```
SetDirectory["d:\\Le Scienze\\Settembre 11\\Analisi"];
```

Tre cartoline da Zanzibar - Esempi

Carlo Ferjancic

Convenzioni e Legende

Moneta equilibrata

p = q = (1-p) probabilita' di ottenere Testa uguale a probabilita' di ottenere Croce = $\frac{1}{2}$;

Moneta truccata

p != q =(1-p) probabilita' di ottenere Testa diversa da probabilita' di ottenere Croce ;

Seq = sequenza di tre lanci della moneta.
fgs = Funzione generatrice della probabilita' di sequenza - Sintesi delle caratteristiche statistiche di una sequenza nell'ambito di una sequenza infinita di lanci della moneta.
pdf = Probability Distribution Function - p(k) rappresenta la probabilita' che la configurazione si presenti al lancio della moneta numero k.
μ = Valore medio del numero di lanci in cui si presenta la prima occorrenza della sequenza (moneta equilibrata).
σ= Deviazione standard - indice di dispersione di μ.
μt = Come μ ma con moneta truccata.
σt = Come σ ma con moneta truccata.
Durata di gioco = Numero medio di lanci necessari perche' la partita tra due giocatori che hanno scelto sue sequenze distinte abbia termine.
Matrice di gioco = Rappresentazione dell'esito di una partita tra due giocatori per ogni possibile scelta delle due sequenze. In corrispondenza ad ogni sequenza sono riportati tre valori {W,E,T}: W e' la probabilita' di vittoria del primo giocatore in funzione del valore di p della moneta; E e' il valore numerico di W con p=0.5; T e' il valore numerico di W con p=0.6.
La matrice viene rappresentata in colonna per motivi tipografici.

- **Caratteristiche statistiche delle sequenze**

Seq	fgs	μ p=0.5	σ	μt p=0.6	σt
{0, 0, 0}	$1 / \left(1+\left((1-s)\left(1+(1-p) s+(1-p)^2 s^2\right)\right) / \left((1-p)^3 s^3\right)\right)$	14.	11.9164	24.375	22.2433
{0, 0, 1}	$\frac{1}{1+\frac{1-s}{(1-p)^2 p s^3}}$	8.	4.89898	10.4167	7.51157
{0, 1, 0}	$1 / \left(1+\left((1-s)\left(1+(1-p) p s^2\right)\right) / \left((1-p)^2 p s^3\right)\right)$	10.	7.61577	12.9167	10.5951
{0, 1, 1}	$\frac{1}{1+\frac{1-s}{(1-p) p^2 s^3}}$	8.	4.89898	6.94444	3.67465
{1, 0, 0}	$\frac{1}{1+\frac{1-s}{(1-p)^2 p s^3}}$	8.	4.89898	10.4167	7.51157
{1, 0, 1}	$1 / \left(1+\left((1-s)\left(1+(1-p) p s^2\right)\right) / \left((1-p) p^2 s^3\right)\right)$	10.	7.61577	8.61111	6.14511
{1, 1, 0}	$\frac{1}{1+\frac{1-s}{(1-p) p^2 s^3}}$	8.	4.89898	6.94444	3.67465
{1, 1, 1}	$1 / \left(1+\left((1-s)\left(1+p s+p^2 s^2\right)\right) / \left(p^3 s^3\right)\right)$	14.	11.9164	9.07407	7.01361

