Soluzione di “Tre cartoline da Zanzibar”

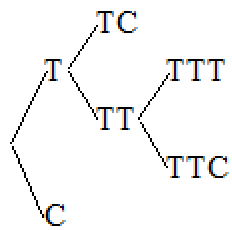
Fabio Ferri

Guardo che probabilità ha Rudy di vincere sapendo che le possibili terne che Doc può scegliere sono 2^3 meno quella scelta da Rudy, ovvero 7. Le scelte per Doc sono quindi, indicando con T testa e con C croce, TTT, TCC, TCT, CCC, CTC, CCT, CTT. Inoltre una patta infinita ha probabilità 0 di avverarsi, quindi la probabilità che vinca Rudy è complementare a quella che vinca Doc.

Adesso guardo cosa succede se Doc sceglie testa-testa-testa; chiamo $p_{TTC \to TTT}$ la probabilità che compaia un TTC prima di un TTT, cioè che vinca Rudy (per comodità nei calcoli la indicherò solamente con p). Noto che se ad un certo punto compare una C il gioco prosegue come se ricominciasse dall’inizio, poiché in nessuna delle 2 sequenze c’è croce in prima o seconda posizione. Dunque, guardando lo schema, si ha che

$$p = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)$$

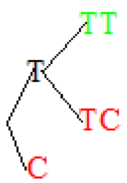
$$p_{TTC \to TTT} = \frac{1}{2}$$



e quindi scegliendo testa-testa-testa Doc ha $\frac{1}{2}$ di probabilità di vincere.

Dunque, se Doc non sceglie TTT e la sequenza inizia con TT, Rudy ha la certezza di vincere, poiché c’è probabilità nulla di avere una sequenza infinita di T e non appena compare una C si ha un TTC. Quindi la probabilità di Rudy di vincere è almeno $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Adesso osservo cosa succede se Doc punta sulla terna CTT. Se ad un certo punto compare una C senza che nessuno abbia vinto è come se il gioco ricominciasse da una sola C, visto che né in TTC né in CTT la C compare al secondo posto. In questo caso Rudy non può mai vincere; infatti, supponendo per assurdo che compaia una terna TTC prima di CTT, essa sarebbe preceduta da un certo numero di T più una C (perché una C ci deve essere per forza visto che la sequenza inizia con C), ma allora è già comparso prima un CTT, che è assurdo.



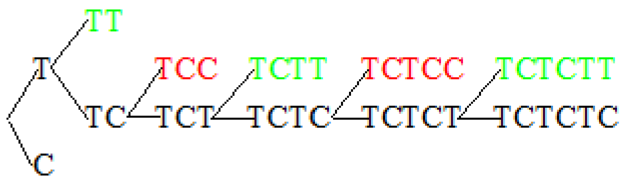
Dunque, facendo riferimento allo schema (dove le sequenze colorate in verde o in rosso indicano rispettivamente le sequenze vincenti per Rudy e Doc), visto che, come detto prima, se si inizia con TT ha vinto Rudy, vale $p_{TTC \to CTT} = \frac{1}{4}$. Dato che questo è il minimo valore possibile e ho mostrato che è ottenibile, la massima probabilità che ha Doc di vincere è $\frac{3}{4}$ scegliendo CTT e dunque la scelta più conveniente per lui in risposta a Rudy è croce-testa-testa. □

Per curiosità osservo quali sarebbero le probabilità di vincere per Doc nelle altre 5 scelte possibili:

- **TCC:** Innanzitutto chiamo S l'espressione $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(\cdots)\right)\right)\right)$. S soddisfa quindi

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}S\right)$$

  cioè o S diverge oppure è uguale a $\frac{1}{3}$. Adesso, per calcolare $p_{TTC\to TCC}$, osservo che se compare come primo risultato una C è come se il gioco ricominciasse da capo e che se a un certo punto compare un TT senza che nessuno abbia vinto ha vinto Rudy, perché c'è probabilità 0 che ci sia una sequenza infinita di T e non appena c'è una C si ha un TTC.

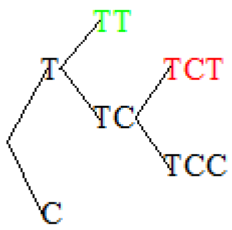


  Dunque, osservando lo schema , ne deduco che

$$p=\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\cdots)\right)\right)=\frac{1}{2}p+S\,.$$

  Siccome la probabilità è un numero finito, S è uguale a $\frac{1}{3}$, da cui $p_{TTC\to TCC}=\frac{2}{3}$. Dunque se Doc sceglie testa-croce-croce ha $\frac{1}{3}$ di probabilità di vincere.

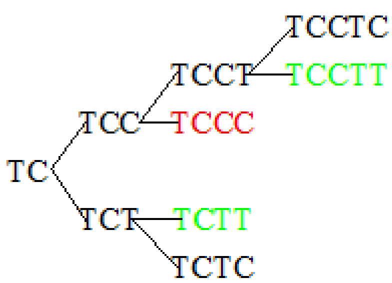
- **TCT:** Come prima se a un certo punto compare un TT, Rudy ha vinto. Inoltre se si raggiunge CC o si parte con una C il gioco è come se ripartisse dall'inizio. Quindi



$$p=\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}p\right)$$

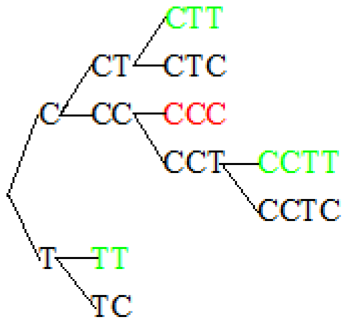
  ovvero $p_{TTC\to TCT}=\frac{2}{3}$, che dà a Doc $\frac{1}{3}$ di probabilità di vincere.

- **CCC:** Chiamo p_{TC} la probabilità che vinca Rudy con una sequenza che finisce con TC; come sempre con un TT ha vinto Rudy. Vale quindi



$$p_{TC}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}p_{TC}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}p_{TC}\right)$$

  da cui $p_{TC}=\frac{3}{5}$.

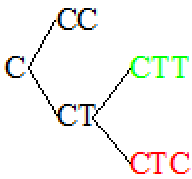


La probabilità vale quindi:

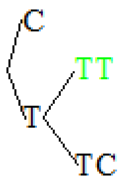
$$p_{TTC \to CCC} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}p_{TC}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}p_{TC}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}p_{TC}\right)\right)=\frac{7}{10}$$

cioè Doc ha $\frac{3}{10}$ di probabilità di vincere.

- **CTC:** Chiamo p_C la probabilità che Rudy vinca partendo con una C. Noto che se esce fuori un TT ha vinto Rudy e se esce C senza che nessuno abbia vinto è come se il gioco ricominciasse da capo partendo con C. Quindi p_C soddisfa



$$p_C = \frac{1}{2}p_C + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \to p_C = \frac{1}{2}.$$



Dunque vale $p_{TTC \to CTC} = \frac{1}{2}p_C + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}p_C\right) = \frac{5}{8}$, ossia Doc vince con il $\frac{3}{8}$ di probabilità.

- **CCT:** Siccome la probabilità che esce testa è uguale a quella che esce croce, le terne TTC e CCT hanno la stessa probabilità di comparire l'una prima dell'altra. Quindi se Doc sceglie CCT ha $\frac{1}{2}$ di probabilità di vincere.