematica a studiare i casi particolari qualora non sia possibile quello generale (più tardi scopriremo che la funzione, sotto certe condizioni, ammette la seguente proprietà $F(A+B) = F(A) + F(B) + G(B)$ dove $B < A$, ma non corriamo troppo).

Cerchiamo di calcolare la funzione quando N sia potenza di 10: nella posizione delle unità ogni cifra compare 1 volta su 10, se si scorrono ordinatamente i naturali; mentre nella posizione delle decine abbiamo 10 1 susseguentisi ogni 100 numeri e così via, il rapporto è sempre di 1/10. Quindi per trovare il numero di volte che 1 occupa una particolare posizione in N numeri mi basterà calcolare $N/10$. Da ciò ricavo che per calcolare F su una potenza di 10, posso sommare il numero di volte che 1 è unità al numero di volte in cui è decina e così di seguito, tenendo presente che 10 alla ennesima è formato da n 0 e un 1 e quindi $n+1$ cifre *(Il logaritmo è decimale: se fosse naturale, sarebbe scritto "ln" [RdA])*:

$$F(N) = \frac{N\log(N)}{10} + 1 = n \cdot 10^{n-1} + 1 \qquad \left(N = 10^n\right) \tag{2}$$

Quell'uno aggiunto è la cifra d'inizio di N: io posso calcolare il numero di 1 in unità, decine, centinaia, etc. fino all'ordine di 10^{n-1}, ma non oltre. Quindi vale la relazione suddetta.

3 Corrente

Ora preoccupiamoci di questa considerazione: se $F(N) = A$, $F(2N) = ?$. Viene la tentazione di portare il 2 fuor di parentesi, ma non è il momento di fare le persone spiritose, come direbbe il mio insegnante di matematica; piuttosto ragioniamo.

Dunque, per quel che riguarda le comparse dell'1 come unità, etc. fino alla (n-1)esima posizione non ci dovrebbero essere problemi, si tratta solo di duplicarne il numero, ma bisogna considerare che stavolta alla ennesima posizione abbiamo per $10^n - 1$ numeri lo 0 (non scritto) e per altri 10^n numeri l'1, mentre il $2 \cdot 10^n$ numero inizia con un 2. Quindi dobbiamo sommare al totale degli 1 queste 10^n apparizioni nella ennesima posizione. Si noti che in esse è incluso anche il solitario 1 che prima avevamo sommato al totale e che non è più necessario sommare. Inoltre si può generalizzare la cosa, calcolando $k \cdot 10^n$ con $0 < k < 10$, che equivarrà a k volte gli 1 tra 1 e $10^n - 1$ più 1 se $k = 1$ o più 10^n se $k > 1$:

$$F(k \cdot N) = k \cdot F(N-1) + 10^{\delta(k) \cdot n}$$

dove

$$\delta(a) = \begin{cases} 0 & se \quad a < 2 \\ 1 & se \quad a \geq 2 \end{cases} \tag{3}$$

4 Sarabanda con abbellimenti

Proseguiamo con i casi particolari: pensiamo di voler calcolare $F(N_0 + N_1)$ dove $N_0 = 10^n$ e $N_1 = 10^{n-1}$ ora, noi siamo in grado di calcolare i due valori separatamente, per cui possiamo iniziare dicendo che di certo le comparse degli 1 si sommeranno tra loro; inoltre bisogna considerare che quei 10^{n-1} numeri che noi aggiungiamo saranno tutti preceduti da un 1 e quindi alla somma delle due funzioni dovremo sommare 10^{n-1}. Immaginiamo ora di sommare un $N_2 = 10^{n-2}$

all'argomento: sommeremo ancora $F(N_2)$ e terremo conto degli 1 che precedono i nuovi 10^{n-2} numeri aggiunti, ma stavolta ogni numero sarà preceduto da 2 uno. Quindi possiamo generalizzare come segue:

$$F(N_0 + N_1 + \ldots + N_a) = \sum_{j=0}^{a} \left[F(N_j) + j \cdot N_j \right]$$