- **Primi 20 termini della distribuzione di probabilita' per ogni sequenza**

pdf	{0,0,0}	{0,0,1}	{0,1,0}	{0,1,1}	{1,0,0}	{1,0,1}	{1,1,0}	{1,1,1}
pr(1)	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
pr(2)	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
pr(3)	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125
pr(4)	0.063	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.063
pr(5)	0.063	0.125	0.094	0.125	0.125	0.094	0.125	0.063
pr(6)	0.063	0.109	0.078	0.109	0.109	0.078	0.109	0.063
pr(7)	0.055	0.094	0.070	0.094	0.094	0.070	0.094	0.055
pr(8)	0.051	0.078	0.063	0.078	0.078	0.063	0.078	0.051
pr(9)	0.047	0.064	0.055	0.064	0.064	0.055	0.064	0.047
pr(10)	0.043	0.053	0.048	0.053	0.053	0.048	0.053	0.043
pr(11)	0.040	0.043	0.042	0.043	0.043	0.042	0.043	0.040
pr(12)	0.036	0.035	0.037	0.035	0.035	0.037	0.035	0.036
pr(13)	0.033	0.028	0.032	0.028	0.028	0.032	0.028	0.033
pr(14)	0.031	0.023	0.028	0.023	0.023	0.028	0.023	0.031
pr(15)	0.028	0.019	0.025	0.019	0.019	0.025	0.019	0.028
pr(16)	0.026	0.015	0.022	0.015	0.015	0.022	0.015	0.026
pr(17)	0.024	0.012	0.019	0.012	0.012	0.019	0.012	0.024
pr(18)	0.022	0.010	0.017	0.010	0.010	0.017	0.010	0.022
pr(19)	0.020	0.008	0.015	0.008	0.008	0.015	0.008	0.020
pr(20)	0.019	0.006	0.013	0.006	0.006	0.013	0.006	0.019

- **Durata media del gioco (in lanci con moneta equilibrata)**

X	{0,0,0}	{0,0,1}	{0,1,0}	{0,1,1}	{1,0,0}	{1,0,1}	{1,1,0}	{1,1,1}
{0, 0, 0}	0	7.000	6.800	5.600	7.000	5.830	5.600	7.000
{0, 0, 1}	7.000	0	6.000	5.330	6.500	5.000	5.000	5.600
{0, 1, 0}	6.800	6.000	0	5.000	6.000	7.000	5.000	5.830
{0, 1, 1}	5.600	5.330	5.000	0	5.000	6.000	6.500	7.000
{1, 0, 0}	7.000	6.500	6.000	5.000	0	5.000	5.330	5.600
{1, 0, 1}	5.830	5.000	7.000	6.000	5.000	0	6.000	6.800
{1, 1, 0}	5.600	5.000	5.000	6.500	5.330	6.000	0	7.000
{1, 1, 1}	7.000	5.600	5.830	7.000	5.600	6.800	7.000	0

Durata media del gioco (in lanci con moneta truccata p = 0.6)

X	{0,0,0}	{0,0,1}	{0,1,0}	{0,1,1}	{1,0,0}	{1,0,1}	{1,1,0}	{1,1,1}
{0, 0, 0}	0	9.750	9.560	5.870	9.750	6.360	5.870	6.610
{0, 0, 1}	9.750	0	7.450	5.480	9.020	5.170	5.170	5.300
{0, 1, 0}	9.560	7.450	0	5.170	7.450	7.110	5.170	5.330
{0, 1, 1}	5.870	5.480	5.170	0	5.170	5.440	5.340	5.440
{1, 0, 0}	9.750	9.020	7.450	5.170	0	5.170	5.480	5.300
{1, 0, 1}	6.360	5.170	7.110	5.440	5.170	0	5.440	5.250
{1, 1, 0}	5.870	5.170	5.170	5.340	5.480	5.440	0	5.440
{1, 1, 1}	6.610	5.300	5.330	5.440	5.300	5.250	5.440	0

