

# Un'entropia enciclopedica

(Problema di Marzo 2021)

## Il Problema

Dal primo gennaio di quest'anno Piotr dispone gli otto volumi dell'enciclopedia di Rudy in "disordine", infatti ogni volta Rudy riordina l'enciclopedia nell'ordine naturale 12345678 mentre Piotr sposta alcuni volumi in modo che la nuova disposizione sia sempre in salita tranne in un punto in cui è in discesa es. 35812467.

Dato che ogni volta Piotr cambia la disposizione, verrà un giorno in cui avrà esaurito le disposizioni. Bisogna trovare il numero delle possibili disposizioni che rispettino la regola e quindi quando Piotr dovrà interrompere il suo gioco.

## Soluzione

Il numero delle possibili disposizioni è 247, perciò Piotr terminerà di scombinare l'enciclopedia di Rudy il 5 settembre 2021.

## Spiegazione

Vedremo che in generale, detto  $n$  il numero dei volumi, le possibili disposizioni  $D(n) = 2^n - n - 1$ . Chiamo  $D_x(n)$  il numero di disposizioni che hanno il volume  $x$  in prima posizione e si può vedere immediatamente che  $D_1(n) = D(n-1)$ .

Considero poi le disposizioni che, non iniziano per 1, fino alla posizione in cui si trova l'elemento  $x$  sono in salita e, fino a  $x$ , mantengono lo stesso ordinamento degli elementi; queste dipenderanno, naturalmente da come si possono disporre gli elementi dopo  $x$ .

C'è un solo modo di "andare in discesa", si dovrà disporre l'1 seguito dagli elementi rimanenti in ordine crescente; Per andare in salita si potrà utilizzare come elemento successivo, se esiste, uno degli elementi con valore superiore a  $x$ .

Indicando perciò con  $DS(x)$  queste disposizioni, si avrà

$$DS(x) = 1 + \sum_{i=x+1}^n DS(i) \quad \text{con } DS(n) = 1$$

Così sarà

$$DS(n) = 1$$

$$DS(n-1) = 1 + DS(n) = 1 + 1 = 2$$

$$DS(n-2) = 1 + DS(n-1) + DS(n) = 1 + 2 + 1 = 4$$

...

$$DS(n-i) = 1 + DS(n-i+1) + \dots + DS(n-1) + DS(n) = 2^i.$$

Perciò, per ogni  $i$  compreso tra 2 e  $n$  avremo che  $D_i(n) = DS(i) = 2^{n-i}$ .

Da quanto detto in precedenza avremo

$$D(n) = D(n-1) + \sum_{i=2}^n 2^{n-i} = D(n-1) + 2^{n-1} - 1$$

$$D(1) = 0$$

$$D(2) = D(1) + 2^1 - 1 = 1$$

$$D(3) = D(2) + 2^2 - 1 = 2^2 + 2^1 - 1 - 1 = 2^2 + 2^1 - 2 = 4$$

$$D(4) = D(3) + 2^3 - 1 = 2^3 + 2^2 + 2^1 - 1 - 1 - 1 = (2^4 - 2) - 1 - 1 - 1 = 2^4 - 5$$

$$D(n) = 2^n - n - 1.$$

Per inciso, confidando nel fatto che Piotr dovesse avere un elenco di tutte le possibili disposizioni da applicare e che le cassasse man mano che le applicava, ho cercato questo appunto, l'ho trovato e lo riproduco alla pagina successiva.