con

$$N_0 = 10^n \qquad \textbf{[4]}$$

$$N_x = 10^{n-x}$$

$$a \le n$$

Ma a questo punto una mente perversa (provate a studiare l'Idealismo Tedesco pre-hegeliano[4] e ditemi se non vi "pervertite" anche voi) potrebbe pensare "Ma perché non mettiamo un bel coefficiente davanti a ciascuna di quelle N ?". La risposta potrebbe essere semplicemente perché no!, ma purtroppo non mi è venuta in mente al momento giusto, e quindi...Consideriamo dunque una serie di coefficienti $k_0, k_1, \ldots$ etc. tutti diversi da 0 e minori di 10 e pensiamoli moltiplicati per i corrispondenti N. A questo punto qualche spiritosone potrebbe suggerire una funzione di funzione... pensateci bene... fatto?... se c'è ancora qualcuno convinto di questa boiata micidiale può anche smettere di leggere! Bene, basta scherzare: se a $k_0 N_0$ (su cui già sappiamo calcolare F) aggiungiamo $k_1 N_1$ per calcolare la F di questa somma dovremo sicuramente aggiungere alla F del primo addendo la F del secondo e in più sommare gli eventuali 1 che si trovano in ennesima posizione nei $k_1 N_1$ numeri aggiunti. Ma attenti bene: se k_0 è maggiore di due non avremo nulla da aggiungere, poiché in ennesima posizione avremo $k_1 N_1$ due. Questo vale per ogni N : dovremo aggiungere $k_x N_x \mu(x)$ dove $\mu(x) =$"quanti k da k_0 a k_{x-1} sono uguali a 1". Quindi possiamo generalizzare e dire che:

$$F(k_0 N_0 + k_1 N_1 + \ldots + k_a N_a) = \sum_{j=0}^{a} \left[F(k_j N_j) + \mu(j) \cdot k_j N_j \right]$$

con

$$N_0 = 10^n \qquad \textbf{[5]}$$

$$N_x = 10^{n-x}$$

$$a \le n$$

5 Bourrée I e II

È facile ora dire che, giunti a qualunque N il numero di 1 trovati nelle scatole sarà $2N$. Quindi possiamo impostare una equazione in un numero indeterminato di incognite, poi calcolarne gli zeri ed esaminare l'intorno di questi per trovare il primo

[4] Non ce l'ho con la filosofia, anzi, mi piace molto, ma certe volte non si riesce a reggere per un'ora ascoltando qualcuno che parla ininterrottamente di Io non-Io, unità indifferenziata, colpi di pistola, vacche nere di notte, etc. (Non sto impazzendo, quelli sono commenti di Hegel sui sistemi dei suoi predecessori).

punto in cui la differenza tra uno trovati e uno utilizzati diventa negativa. Se vi piacciono le matrici, le aspirine ed aspirate (gioco di parole!!) al suicidio, questa è la strada che fa per voi, basta che poi non diano la colpa a me del vostro addio al mondo crudele. Se invece siete almeno un poco sani di mente (la sanità totale è esclusa dall'essere invischiati con RM) pazientate ancora un poco e seguite il resto delle considerazioni teoriche.

È probabile che la diminuzione di uno disponibili (la differenza accennata sopra) sia graduale e nettamente distinguibile dalla fase di aumento. Quindi la cosa più logica da fare è calcolare per quale valore di N si trova o il primo 0 o il primo valore non crescente. Ovviamente non sto pensando a qualunque N, ma a quei valori di N che si scrivono come $k \cdot 10^n$ e di cui sappiamo calcolare F. Le possibilità sono due:

1. troviamo uno zero e indaghiamo nell'intorno sinistro per scoprire se la funzione veniva da valori positivi o negativi e calibriamo di conseguenza;
2. troviamo un valore non in crescita e ne analizziamo i successori per vedere dove si esaurisce la diminuzione.

Una volta fatto questo, andremo ad aggiungere ad N un valore N_1 di ordine $n-1$, ripeteremo i calcoli e così via fino ad avere elementi sufficienti per trovare il primo numero in cui il numero di uno disponibili (che indicheremo d'ora in poi con Δ) sia negativo.

Inoltre è assai scomodo rifare i calcoli ad ogni aggiunta, perciò noi lavoreremo tramite Δ, aggiungendovi e togliendovi ogni volta il necessario.

Possiamo infine affermare che, nel caso vi siano più zeri, si dovrà prendere in considerazione quello che comporta il valore di n o di k più piccolo; ovviamente la prima equazione ci aiuterà a determinare n, mentre le seguenti serviranno per determinare le cifre del numero cercato.

Si dia dunque inizio alle danze!!