■ Matrice di Gioco

{0, 0, 0}	{0, 0, 1}	$\{1-p, 0.500, 0.400\}$
{0, 0, 0}	{0, 1, 0}	$\left\{\frac{-1+p}{-1-p+p^2}, 0.400, 0.323\right\}$
{0, 0, 0}	{0, 1, 1}	$\left\{-\frac{(-1+p)^2}{-1+2p-3p^2+p^3}, 0.400, 0.241\right\}$
{0, 0, 0}	{1, 0, 0}	$\{-(-1+p)^3, 0.125, 0.064\}$
{0, 0, 0}	{1, 0, 1}	$\left\{-\frac{(-1+p)^2(-1-p+p^2)}{1-p+p^2}, 0.417, 0.261\right\}$
{0, 0, 0}	{1, 1, 0}	$\left\{\frac{(-1+p)^3(1+p)}{-1+2p-3p^2+p^3}, 0.300, 0.154\right\}$
{0, 0, 0}	{1, 1, 1}	$\left\{\frac{(-1+p)^3(1+p+p^2)}{-1+2p-p^2-2p^3+p^4}, 0.500, 0.271\right\}$
{0, 0, 1}	{0, 0, 0}	$\{p, 0.500, 0.600\}$
{0, 0, 1}	{0, 1, 0}	$\left\{\frac{1}{1+p}, 0.667, 0.625\right\}$
{0, 0, 1}	{0, 1, 1}	$\left\{\frac{1-p}{1-p+p^2}, 0.667, 0.526\right\}$
{0, 0, 1}	{1, 0, 0}	$\{(-1+p)^2, 0.250, 0.160\}$
{0, 0, 1}	{1, 0, 1}	$\{1-2p^2+p^3, 0.625, 0.496\}$
{0, 0, 1}	{1, 1, 0}	$\left\{\frac{(-1+p)^2(1+p)}{1-p+p^2}, 0.500, 0.337\right\}$
{0, 0, 1}	{1, 1, 1}	$\left\{\frac{(-1+p)^2(1+p+p^2)}{1-p+p^3}, 0.700, 0.509\right\}$
{0, 1, 0}	{0, 0, 0}	$\left\{\frac{(-2+p)p}{-1-p+p^2}, 0.600, 0.677\right\}$
{0, 1, 0}	{0, 0, 1}	$\left\{\frac{p}{1+p}, 0.333, 0.375\right\}$
{0, 1, 0}	{0, 1, 1}	$\{1-p, 0.500, 0.400\}$
{0, 1, 0}	{1, 0, 0}	$\left\{\frac{1-p+p^2}{1+p}, 0.500, 0.475\right\}$
{0, 1, 0}	{1, 0, 1}	$\left\{\frac{(-1+p)^2(1+p)}{1-p+p^2}, 0.500, 0.337\right\}$
{0, 1, 0}	{1, 1, 0}	$\{(-1+p)^2(1+p), 0.375, 0.256\}$
{0, 1, 0}	{1, 1, 1}	$\left\{\frac{(-1+p)^2(1+p+p^2)}{1-p+p^2}, 0.583, 0.413\right\}$
{0, 1, 1}	{0, 0, 0}	$\left\{\frac{(-2+p)p^2}{-1+2p-3p^2+p^3}, 0.600, 0.759\right\}$
{0, 1, 1}	{0, 0, 1}	$\left\{\frac{p^2}{1-p+p^2}, 0.333, 0.474\right\}$
{0, 1, 1}	{0, 1, 0}	$\{p, 0.500, 0.600\}$
{0, 1, 1}	{1, 0, 0}	$\{p, 0.500, 0.600\}$
{0, 1, 1}	{1, 0, 1}	$\left\{\frac{-1+p^2}{-2+p}, 0.500, 0.457\right\}$
{0, 1, 1}	{1, 1, 0}	$\{1-p^2, 0.750, 0.640\}$
{0, 1, 1}	{1, 1, 1}	$\{1-p^3, 0.875, 0.784\}$