|                     |                     |                     |                     |                     |                     |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 12345687            | 12345768            | <del>12345786</del> | 12345867            | 12346578            | 12346758            |
| <del>12346785</del> | 12346857            | 12347568            | 12347856            | <del>12348567</del> | 12354678            |
| 12356478            | <del>12356748</del> | 12356784            | 12356847            | 12357468            | <del>12357846</del> |
| 12358467            | 12364578            | 12367458            | <del>12367845</del> | 12368457            | 12374568            |
| 12378456            | <del>12384567</del> | 12435678            | 12453678            | 12456378            | 12456738            |
| 12456783            | 12456837            | <del>12457368</del> | 12457836            | 12458367            | 12463578            |
| <del>12467358</del> | 12467835            | 12468357            | 12473568            | <del>12478356</del> | 12483567            |
| 12534678            | 12563478            | 12567348            | 12567834            | 12568347            | <del>12573468</del> |
| 12578346            | 12583467            | 12634578            | 12673458            | 12678345            | 12683457            |
| 12734568            | <del>12783456</del> | <del>12834567</del> | 13245678            | 13425678            | 13452678            |
| 13456278            | 13456728            | 13456782            | <del>13456827</del> | 13457268            | <del>13457826</del> |
| <del>13458267</del> | 13462578            | 13467258            | 13467825            | 13468257            | 13472568            |
| 13478256            | <del>13482567</del> | 13524678            | 13562478            | <del>13567248</del> | 13567824            |
| 13568247            | 13572468            | <del>13578246</del> | 13582467            | 13624578            | 13672458            |
| <del>13678245</del> | 13682457            | 13724568            | 13782456            | 13824567            | 14235678            |
| 14523678            | <del>14562378</del> | 14567238            | <del>14567823</del> | 14568237            | <del>14572368</del> |
| 14578236            | 14582367            | 14623578            | 14672358            | 14678235            | 14682357            |
| 14723568            | 14782356            | 14823567            | 15234678            | <del>15623478</del> | 15672348            |
| <del>15678234</del> | 15682347            | <del>15723468</del> | 15782346            | 15823467            | 16234578            |
| 16723458            | 16782345            | 16823457            | 17234568            | <del>17823456</del> | 18234567            |
| 21345678            | 23145678            | 23415678            | <del>23451678</del> | 23456178            | <del>23456718</del> |
| <del>23456781</del> | <del>23456817</del> | 23457168            | 23457816            | 23458167            | 23461578            |
| 23467158            | 23467815            | <del>23468157</del> | 23471568            | <del>23478156</del> | 23481567            |
| 23514678            | 23561478            | 23567148            | 23567814            | 23568147            | 23571468            |
| <del>23578146</del> | <del>23581467</del> | 23614578            | <del>23671458</del> | 23678145            | <del>23681457</del> |
| 23714568            | 23781456            | 23814567            | 24135678            | 24513678            | 24561378            |
| 24567138            | 24567813            | <del>24568137</del> | 24571368            | 24578136            | 24581367            |
| <del>24613578</del> | <del>24671358</del> | 24678135            | 24681357            | <del>24713568</del> | 24781356            |
| 24813567            | 25134678            | 25613478            | 25671348            | 25678134            | <del>25681347</del> |
| 25713468            | 25781346            | 25813467            | <del>26134578</del> | 26713458            | 26781345            |
| 26813457            | <del>27134568</del> | 27813456            | 28134567            | 31245678            | 34125678            |
| <del>34512678</del> | 34561278            | 34567128            | 34567812            | <del>34568127</del> | 34571268            |
| 34578126            | 34581267            | <del>34612578</del> | 34671258            | 34678125            | <del>34681257</del> |
| 34712568            | 34781256            | 34812567            | 35124678            | 35612478            | 35671248            |
| 35678124            | <del>35681247</del> | 35712468            | 35781246            | <del>35812467</del> | 36124578            |
| <del>36712458</del> | 36781245            | 36812457            | <del>37124568</del> | 37812456            | 38124567            |
| 41235678            | 45123678            | 45612378            | 45671238            | 45678123            | 45681237            |
| 45712368            | <del>45781236</del> | 45812367            | <del>46123578</del> | 46712358            | <del>46781235</del> |
| <del>46812357</del> | 47123568            | <del>47812356</del> | 48123567            | 51234678            | 56123478            |
| 56712348            | 56781234            | 56812347            | 57123468            | <del>57812346</del> | 58123467            |
| 61234578            | 67123458            | <del>67812345</del> | 68123457            | 71234568            | 78123456            |
| 81234567            |                     |                     |                     |                     |                     |