6 Giga

Diciamo subito che, per F(10^n) possiamo scrivere $2 \cdot 10^n = n10^{n-1} + 1$ che si risolve per $n = 20$ se non consideriamo l'uno sommato a secondo membro; tuttavia se noi facciamo assumere a k un valore maggiore di 1 l'equazione cambia: $2 \cdot k \cdot 10^n = kn10^{n-1} + 10^n$ e dividendo tutto per 10^{n-1} otteniamo $n = 20 - 10/k$ che quindi crescerà col crescere di k, il cui valore minimo è due, per cui $n = 15$. Dunque troviamo che, arrivando al numero $N = 2 \cdot 10^{15}$, Δ è uguale a 0.

Ora fermiamoci a pensare: il numero precedente (assolutamente[5]) era composto da un 1 e quindici 9, quindi da Δ_{N-1} è stato sottratto 1. ma è stato aggiunto 2 (i due uno trovati nella scatola) quindi tale differenza doveva essere –1. Allora consideriamo il numero immediatamente precedente a $2 \cdot 10^{15}$, limitatamente al quindicesimo ordine, che è 10^{15}.

[5] Cioè che non lo precede per ordine di grandezza, ma che è il numero in questione diminuito di 1. Il concetto solito di precedente, insomma.

Possiamo dire che $\Delta 10^{15} = 2\cdot 10^{15} - 15\cdot 10^{14} - 1$ lasciamo perdere l'uno (ma ricordiamoci che è lì in un angolo accucciato) e scriviamo $\Delta 10^{15} = 5\cdot 10^{14}$.

Ora vediamo di aggiungere a 10^{15} $k10^{14}$, con k tra 1 e 9. Vediamo subito che il valore di k che minimizza Δ (poiché è questo che dobbiamo cercare) è $k = 9$:

(chiamando Δ_{14} il valore che Δ assume per $10^{15} + k10^{14}$) $\Delta_{14} = \Delta_{15} + 2k10^{14} - k\cdot 14\cdot 10^{13} - 10^{14} - k\cdot 10^{14}$ ben si vede che ha il valore più basso per $k = 9$; quindi $\Delta_{14} = 4\cdot 10^{13}$.

Si può proseguire così, trovando, sempre con $k = 9$, $\Delta_{13} = 3\cdot 10^{12}$, $\Delta_{12} = 2\cdot 10^{11}$, $\Delta_{11} = 10^{10}$.

Bene, ora sappiamo che $k_0 = 1, k_1 = 9, k_2 = 9, k_3 = 9, k_4 = 9$ e che $n = 15$. Ma, se proviamo ad andare avanti ci accorgiamo che Δ_{10} si annulla per tutti i valori di k tranne che per $k = 1$. Ora, se vi ricordate ancora di quel povero 1 escluso, questo è il momento di riconsiderarlo. Prendiamo il più piccolo valore di k che annulli il delta, ovvero 2; in realtà il delta così calcolato è –1. Il[6] numero che precede (assolutamente) quello per cui abbiamo calcolato il delta contiene due 1 e tutti 9, e così i suoi predecessori i cui delta quindi valgono –2: il numero per cui abbiamo calcolato $\Delta_{10} = -1$ contiene un 1 e quindi, avendo noi dal precedente a questo tolto 1 uno e aggiunti 2, il delta del precedente era –2 e così per quelli che precedono, in cui vengono utilizzati esattamente gli uno che si trovano nella scatola, fino a quello che finisce per 1(cioè il numero di partenza per cui abbiamo eseguito il calcolo del delta meno 9): esso contiene 3 uno e quindi il delta del suo predecessore deve essere -1 (-2= -1 – 3 + 2), come i suoi 9 predecessori, fino ad un numero che abbia ancora 1 come unità: il predecessore di questo numero avrà $\Delta = 0$. È quindi ragionevole concludere che esso è il numero che stiamo cercando e se facciamo un pò di conti... dunque, siamo andati indietro di 9 numeri, poi di uno e poi ancora di 9, quindi –19... potremo scoprire che esso è $199992\cdot 10^{10} - 19$ ovvero:

$$1\ 999\ 919\ 999\ 999\ 981$$

è il primo numero che non può essere composto.

Certo questo metodo lascia aperto il dubbio che ci sia qualche altro numero per cui valga la stessa condizione. Bene, se volete possiamo riprendere con il procedimento precedente da dove avevamo interrotto per divagare.

Lo facciamo[7]? Ma sì!