{1, 0, 0}	{0, 0, 0}	$\{p\,(3-3\,p+p^2),\ 0.875,\ 0.936\}$
{1, 0, 0}	{0, 0, 1}	$\{-(-2+p)\,p,\ 0.750,\ 0.840\}$
{1, 0, 0}	{0, 1, 0}	$\{-\frac{(-2+p)\,p}{1+p},\ 0.500,\ 0.525\}$
{1, 0, 0}	{0, 1, 1}	$\{1-p,\ 0.500,\ 0.400\}$
{1, 0, 0}	{1, 0, 1}	$\{1-p,\ 0.500,\ 0.400\}$
{1, 0, 0}	{1, 1, 0}	$\{\frac{(-1+p)^2}{1-p+p^2},\ 0.333,\ 0.211\}$
{1, 0, 0}	{1, 1, 1}	$\{\frac{(-1+p)^2\,(1+p)}{1-p+p^3},\ 0.600,\ 0.416\}$
{1, 0, 1}	{0, 0, 0}	$\{\frac{p^2\,(3-3\,p+p^2)}{1-p+p^2},\ 0.583,\ 0.739\}$
{1, 0, 1}	{0, 0, 1}	$\{-(-2+p)\,p^2,\ 0.375,\ 0.504\}$
{1, 0, 1}	{0, 1, 0}	$\{-\frac{(-2+p)\,p^2}{1-p+p^2},\ 0.500,\ 0.663\}$
{1, 0, 1}	{0, 1, 1}	$\{\frac{-1+p-p^2}{-2+p},\ 0.500,\ 0.543\}$
{1, 0, 1}	{1, 0, 0}	$\{p,\ 0.500,\ 0.600\}$
{1, 0, 1}	{1, 1, 0}	$\{\frac{-1+p}{-2+p},\ 0.333,\ 0.286\}$
{1, 0, 1}	{1, 1, 1}	$\{\frac{-1+p^2}{-1-p+p^2},\ 0.600,\ 0.516\}$
{1, 1, 0}	{0, 0, 0}	$\{-\frac{p^2\,(3-3\,p+p^2)}{-1+2\,p-3\,p^2+p^3},\ 0.700,\ 0.846\}$
{1, 1, 0}	{0, 0, 1}	$\{-\frac{(-2+p)\,p^2}{1-p+p^2},\ 0.500,\ 0.663\}$
{1, 1, 0}	{0, 1, 0}	$\{p+p^2-p^3,\ 0.625,\ 0.744\}$
{1, 1, 0}	{0, 1, 1}	$\{p^2,\ 0.250,\ 0.360\}$
{1, 1, 0}	{1, 0, 0}	$\{\frac{p}{1-p+p^2},\ 0.667,\ 0.789\}$
{1, 1, 0}	{1, 0, 1}	$\{\frac{1}{2-p},\ 0.667,\ 0.714\}$
{1, 1, 0}	{1, 1, 1}	$\{1-p,\ 0.500,\ 0.400\}$
{1, 1, 1}	{0, 0, 0}	$\{\frac{p^3\,(3-3\,p+p^2)}{1-2\,p+p^2+2\,p^3-p^4},\ 0.500,\ 0.729\}$
{1, 1, 1}	{0, 0, 1}	$\{-\frac{(-2+p)\,p^3}{1-p+p^3},\ 0.300,\ 0.491\}$
{1, 1, 1}	{0, 1, 0}	$\{\frac{p^2+p^3-p^4}{1-p+p^2},\ 0.417,\ 0.587\}$
{1, 1, 1}	{0, 1, 1}	$\{p^3,\ 0.125,\ 0.216\}$
{1, 1, 1}	{1, 0, 0}	$\{\frac{p^2}{1-p+p^3},\ 0.400,\ 0.584\}$
{1, 1, 1}	{1, 0, 1}	$\{\frac{p}{1+p-p^2},\ 0.400,\ 0.484\}$
{1, 1, 1}	{1, 1, 0}	$\{p,\ 0.500,\ 0.600\}$

- ## Quesito di Rudy

Rudy, dopo la prima sconfitta subita, intende cautelarsi nella rivicita concessa da Doc.

Decide di scegliere la sequenza {0,1,1} che, normalmente, gli offre un massimo di probabilita' pari a $\frac{1}{3}$.

Questa volta' intende avvalersi della famosa moneta truccata (la cui esistenza e' stata sempre sospettata da Alice e Piotr, ma mai e' stata provata).
Poiche' dispone di un vasto campionario di queste monete, si chiede quale p deve avere per superare, anche di poco, le probabilita' di vincita di Doc senza suscitare sospetti.

Risposta:
Poiche' Doc conosce la matrice di gioco standard, scegliera' la risposta {0,0,1}, la percentuale di vincita e' di

$\frac{p^2}{1-p+p^2}$. Perche' sia del 51% p deve essere all'incirca **0.62.**

Rudy sceglia la moneta corrispondente a questo standard truffaldino e parte baldanzoso per l'incontro di rivincita.

Conclusione e saluti

E' ovvio che tutti i dati, simbolici e numerici, ricavati mediante algoritmi implementati con *Mathematica*, sono ricavabili immediatamente per sequenze di qualsiasi lunghezza, non solo 3.

Ora ho proprio finito e ringrazio tutti: quelli che hanno segnalato qualche mia svista (ne faccio spesso!) e quelli le cui domande o osservazioni mi hanno permesso di approfondire aspetti del problema che avevo sorvolato.

Carlo