Allora se $k_5 = 1$, $\Delta_{10} = 10^{10} + 2\cdot 10^{10} - 10\cdot 10^{9} - 1 - 10^{10}$, ricordando le formule precedentemente accennate.

[6] Da qui in poi il testo (quello che state leggendo) è un pò confuso. Pensate cosa stesse per questo paragrafo sul mio libro!! Ho dovuto praticamente rifare il ragionamento ex novo per capire qualcosa delle cifre e delle lettere greche che ingombravano ormai non solo la copertina, ma anche l'indice analitico.

[7] Ovviamente è una domanda retorica: non crederete che il ragionamento precedente possa stare in piedi?!? Sì, lo so che allora non avrei dovuto farlo, ma era per far capire che con un poco di intuito si può anche arrivare alla soluzione evitando calcoli noiosi e ripetitivi. Inoltre, non avrei mai perso l'occasione di confondervi le idee.

Se dunque accantoniamo un altro –1 (facendo –2!!) troviamo che $\Delta_{10} = \Delta_{11} = 10^{10}$.

Ora possiamo continuare il ragionamento come abbiamo fatto all'inizio:

$\Delta_9 = \Delta_{10} + 2k \cdot 10^9 - k \cdot 9 \cdot 10^8 - 10^9 - 2k \cdot 10^9$ (ricordiamoci che gli uno davanti sono 2) che come al solito si minimizza per $k = 9$ e dà $\Delta_9 = 9 \cdot 10^8$. Proseguendo si otterranno, sempre con $k = 9$, questi risultati: $\Delta_8 = 8 \cdot 10^7, \Delta_7 = 7 \cdot 10^6$, $\Delta_6 = 6 \cdot 10^5, \Delta_5 = 5 \cdot 10^4$, $\Delta_4 = 4 \cdot 10^3, \Delta_3 = 3 \cdot 10^2$, $\Delta_2 = 2 \cdot 10$.

Sì, mi sono fermato, smettetela subito di insultarmi, tanto non vado avanti: il prossimo delta varrebbe 1!!

Come "e allora?" !?! Vi siete già dimenticati quel –2 ringhiante accucciato in un angolo? Oppure l'algebra non è il vostro forte (perché state leggendo allora?)? Vi informo ufficialmente che è da poco stato stabilito con sicurezza che 1-2=-1 e quindi per noi sarebbe già troppo tardi.

Dunque, cerchiamo di evitare l'inconveniente: poniamo l'ultimo k=8 e vediamo cosa salta fuori[8]: $\Delta_1 = \Delta_2 + 2k \cdot 10 - k \cdot 9 \cdot 10^0 - 10^1 - 2k \cdot 10^1$ e quindi $\Delta_1 = 2$ che meno 2 fa 0!!! E dunque, meraviglia delle meraviglie, il numero che lo segue, per cui si dovranno utilizzare 3 uno pur trovandone solo 2, non sarà possibile comporlo. E questo numero è

$$1\,999\,919\,999\,999\,980 + 1 = 1\,999\,919\,999\,999\,981.$$

Signori, il gioco è fatto, la campanella suona la ricreazione

7 Postludio

Sì, lo so che non esiste il postludio in una suite, ma non potevo resistere alla tentazione di salutarvi. No, non è solo per questo. Infatti volevo anche spiegarvi il perché delle formule: in teoria avrei voluto controllare il risultato tramite quelle formule, ma non mi ha retto il cuore al pensiero di vedere un altro 10 alla e quindi ho rinunciato.

Non so bene perché abbia dato ai paragrafi i nomi dei pezzi delle Suite Inglesi di Bach, forse perché le sto ascoltando mentre scrivo, forse perché l'ultimo pezzo assomiglia proprio ad una giga, lungo, monotono e con un falso finale nel bel mezzo.

Inoltre voglio precisare che non ho usato excel neanche una volta, anche perché i calcoli sono molto semplici; spero che nei due numeri che non ho letto non ci fosse qualche richiesta aggiuntiva, ne ho davvero abbastanza di modellini e numerazioni.

Ebbene, in tutta franchezza devo dire che risolvere questo problema mi ha divertito e spero che possa essere io l'ultimo a ridere.

Sam

[8] Sì, sarebbe più corretto porre un equazione e studiare per quale valore di k il delta vale 2, ovvero 0, ma tant'è. So già la risposta, quindi perché perder tempo a girarci in giro? Non sarà rigoroso, ma è molto comodo.